

液晶プロジェクタによる実寸シミュレーションを併用した物理学実験

— ソフトウェアの設計と光学実験における応用例 —

Physics Experiments with the Real-Size Computer-Simulation by LCD Projector
— Design of the Software and an Application Example in Optics Experiments —

三 仲 啓*・朱 弘 范**
MINAKA Akira・Zhu Hong Fan

キーワード： 演示実験，液晶プロジェクタ，実寸投影，シミュレーション，物理学実験

1. はじめに

物理学の学習には、豊かで正確なイメージが描けることが必要とされる場面が多い。そのため、物理学の教科書には図が多用され、授業中にも図を描くことが多い。さらに、そのイメージは時間的・空間的な広がりをもったものが多く、図だけでは不十分であるため、授業の中では、演示実験を行ったり、ビデオ映像を見せたり、コンピュータシミュレーションを利用したりする。言葉と図からイメージを描くことが苦手な学生が多くなった現在では、演示実験やシミュレーションは物理教育に不可欠なものとなっている。

さて本研究では、液晶（LCD）プロジェクタによるシミュレーション映像と実物による実験とを重ね合わせて提示するシステムを開発し、その効果について考察する。この方法では、実験結果を即座に定量的に分析できること、実験を説明するための理論にさまざまな副次的効果を取り入れることができるなどの利点が期待できる。当面、このシステムで扱う実験は、平面内で行えるものに限ることとする。

次章では、実寸投影のための座標変換式をできるだけ簡単に決める方法について考察する。3章では、動きのない簡単な応用例として、回折格子の実験に本システムを適用した結果を報告する。最後に、本システムの問題点や可能性などについてまとめる。

2. 実寸投影のための座標変換

(1) 座標変換

本システムの製作には、まずコンピュータ画面内の論理座標とスクリーン上の実寸座標との変換式が必要になる（図1）。これは、通常の3Dグラフィックスの投影変換と同様なものではあるが、実際の配置に応じて変換式が容易に決定できるようにしなくては実用にならない。そのため既存の投影変換ソフトウェアをそのまま利用することは有利にはならない〔文献1〕。

コンピュータ画面の論理座標系（図2a）は、直角座標であり、x方向、y方向の単位は任意に選べる。表示領域は長方形であり、その中の論理座標系は、長方形の対角線の両端にある頂点の座標値を適当に設定することで定められる。本システムにおいても、論理座標は全く自由に設定できるように設計することにする。

スクリーンは、実験と併用することを考えて、鉛直平面内にあるものとする。水平方向にx軸、鉛直上向きにy軸をとり、単位はメートルなどの実寸とする（図2b）。原点は、論理座標の原点が投影される点と一致させておく。シミュレーションソフトには座標を平行移動させる機能を持たせるので、こうしておいても自由度は失われない。

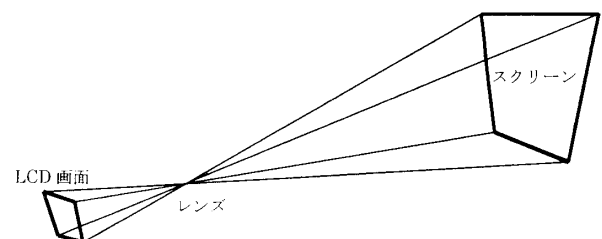


図1 液晶プロジェクタによる投影

* 鹿児島大学教育学部理科教育（物理）

** 鹿児島大学教育学部研究科理科教育（物理）

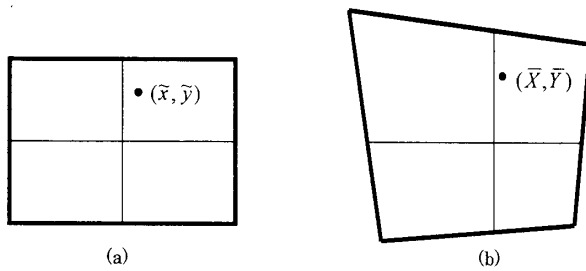


図2 コンピュータ画面の論理座標(a)と
スクリーン上の実寸座標(b)

論理座標の原点は実寸座標の原点に投影されるものとする。また、スクリーンは鉛直平面内にあり、実寸座標系のx軸は水平方向、y軸は鉛直方向にとる。

この2つ座標系間の一般的な変換式は付録に与えてあるが、ここには以下の8つのパラメータが現れる。

- ・スクリーン上の原点と投影中心との相対位置 (X_0, Y_0, Z_0)
- ・LCD面の向きとスクリーン面の向きの関係を表すオイラー角 α, β, γ
- ・論理座標のx方向、y方向の単位の任意性から生じる因子 c_x, c_y

