3-方陣に関する一注意

鹿児島大学理学部紀要（数学・物理学・化学），
No. 15, p. 33–41, 1982

3–方陣に関する一注意

富樫　昭*・藤野　精一**

(1982年9月10日受理)

A Remark on 3–Square

Akira Togasi and Seiiti Huzino

Abstract

In this paper we show that 3-square is unique if we regard all squares that become the same one by turning out or turning back symmetrically as the same kind of squares. And, by preparing a computer program, we can ascertain the fact.

（要旨） 魔方陣の中で，3行3列のいわゆる3–方陣は，裏返しにしたり，対称に折返してできるものは，もとの方陣と同じものとみなせばただ1通りであることがわかる。このことを普通の数学的証明の手続きで証明するとともに，コンピュータの一つのプログラムを作成して，たて，よこ，ななめの和がすべて15であるすべての場合を列挙することによってもそれ以外にはないことが示されることをのべる。

魔方陣 (magic square) というのは，たてとよこのます目の等しい正方形を用意して，その $n\times n$ 個のます目の中に，1から n^2 までの数を1つずつ入れて，たて，よこ，ななめのいずれの和も

$$\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

に等しくしたものである。和は $\sum_{k=1}^{n^2} k$ の各行に対する平均値

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k$$

の値である。$n=3$ のとき3–方陣，$n=4$ のとき4–方陣という。方陣では，裏返したり，対角線に対称なものは同じものとする。3–方陣はたとえば次の図1がそうである。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

図 1

ところで，裏返しにしたものや，対称なものはすべてもとの方陣と同じものとみなすという規定をもうけると，3–方陣はここに書いたもののほかにない。このことは次のように示される。まず次の命題1を用意しよう。

---

* Akira Togasi (Department of Mathematics, Kagoshima University)
** Seiiti Huzino (Department of Mathematics, Kyushu University)

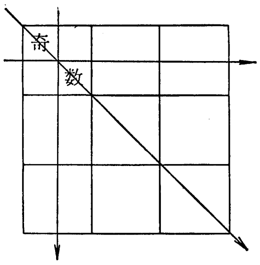

図 2

命題 1　3–方陣の 4 隅の数は偶数である。

証明　証明は背理法による。いま 3–方陣の 4 隅の数のうち，いずれか 1 つが奇数であるとする。一般性を失うことなく，奇数の入った 1 隅を左上隅にとることにする。方陣の特性から，左上隅を含む第 1 行，第 1 列，主対角線上の数の和はいずれも 15 でなければならない（図 2)。15 は奇数であるから，1 行目，1 列目，主対角線上の，左上隅をはぶいた残りの 2 つのます目に入る数の和はいずれも偶数でなければならない。2 数の和が偶数である場合は

偶数＋偶数,
奇数＋奇数

の 2 通りの場合がある。ここで使用できる偶数は 2, 4, 6, 8 の 4 個であるから，上の 6 個のます目を全部偶数でうずめることはできない。したがって，第 1 行，第 1 列，主対角線のいずれかが奇数 2 個でうずめられる。いま，それを第 1 行としよう（図 3)。奇数は 1, 3, 5, 7, 9 の 5 個であるから，図 3 のように第 1 行に左上の奇数とあわせて 3 個使用すると，使用できる残りの奇数は 2 個である。この 2 個の奇数は，各列の和が 15 という奇数にならなければならないので，おのおの別の列に 1 つずつ入れることはできない。もしそうすれば，第 1 行の奇数とあわせて，その列の数は奇数 2 個，偶数 1 個となり，その和が偶数となるからである。したがって，2 個の奇数はいずれかの列に同時に入る。しかし，図 4(a), (b), (c) に示すように，どの列に入れても，それに対して主対角線，副対角線のいずれかのななめの列が奇数 2 個，

