オーダーが p_1, p_2 の二つの quantiles Z_{p1} と Z_{p2} の同時分布について（こゝに $p_1<p_2$）

On the joint distribution of two quantiles Z_{p1} and Z_{p2}, of orders p_1 and p_2, where $p_1<p_2$.

木　下　卓　馬
Takuma KINOSHITA

1. Zp_1 と Zp_2 の同時密度函數

分布函数 F(x), 密度函数 $f(x)=F'(x)$ の連続な型の一次元の分布から取つた n 個の sample を考える。$\zeta=\zeta_{pi}$ (i = 1, 2) は order が p_i である分布の quantiles を示すものとする。即ち $F(\zeta)=p_i$ の根である。ここに $0<p_i<1$.

密度函数 f(x) は $x=\zeta_{pi}$ の近傍で連続で, 連続な導函数 $f'(x)$ を持つているものとする。更に sample の quantile を Z_{pi} で表す。もし np_i が整数でないならば, sampleの値を大きさの順に並べて,

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots\cdots\cdots \leqq x_n$$

とすると, sample の値 $x_{\mu i+1}$ に等しい只一つの quantile Z_{pi} がある。ここに $\mu_i=[np_i]$ は $\leqq np_i$ であるような最大の整数を表す。もし np_i が整数ならば不定の場合で, Z_{pi} は区間 (x_{npi}, x_{npi+1}) の任意の値をとる。ここでは np_i が整数でないとする。

確率変数 $Z'=Z_{p1}$ と $Z''=Z_{p2}$ の同時密度函数を $h(x', x'')$ で表す。Z' が微小区間 $(x', x'+dx')$ に落ち, Z'' が微小区間 $(x'', x''+dx'')$ に落ちる確率素分 $h(x', x'')dx'dx''$ は, n 個の sample の値の中で, $\mu=[np_1]<x'$, $\nu=[n-np_2]>x''+dx''$ で, $n-\mu-\nu-2$ は区間 $(x'+dx', x'')$ に, 残りの二つは夫々区間 $(x', x'+dx')$, $(x'', x''+dx'')$ に落ちる確率に等しいから

$$(1.1)\quad h(x',x'')dx'\,dx''=\frac{n\,!}{\mu\,!\,\nu\,!\,(n-\mu-\nu-2)\,!}\Big(F(x')\Big)^{\mu}\Big\{F(x'')-F(x')\Big\}^{n-\mu-\nu-2}\Big\{1-F(x'')\Big\}^{\nu}f(x')\,f(x'')\,dx'\,dx''$$

2. n が非常に大きいとき, $Z'=Z_{p1}$ と $Z''=Z_{p2}$ の同時分布

今

$$(2.1)\quad Y'=\sqrt{\frac{n}{p_1 q_1}}\,f(\zeta')(Z'-\zeta')$$

$$Y''=\sqrt{\frac{n}{p_2 q_2}}\,f(\zeta'')(Z''-\zeta'')$$

ここに $\zeta'=\zeta_{p1}$, $\zeta''=\zeta_{p2}$, $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$ とおけば,

$$\frac{\partial(Z',Z'')}{\partial(y',y'')}=\frac{\sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2}}{n}\;\frac{1}{f(\zeta')f(\zeta'')}$$

であるから，Y' と Y'' の同時密度函数 $q(y', y'')$ は

$$(2.2)\quad q(y', y'') = h(x', x'')\frac{\sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2}}{n}\frac{1}{f(\zeta')f(\zeta'')}$$

$$= \frac{n!}{\mu!\,\nu!\,(n-\mu-\nu-2)!}\frac{\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}}{nf(\zeta')f(\zeta'')}\Big(F(x')\Big)^{\mu}\Big\{F(x'') - F(x')\Big\}^{n-\mu-\nu-2}$$

$$\Big\{1 - F(x'')\Big\}^{\nu} f(x')f(x'') = A_1 A_2 A_3$$

ここに $x' = \sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n}}\dfrac{y'}{f(\zeta')} + \zeta'$

$$x'' = \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n}}\frac{y''}{f(\zeta'')} + \zeta''$$

$$A_1 = \frac{n!}{\mu!\,\nu!\,(n-\mu-\nu-2)!}\frac{\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}}{n}\,p_1^{\mu}(p_2 - p_1)^{n-\mu-\nu-2}q_2^{\nu}$$

$$A_2 = \Big(\frac{F(x')}{p_1}\Big)^{\mu}\Big\{\frac{F(x'') - F(x')}{p_2 - p_1}\Big\}^{n-\mu-\nu-2}\Big\{\frac{1 - F(x'')}{q_2}\Big\}^{\nu}$$

$$A_3 = \frac{f(x')}{f(\zeta')}\frac{f(x'')}{f(\zeta'')}$$

$n\to\infty$ のときの A_1 の値を求める為に対数をとれば

$$\log A_1 = \log n! + \tfrac{1}{2}\log(p_1 p_2 q_1 q_2) + \mu\log p_1 + (n-\mu-\nu-2)\log(p_2 - p_1) + \nu\log q_2$$
$$- \log\mu! - \log\nu! - \log(n-\mu-\nu-2)! - \log n$$
$$= (n + \tfrac{1}{2})\log n - n + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \eta_n + \tfrac{1}{2}\log(p_1 p_2 q_1 q_2) + \mu\log p_1$$
$$+ (n-\mu-\nu-2)\log(p_2 - p_1) + \nu\log q_2 - (\mu + \tfrac{1}{2})\log\mu + \mu - \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$
$$+ \eta'_n - (\nu + \tfrac{1}{2})\log\nu + \nu - \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \eta_n' - (n-\mu-\nu-\tfrac{3}{2})\log(n-\mu-\nu-2)$$
$$+ (n-\mu-\nu-2) - \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \eta'''_n - \log n$$