もちろん、これらのパラメータを組み換えて別な表現にすることもできるが、8つの独立したパラメータが現れることには変わりがない。

(2) 座標変換パラメータの決定法

上記の8個のパラメータを決めるには、4点について、論理座標と実寸座標のx, y成分の対応関係を与え、その8つの条件式から計算するのが直接的な方法である。しかし、実寸座標における座標値を求めるのは一般には面倒な作業であり、その数値をコンピュータに手で入力することも手間がかかる。

任意の位置にプロジェクタを設置した後、できるだけ早く実験が開始できるようにするためには、手軽にパラメータを決定できなくてはならない。ここでは、スクリーン上に置いた一定長の尺度の両端をマウスのクリックで指定する方法を採用することにした。

論理座標は自由に設定しておけば、マウスのクリックによりその点の論理座標値が得られる。スクリーン上の実寸座標の絶対値は不明だが、2点

間の距離が一定値(例えば1m)であることなどを利用して条件式を求める。この方法では、スクリーン上の座標値を求める必要がないことが特長になる。

尺度をどのように配置するかにより得られる条件式の数が異なる。すなわち、尺度を鉛直または水平にしてその両端をクリックした場合には2つの条件式が得られるが、任意の角度に配置した場合には1つの条件式しか得られない。

尺度を鉛直に配置するのはぶら下げるだけでよいので容易だが、水平に配置するに、黒板の上下端などすでに水平であることがわかっているものを利用するか、水準器(透明ホースに水を入れたものが手軽で正確)を利用することになる。

実際には、スクリーン上に尺度を置いたまま、その両端をクリックするのではなく、両端の位置に小さなマークを付けておくのが便利である。同じ場所で何度も実験をするのであれば、固定的なマークを付けておけばよい。

(3) パラメータの計算方法

鉛直または水平な尺度や任意の角度の尺度を組み合わせて8つの条件式が得られるようにすればよいが、実際には、

- ・プロジェクタは通常ほぼ水平に置かれる。
- ・上下方向の台形補正機能を持ったプロジェクタであれば、オイラー角のうち α, γ はほぼ正確に0になる。
- ・論理座標を設定すれば、縦横の単位長さの比は、LCD面の画素数からほぼ正確に決まる。などの事情があり、実質的なパラメータは少なくなる。

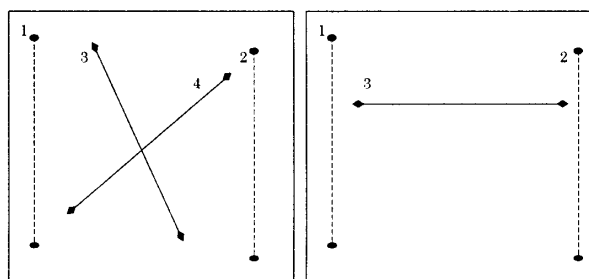
また、得られた条件式からパラメータを求める計算は解析的方法では大変面倒になる。そこで今回は、最小二乗法(勾配法)により、与えられた条件式からパラメータを決めることにした。こうすると、条件式の数がパラメータの数より少ない場合でも解を求めることができる。

状況に応じてパラメータの数を減らしておけば、より正確な変換式が得られるはずである。しかし、上記の方法には、どのような状況でも同じプログラムが使用できるという利点がある。

勾配法では、長さの誤差(の自乗和の平方根)

が5 mm以下になると収束したとみなし、また10000回の試行を行っても収束しないときも終了させることにした。

プロジェクタには台形補正機能を持つものと待たないものの両方を使い、さまざまな方法を試してみた。その結果、図3に示す2つの方法が実用的と思われるので、これらをソフトウェアに組み込んである。方法1は鉛直尺度を2回と任意の角度の尺度を2回使用し、方法2では鉛直尺度を2回と水平尺度を1回使用する。方法1では壁面の8点を、方法2では6点をマウスでクリックすることにより座標変換の式が確定できる。



(a)方法1

(b)方法2

図3 座標変換式のパラメータの決定法

(a)方法1：黒板またはスクリーン上に同じ長さの二本の鉛直線1, 2と二本の斜線3, 4を取り、各線分の両端である8つの点をマークし、それらをマウスでクリックする。