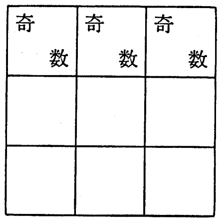

図 3

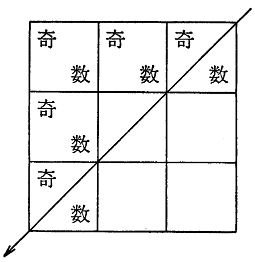

図 4 (a)

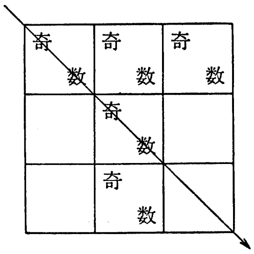

図 4 (b)

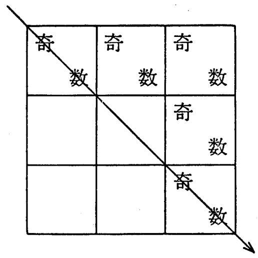

図 4 (c)

偶数 1 個となり，その和は偶数となる。これは方陣であることに矛盾する。よって，この場合，3–方陣の 4 隅は偶数である。第 1 列の残りの 2 ますが奇数の場合も同様に考えられる。

主対角線の残りの 2 ますの中の数が奇数の場合を考えよう（図 5)。このとき，5 個の奇数のうち 3 個を使用したことになるから，残りの奇数は 2 個である。この 2 個の奇数は図 5 の残りのます目のどこに入れても，行か列のすくなくとも 1 つが，奇数 2 個，偶数 1 個となり，したがってその和が奇数とはならない。これは 3–方陣であることに矛盾する。よって命題は証明された。　(証明終)

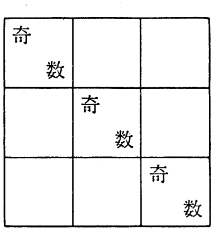

図 5

3–方陣の 4 隅の数が偶数であることは命題 1 で判明したが，さらに，次の結果が得られる。

命題 2　3–方陣の相対するななめの2隅の数の組合わせは2と8, 4と6, すなわち, 3–方陣の相対するななめの2隅のます目の数の和は10である。

証明　命題1により3–方陣の4隅の数はいずれも偶数であることがわかった。一般性を失うことなく, この方陣の左上隅の数を2としよう。このとき, 右下隅のます目の数は8である。何となれば, 3–方陣の条件として, 主対角線上と, 副対角線上の数の和はいずれも15とならなければならない。中央のます目に入れられた数はどちらの対角線上の数の和にも共通に使用されるから, 対角線上の残りの2数の和は同じでなければならない。すなわち, 2, 4, 6, 8の組み合わせでは 2+8=4+6(=10) 以外にはない。　(証明終)

左上隅のます目に2を入れた場合の4隅の数の配置は, 図6と図7の2通りである。このお

2		4
6		8

図 6

2		6
4		8

図 7

2	9	4
7	5	3
6	1	8

図 8 (a)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

図 8 (b)

のおのに対して3–方陣の条件である和が15ということを使用すれば, 他のます目の数は図8(a), (b)のように一意に決定される。

図8(b)は図8(a)を, その主対角線に関して対称に折り返したものである。方陣の規約により, これは一種類とみなされる。左上隅のます目の数が2以外の4, 6, 8の場合はいずれも, 以上の議論からわかるように, 図8(a), 8(b)の方陣から対角線で折り返したり, 裏返したりしてできる。以上の結果をまとめると, 次の結論を得る。

定理 3　3–方陣は一種類である。

3–方陣が一種類であることはコンピュータを使用すれば次のようにたしかめることができる。それは, プログラムで, 1から9の数を適当に使用した3行3列の行列の中で, たて, よこ, ななめの和がいずれも15となる場合をすべてあげて, その中に3–方陣が存在することをたしかめ, それら3–方陣が方陣の規約に従って1種類であることをたしかめればよい。それには, 図9のように1から9までの整数値を動く未知数 x_i (i=1～9) を定めて, 方陣の主要条件である, たて, よこ, ななめの和が15であるという方程式を作る。それは次のようになる。