(b)方法2：黒板またはスクリーン上に同じ長さの二本の鉛直線1, 2と一本の水平線3を取り、各線分の両端である6つの点をマークし、それらをマウスでクリックする。

いずれの方法でも十分な精度で座標設定ができるが、方法2では変換式自体は正確であっても不自然なパラメータの値が選択される場合が多くなるようである。なお、制約条件の数がパラメータ数よりも少ないので、パラメータの初期値が重要になる。毎回、ほぼ相似形の投影変換になるようなパラメータから開始するようになれば問題は生じないようである。

3. 光学実験への応用例

(1) 本システムを利用した実験の手順

本システムを利用した実験を行う場合の手順は、一般に以下ようになる。

- ・ノート型コンピュータと液晶プロジェクタを接続し、本システムのソフトウェアの画面を、実験を行う壁面（またはスクリーン）に投影する。このとき、ソフトウェア画面は最大化（全画面化）しておくのが妥当である。
- ・前述のように壁面にマークを付け、方法1または方法2により投影変換式を求める。当然のことであるが、変換式を決定した後は、プロジェクタの位置やソフトウェアの画面（ウィンドウ）の位置を動かしてはいけない。
- ・各実験用のソフトウェアを起動する。このソフトウェアは、投影変換を決定した画面そのものが、それと全く同等な画面を使ってシミュレーションを表示する。その際に、実寸で計算したものを画面内の論理座標に変換して描画することになる。
- ・同時に実物による実験も行う。実物とシミュレーションの位置を合わせるために、ソフトウェアには位置を平行移動して表示する機能を組み込んである。
- ・実験と合うようにシミュレーションの条件を調節して、物理的に意味のあるパラメータを決定する。また、実験自体の条件を変えて、シミュレーションから物理的パラメータの変化を観察する。

(2) 回折格子の実験

実寸投影システムの最初の応用として、回折格子によるレーザー光の波長の測定を採りあげた。この実験は、動きがなく、スクリーン面に直接回折パターンが作れるので、最も簡単な応用例の一つであろう。

回折格子による角度方向の回折光の強度は、フラウンホーファ回折として計算すると次式で与えられる。

$$I \propto \left[\frac{\sin((ka \sin \theta)/2)}{(ka \sin \theta)/2} \right]^2 \left[\frac{\sin((kNd \sin \theta)/2)}{\sin((kd \sin \theta)/2)} \right]^2 \quad (1)$$

ここで、 $k \equiv 2\pi/\lambda$ 、 λ は光の波長、 a は各スリットの幅、 d は隣り合うスリットの間隔（格子定数）、 N はスリットの数である。当然、 $a < d$ である。

式(1)の前の因子は、幅 a の単スリットの強度に等しい。また、後ろの因子の分母・分子が0と

なる $(kd \sin \theta)/2 = n\pi$, すなわち

$$d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

のとき, 強度は主な極大となる。

実験では, 格子定数が既知の回折格子を使用し
てレーザー光の波長を求めるか, その逆に波長を
既知として格子定数を求めるのが普通である。

この実験用のソフトウェアでは,

- ・ 光の波長 λ
- ・ 格子定数 d
- ・ スリット幅 a
- ・ 回折格子とスクリーンの距離 λ
- ・ 原点の平行移動距離 $\Delta x, \Delta y$

が自由に設定でき, これらに応じて(1)式の強度
分布とそれを点の密度分布で表現した散布図 [文
献2] とを表示する (図4)。

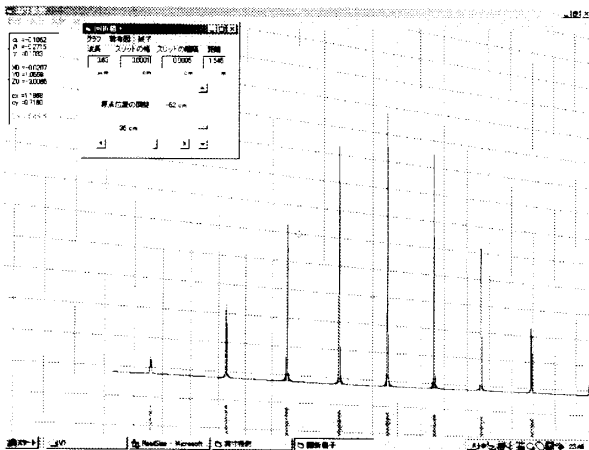


図4 回折格子の実験用画面

回折光の強度分布をグラフと散布図によりコンピュ
ータ画面に表示したところ。スクリーン上では, 縦横の線は鉛
直および水平に, 一目盛は10cmに投影される。

(3) システムの試行結果

この実験の場合は, 鉛直に垂れ下がったスク
リーンを用いることができる (図5)。このスク
リーン上の座標変換の決定に用いる点の位置に直
径5mmの小さなシールを貼り付け, このシールの
位置をマウスでクリックすることで座標変換式を
計算する。この計算は通常瞬時で終わり, 誤差は
設定どおり5mm未満になる。

シミュレーションの原点を, 実物のレーザー光
の中心スポットに移動させて, 強度分布のグラフ
と散布図を表示して, シミュレーションのパラ

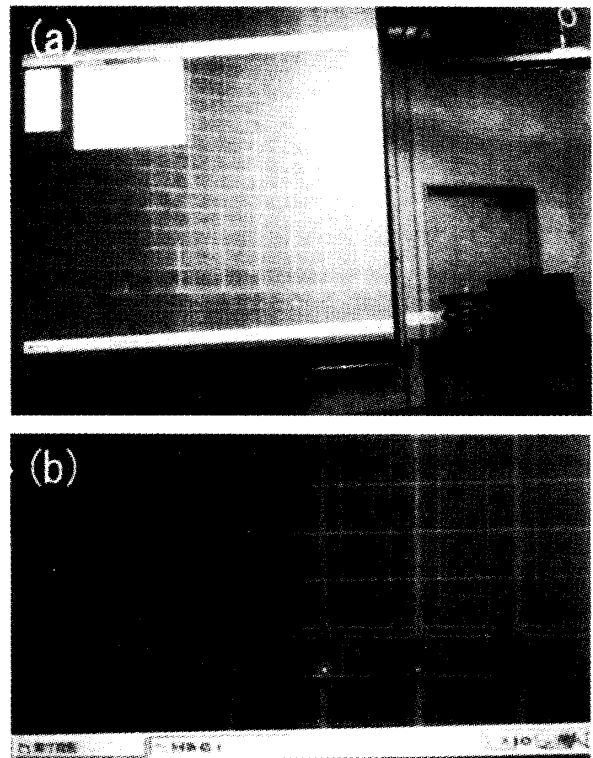


図5 本システムによる実験の写真
(a)全景 (b)部分

メータを実物と合うように設定する。この操作も
容易でごく短時間でできる。特に, 強度のグラフ
と散布図の両方が表示されることは, パラメータ
の調節には非常に有効であることがわかった。
また, 通常の実験では(2)式のみに基づいてデー
タを分析させるが, (1)式に現れる各スリットの
幅や, スリットの数についても大雑把な評価がで
きる。これは, 通常の実験と比べてはるかに優れ
ている点である。

全体に, 通常の学生実験よりもやや短い時間で
より定量的な結果が得られることがわかった。さ
まざまな回折格子を用いた実験を繰り返す場合に
は, 特に有効なシステムであると考えられる。

4. おわりに

本稿では, コンピュータによるシミュレーショ
ン画面をプロジェクタで実寸大に投影し, 物理学
実験と併用する方法を検討した。

実寸投影のためのソフトウェアでは, できるだ
け簡便に座標変換式が決定できるようにしたの
で, 新たな場所で実験を行う場合にも準備時間
は, 5分あれば十分であろう。すでにマークが付

けてある場所であれば、座標設定は数10秒で完了する。

回折格子の実験に応用した結果、以下の点が明らかになった。

- ・スクリーン上の実寸座標系は十分正確に設定できる。
- ・実験では見えない強度分布のグラフを重ねて表示することにより、通常の実験よりも豊富なイメージが得られ、より多くのパラメータについて分析することもできる。
- ・実験の精度を上げることは目標にしているシステムではあるが、学生実験と同程度以上の精度が得られる。その結果が、即座にわかることも大きな利点である。
- ・実験装置の他にコンピュータとプロジェクタも設置しなくてはならないので、その分時間はかかるが、同種の実験を繰り返す場合には、むしろ通常の実験よりも短時間で結果が出せる。