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

図 9

$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3=15, & (1)\\
x_4+x_5+x_6=15, & (2)\\
x_7+x_8+x_9=15, & (3)\\
x_1+x_4+x_7=15, & (4)\\
x_2+x_5+x_8=15, & (5)\\
x_3+x_6+x_9=15, & (6)\\
x_1+x_5+x_9=15, & (7)\\
x_3+x_5+x_7=15. & (8)
\end{cases}
$$

未知数の個数が9個，方程式の数が8個であるから，これだけでも1個の未知数は自由にとれる。ここでは，この連立一次方程式をみたす解のうち，$x_i\,(i=1\sim9)$ が 1～9 の整数値をとるものをすべてとりあげねばならないので，次のように考えて解く：

x_1, x_2, x_4, x_5 をそれぞれ 1～9 の間を動かすとそれぞれに対して (1), (2), (4), (5) より x_3, x_6, x_7, x_8 が定まる。

$$
\begin{cases}
x_3=15-(x_1+x_2), & (9)\\
x_6=15-(x_4+x_5), & (10)\\
x_7=15-(x_1+x_4), & (11)\\
x_8=15-(x_2+x_5). & (12)
\end{cases}
$$

(11), (12) より得られた x_7 ,x_8 より (3) を使用して x_9 を定める。

$$x_9=15-(x_7+x_8) \qquad (13)$$

このようにして定まった値が (6), (7), (8) を満足しないならば，このことがわかった時点で計算を中止し，もとにかえり，はじめの x_1, x_2, x_4, x_5 の値をつぎつぎに1つずつ動かして，以上の計算をくり返す。このようにして (1)～(8) をすべて満足する数の組が求まれば，それをつぎつぎと出力する。

上の計算を実行するプログラムは次のように作成される。

```
      INTEGER X(9)
      M=15
      DO 10 IA=1,9
      X(1)=IA
      DO 20 IB=1,9
      X(2)=IB
       X(3)=M-(X(1)+X(2))
       DO 30 ID=1,9
        X(4)=ID
         DO 40 IE=1,9
          X(5)=IE
           X(6)=M-(X(4)+X(5))
            X(7)=M-(X(1)+X(4))
            IF(X(3)+X(5)+X(7).NE.M) GO TO 40
             X(8)=M-(X(2)+X(5))
             X(9)=M-(X(7)+X(8))
             IF(X(3)+X(6)+X(9).NE.M) GO TO 40
              IF(X(1)+X(5)+X(9).NE.M) GO TO 40
               WRITE(6,600)( X(I),I=1,9)
600            FORMAT(1H ,3I5)
               WRITE(6,601)
601            FORMAT(1H0)
 40      CONTINUE
 30    CONTINUE
 20   CONTINUE
 10   CONTINUE
      STOP
      END
```

ここでプログラミング言語として FORTRAN を使用したので，x_i は $X(I)$ で表示し，$M=15$ として 15 の代りに M を使用した。

でてきた結果を整理すると次のようになる。まず，条件を満す行列は全部で 41 個であることがわかる。これらの行列の中にふくまれる数字の種類と個数による分類をすると次のようになる。

(a) 1 数のみ使用した行列…(5) 型

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) 3 数使用した行列 …(1, 5, 9) 型, (2, 8, 5) 型, (3, 5, 7) 型, (4, 6, 5) 型

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) 5 数使用した行列 …(1, 3, 5, 7, 9) 型, (3, 4, 5, 6, 7) 型

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(d) 7 数使用した行列 …(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) 型

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(e) 9 数使用した行列 …(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) 型

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

（ここで例にあげた行列と対称なもの，裏返してできる行列はかかげなかった）

また，41 個の行列を，左上隅の (1,1) 要素の数値で分類すると次表のようになる：

表 1

	(イ)	(ロ)	(ハ)	(ニ)	(ホ)	(ヘ)	(ト)	(チ)	(リ)
行列の (1, 1) 要素の数値	1	2	3	4	5	6	7	8	9
該当する行列の個数	1	3	5	7	9	7	5	3	1