本システムの問題点や課題としては以下の点が挙げられる。

- ・どのような場面で使用するか
授業の中で行う従来型の演示実験としては、準備ための時間がかかりすぎるだろう。また、学生に操作を行わせることも可能だが、多数の受講者がいる学生実験の時間には不向きであろう。現在のところ、学生実験の事前説明の時間や授業で当該の現象について比較的詳しい説明をする場面で利用するのが有効ではないかと考えているが、さらに可能性を探りたい。
 - ・他の実験でも有効利用できるか
幾何光学の実験でも、目に見えない補助光線や像を表示するために利用できそうである。さらに、振り子や斜面上の落体運動など、動きのある現象にも応用できるかもしれない。
- 今後は、本システムのソフトウェアの改良を行いつつ、上記の課題に取り組む予定である。

本研究は、平成14年度教育研究活性化「教育学部プロジェクト」経費の補助を受けて実施されました。

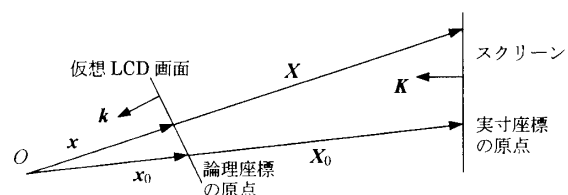
参考文献

- 1) 既存の投影変換ソフトウェアとしては、OpenGL や DirectX が普及しており、また Web ブラウザから利用できるものとして、初期の VRML を進化させたものが多数開発されている。後者については、例えば、脇田玲「Web3D の最前線」情報処理学会誌Vol.42, No.2, p.167(2001)に概説がある。プロジェクタを使用する本研究のシステムに比較的近いものとしては、没入型ディスプレイにより仮想現実空間を作るためのシステムがある。特に、一般の液晶プロジェクタを利用できるものとしては、岩田洋夫「全方位映像呈示」情報処理学会研究報告「コンピュータビジョンとイメージメディア」No.125-25(2000)などの報告がある。しかし、いずれも本研究のシステムに直接応用できるものではない。
- 2) 中川沙織, 鹿児島大学教育学部卒業研究「モンテカルロ法によるシミュレーション」(2003)

付 録 実寸投影のための座標変換式

ここでは、実寸座標系からコンピュータ画面の論理座標系への変換式的具体形を与えておく。論理座標系における原点は適当に選べるのが便利であるので、それに適した式を与えることにする。また、論理座標系の横(x)方向、縦(y)方向の単位も自由に選択できるようにする。

まず図1のLCD画面を、投影の中心(レンズの位置)に対して点対称な位置へ移動する(図A)。



図A コンピュータの論理座標とスクリーン上の実寸座標

そこで、図Aのように、投影の中心を原点Oとし、そこから仮想LCD画面の原点(任意)に至るベクトルを \mathbf{x}_0 、その延長とスクリーン上の点までのベクトルを \mathbf{X}_0 とし、 \mathbf{X}_0 をスクリーン面の原点とする。同様に、仮想LCD画面の任意の点に至るベクトルを \mathbf{x} 、その延長上のスクリーン上の点に至るベクトルを \mathbf{X} とする。すると、まず次式が成り立つ。

$$\mathbf{X}_0 = r_0 \mathbf{x}_0 \quad (\text{A-1})$$

$$\mathbf{X} = r \mathbf{x} \quad (\text{A-2})$$

ここで、 r_0 、 r はスカラーである。

また、仮想LCD画面の単位法線ベクトルを \mathbf{k} 、スクリーン画面のそれを \mathbf{K} とすると、各画面を含む面の式は、

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{k} = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{K} = 0 \quad (\text{A-4})$$

となる。

上記の式から r を消去すると、 \mathbf{x} と \mathbf{X} との関係式、

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}_0 \mathbf{K}}{\mathbf{x} \mathbf{K}} \mathbf{x} \quad (\text{A-5})$$

$$r_0 \mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}_0 \mathbf{k}}{\mathbf{X} \mathbf{k}} \mathbf{X} \quad (\text{A-6})$$

が得られる。これらを、各平面の原点からの相対位置ベクトル $\bar{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ 、 $\bar{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ で表すと、

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}_0 \mathbf{K}}{(r_0 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{X}_0) \mathbf{K}} (r_0 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0 \quad (\text{A-7})$$

$$r_0 \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{X}_0 \mathbf{k}}{(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_0) \mathbf{k}} (\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0 \quad (\text{A-8})$$

となる。

スクリーン面内の水平右向き単位ベクトルを \mathbf{I} 、鉛直上向き単位ベクトルを \mathbf{J} ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ は右手系)とすると、実寸座標は、

$$(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}) \equiv (\mathbf{X}\mathbf{I}, \mathbf{Y}\mathbf{J}) \quad (\text{A-9})$$

で表せる。

一方、コンピュータ画面内の論理座標には、単位の任意性も考慮しなければならない。仮想LCD画面内の横向き単位ベクトルを \mathbf{i} 、縦(上)向き単位ベクトルを \mathbf{j} ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は右手系)とすると、論理座標 (\tilde{x}, \tilde{y}) は、 $\tilde{x} \propto \bar{\mathbf{x}}\mathbf{i}$ 、 $\tilde{y} \propto \bar{\mathbf{y}}\mathbf{j}$ であり、この場合の比例定数は横方向、縦方向に

対して独立にとることができる。そこで、 r_0 はこの比例定数に含めて、

$$r_0 \bar{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} c_x \tilde{x} \\ c_y \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{c} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{c} \equiv \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix} \quad (\text{A-10})$$

とする。これは、 r_0 と縦横の比という2つのパラメータを c_x, c_y というパラメータに置き換えたことに相当する。

最後に、 $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ 座標系から $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 座標系へのEuler回転を考える。Euler角を α, β, γ とすると、回転行列 \mathbf{E} は以下ようになる。

$$\mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-11})$$

$$E_{11} = \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha,$$

$$E_{12} = -\cos \gamma \cos \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha,$$

$$E_{13} = \cos \gamma \sin \beta,$$

$$E_{21} = \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha,$$

$$E_{22} = -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha,$$

$$E_{23} = \sin \gamma \sin \beta,$$

$$E_{31} = -\sin \beta \cos \alpha,$$

$$E_{32} = \sin \beta \sin \alpha,$$

$$E_{33} = \cos \beta,$$

これを用いて基底ベクトルの変換は、

$$\mathbf{i} = E_{11} \mathbf{I} + E_{21} \mathbf{J} + E_{31} \mathbf{K},$$

$$\mathbf{j} = E_{12} \mathbf{I} + E_{22} \mathbf{J} + E_{32} \mathbf{K}, \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbf{k} = E_{13} \mathbf{I} + E_{23} \mathbf{J} + E_{33} \mathbf{K},$$

で与えられる。

(A-9) ~ (A-12)を用いると論理座標から実寸座標への変換式的具体形、

$$\bar{\mathbf{X}} \equiv \bar{\mathbf{X}}\mathbf{I} = Z_0 \frac{c_x \tilde{x} E_{11} + c_y \tilde{y} E_{12} + X_0}{c_x \tilde{x} E_{31} + c_y \tilde{y} E_{32} + Z_0} - X_0, \quad (\text{A-13})$$

$$\bar{\mathbf{Y}} \equiv \bar{\mathbf{X}}\mathbf{J} = Z_0 \frac{c_x \tilde{x} E_{21} + c_y \tilde{y} E_{22} + Y_0}{c_x \tilde{x} E_{31} + c_y \tilde{y} E_{32} + Z_0} - Y_0,$$

が得られる。ただし、

$$X_0 \equiv \mathbf{X}_0 \mathbf{I}, \quad Y_0 \equiv \mathbf{X}_0 \mathbf{J}, \quad Z_0 \equiv \mathbf{X}_0 \mathbf{K}$$

である。この変換式には、スクリーン座標系の原点と投影中心の相対位置を示す X_0, Y_0, Z_0 、2つの座標系間のEuler角 α, β, γ 、および論理座標の単位の自由度に対応する c_x, c_y という8つのパラメータが含まれる。

また、(A-13)の逆変換の式は、

$$\begin{aligned}
 c_x \tilde{x} &\equiv (\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x})\mathbf{i} \\
 &= \frac{(-Y_0 E_{32} + Z_0 E_{22})\bar{X} + (X_0 E_{32} - Z_0 E_{12})\bar{Y}}{(\bar{X} + X_0)E_{13} + (\bar{Y} + Y_0)E_{23} + Z_0 E_{33}}, \\
 &\hspace{15em} (\text{A-14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_y \tilde{y} &\equiv (\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x})\mathbf{j} \\
 &= \frac{(Y_0 E_{31} - Z_0 E_{21})\bar{X} + (-X_0 E_{31} + Z_0 E_{11})\bar{Y}}{(\bar{X} + X_0)E_{13} + (\bar{Y} + Y_0)E_{23} + Z_0 E_{33}}
 \end{aligned}$$

となる。