(イ)と(リ)，(ロ)と(チ)，(ハ)と(ト)，(ニ)と(ヘ)の各行列がそれぞれ副対角線対称となっているので対にした各組の行列の個数は同一となっている。この 41 個の行列は次の性質をもっている。

命題 4 上の 41 個の行列の第 (2, 2) 要素は 5 である。

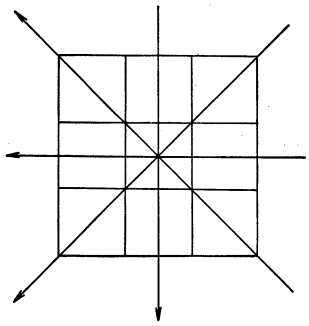

図 10

証明　(2, 2) 要素をふくむ主対角線，副対角線，第2行，第2列の数の和はいずれも15である (図10)。したがって，この4つの場合の数の総和は 60(=15×4) である。ところが一方 (2, 2) 要素を x とすると，x は上の4つの場合にそれぞれ1回ずつ，計4回使用され，他の要素はいずれかの場合に1回ずつ使用されている。ということは，この4つの場合の数の総和は，見方を変えると，第1行，第2行，第3行の数の和 (15×3) に (2, 2) 要素を3回余分に使用したときの和を加えた総和に等しい。よって，

$$3x+45=60$$

$$\therefore\quad x=5$$

（証明終）

この命題により，さきにのべた命題1の証明は，ずっと容易になることがわかる。証明は背理法による。詳細は省略する。

さて，コンピュータで印刷されるすべての3–方陣は次の8個である。

(i)　左上隅の数が2のもの　　　　…2個

$$\begin{pmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{pmatrix}$$

(ii)　左上隅の数が4のもの　　　　…2個

$$\begin{pmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}$$

(iii)　左上隅の数が6のもの　　　　…2個

$$\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{pmatrix}$$

(iv)　左上隅の数が8のもの　　　　…2個

$$\begin{pmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{pmatrix}$$

ここで行列

$$\begin{pmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{pmatrix}$$

を3–方陣の原型とみなすとき，上にあげた8個の方陣は，この原型に次の操作をして得られる。

(1)　何もしない　　　　　　…原型

(2)　$\dfrac{\pi}{2}$回転する　　　　…$\begin{pmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{pmatrix}$

(3) $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転する $\cdots\begin{pmatrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{pmatrix}$

(4) 第2列を軸にして
たてに裏返す $\cdots\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}$

(5) 第2行を軸にして
よこに裏返す $\cdots\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}$

(6) 第2列を軸にして
たてに裏返して $\dfrac{\pi}{2}$ 回転する $\cdots\begin{pmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{pmatrix}$
(すなわち，主対角線対称)

(7) 第2列を軸にして
たてに裏返して $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転する $\cdots\begin{pmatrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{pmatrix}$
(すなわち，副対角線対称)

(8) 第2列を軸にして
たてに裏返し，さらに
第2行を軸にしてよこに裏返す $\cdots\begin{pmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{pmatrix}$
(すなわち π 回転する)

以上の操作で得られるものは一つとみなすという方陣の規定により，3–方陣は一種類であるということをのべた定理3は，上のようにコンピュータによって条件を満すすべての場合を列挙することによって示すことができた。

最後に結果を見やすい形に出力するプログラムをかかげる。本質的な点は前にかかげたプログラムと変わらないが，結果を，左上隅の値が一致するものを1行にまとめたものである。囲いをつけたものが3–方陣である。原型が最初に現われ，その変型がつづいて現われている。

```
      INTEGER X(9),XX(3,27)
      M=15
      DO 10 IA=1,9
      K1=0
      K2=0
      X(1)=IA
      DO 30 IC=1,9
      X(3)=IC
      IF(X(1)+X(3).GE.M) GO TO 11
       X(2)=M-(X(1)+X(3))
       DO 70 IG=1,9
       X(7)=IG
       IF(X(1)+X(7).GE.M) GO TO 30
        X(4)=M-(X(1)+X(7))
        IF(X(3)+X(7).GE.M) GO TO 30
         X(5)=M-(X(3)+X(7))
         IF(X(4)+X(5).GE.M) GO TO 70
          X(6)=M-(X(4)+X(5))
          IF(X(2)+X(5).GE.M) GO TO 70
           X(8)=M-(X(2)+X(5))
           IF(X(3)+X(6).GE.M) GO TO 70
            X(9)=M-(X(3)+X(6))
            IF(X(1)+X(5)+X(9).NE.M) GO TO 70
             IF(X(7)+X(8)+X(9).NE.M) GO TO 70
              I1=1
              J1=0
              DO 241 IJ=1,9
              J1=J1+1
              XX(K1+I1,K2+J1)=X(IJ)
              IF(J1.LT.3) GO TO 241
              J1=0
              I1=I1+1
241           CONTINUE
              K2=K2+3
 70    CONTINUE
 30   CONTINUE
 11   CONTINUE
      WRITE(6,601)
601   FORMAT(1H0)
      DO 55 I=1,3
 55   WRITE(6,600)(XX(I,J),J=1,K2)
600   FORMAT(1H ,9(3I2,2X))
 10   CONTINUE
      STOP
      END
```

$$\begin{matrix}1&9&5\\9&5&1\\5&1&9\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{matrix}}\quad\begin{matrix}2&8&5\\8&5&2\\5&2&8\end{matrix}\quad\boxed{\begin{matrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}3&9&3\\5&5&5\\7&1&7\end{matrix}\quad\begin{matrix}3&8&4\\6&5&4\\6&2&7\end{matrix}\quad\begin{matrix}3&7&5\\7&5&3\\5&3&7\end{matrix}\quad\begin{matrix}3&6&6\\8&5&2\\4&4&7\end{matrix}\quad\begin{matrix}3&5&7\\9&5&1\\3&5&7\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{matrix}}\quad\begin{matrix}4&8&3\\4&5&6\\7&2&6\end{matrix}\quad\begin{matrix}4&7&4\\5&5&5\\6&3&6\end{matrix}\quad\begin{matrix}4&6&5\\6&5&4\\5&4&6\end{matrix}\quad\begin{matrix}4&5&6\\7&5&3\\4&5&6\end{matrix}\quad\begin{matrix}4&4&7\\8&5&2\\3&6&6\end{matrix}\quad\boxed{\begin{matrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}5&9&1\\1&5&9\\9&1&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&8&2\\2&5&8\\8&2&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&7&3\\3&5&7\\7&3&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&6&4\\4&5&6\\6&4&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&4&6\\6&5&4\\4&6&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&3&7\\7&5&3\\3&7&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&2&8\\8&5&2\\2&8&5\end{matrix}\quad\begin{matrix}5&1&9\\9&5&1\\1&9&5\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{matrix}}\quad\begin{matrix}6&6&3\\2&5&8\\7&4&4\end{matrix}\quad\begin{matrix}6&5&4\\3&5&7\\6&5&4\end{matrix}\quad\begin{matrix}6&4&5\\4&5&6\\5&6&4\end{matrix}\quad\begin{matrix}6&3&6\\5&5&5\\4&7&4\end{matrix}\quad\begin{matrix}6&2&7\\6&5&4\\3&8&4\end{matrix}\quad\boxed{\begin{matrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}7&5&3\\1&5&9\\7&5&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}7&4&4\\2&5&8\\6&6&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}7&3&5\\3&5&7\\5&7&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}7&2&6\\4&5&6\\4&8&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}7&1&7\\5&5&5\\3&9&3\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{matrix}}\quad\begin{matrix}8&2&5\\2&5&8\\5&8&2\end{matrix}\quad\boxed{\begin{matrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}9&1&5\\1&5&9\\5&9&1\end{matrix}$$