ここに $n\to\infty$ のとき $\eta_n, \eta_n', \eta_n'''$ は夫々 0 に収束する。

$\mu = [np_1] = np_1 + \varepsilon_1,\quad \nu = [nq_2] = nq_2 + \varepsilon_2$ とおけば

$$= (n + \tfrac{1}{2})\log n - n - \log(2\pi) + \tfrac{1}{2}\log(p_1 p_2 q_1 q_2) + (np_1 + \varepsilon_1)\log p_1 + (nq_1 - nq_2$$
$$- 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\log(p_2 - p_1)$$
$$+ (nq_2 + \varepsilon_2)\log q_2 - (np_1 + \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2})\log(np_1 + \varepsilon_1) + (np_1 + \varepsilon_1) - (nq_2 + \varepsilon_2 + \tfrac{1}{2})\log$$
$$(nq_2 + \varepsilon_2)$$
$$+ (nq_2 + \varepsilon_2) - (nq_1 - nq_2 - \tfrac{3}{2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\log(nq_1 - nq_2 - 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$
$$+ (nq_1 - nq_2 - 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \log n + \eta_n + \eta_n' + \eta_n'' + \eta_n'''$$
$$= (n + \tfrac{1}{2})\log n - \log(2\pi) + \tfrac{1}{2}\log(p_1 p_2 q_1 q_2) + (np_1 + \varepsilon_1)\log p_1$$
$$+ (nq_1 - nq_2 - 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\log(p_2 - p_1) + (nq_2 + \varepsilon_2)\log q_2$$
$$- (np_1 + \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2})\Big(\log n + \log p_1 + \frac{\varepsilon_1}{np_1} + 0(\frac{1}{n^2})\Big) + \varepsilon_1$$
$$-(nq_2 + \varepsilon_2 + \tfrac{1}{2})\Big(\log n + \log q_2 + \frac{\varepsilon_2}{nq_2} + 0(\frac{1}{n^2})\Big) + \varepsilon_2$$
$$- (nq_1 - nq_2 - \tfrac{3}{2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\Big\{\log n + \log(p_2 - p_1) - \frac{2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{n}\frac{1}{p_2 - p_1} + 0(\frac{1}{n^2})\Big\}$$

$$-2-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\log n+\eta_n+\eta_n'+\eta_n''+\eta_n'''$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log A_1=-\log 2\pi+\tfrac{1}{2}\log(p_2q_1)-\tfrac{1}{2}\log(p_2-p_1)=\log\frac{\sqrt{p_2q_1}}{2\pi\sqrt{p_2-p_1}}$$

$$(2.3)\quad \therefore\ A_1\to\frac{\sqrt{p_2q_1}}{2\pi\sqrt{p_2-p_1}}\qquad(n\to\infty)$$

次に $A_2=\left(\frac{F(t')}{p_1}\right)^{\mu}\left\{\frac{F(t'')-F(t')}{p_2-p_1}\right\}^{n-\mu-\nu-2}\left\{\frac{1-F(t'')}{q_2}\right\}^{\nu}$

の両辺の対数をとれば

$$\log A_2=\mu\log\frac{F(t')}{p_1}+(n-\mu-\nu-2)\log\frac{F(t'')-F(t')}{p_2-p_1}+\nu\log\frac{1-F(t'')}{q_2}$$

然るに

$$\frac{F(t')}{p_1}=\frac{F\left(\zeta'+\sqrt{\frac{p_1q_1}{n}}\frac{y'}{f(\zeta')}\right)}{p_1}=1+y'\sqrt{\frac{q_1}{np_1}}+\tfrac{1}{2}y'^2\frac{q_1}{n}\frac{f(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{F(t'')-F(t')}{p_2-p_1}=1+\frac{y''\sqrt{p_2q_2}-y'\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}+\frac{1}{2n(p_2-p_1)}\left\{y''^2p_2q_2\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}\right.$$
$$\left.-y'^2p_1q_1\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}\right\}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1-F(t'')}{q_2}=1-y''\sqrt{\frac{p_2}{nq_2}}-\tfrac{1}{2}y''\frac{p_2}{n}\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるから

$$\log\frac{F(t')}{p_1}=\log\left\{1+y'\sqrt{\frac{q_1}{np_1}}+\tfrac{1}{2}y'^2\frac{q_1}{n}\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{\frac{q_1}{np_1}}\,y'+\tfrac{1}{2}\left(\frac{q_1}{n}\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\frac{q_1}{np_1}\right)y'^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\left(\frac{F(t'')-F(t')}{p_2-p_1}\right)=-\frac{\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}y'+\frac{\sqrt{p_2q_2}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}y''+\tfrac{1}{2}\left(-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}\right.$$
$$\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}y'^2-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)^2}y'^2+2y'y''\frac{\sqrt{p_1q_1p_2q_2}}{n(p_2-p_1)^2}+\frac{p_2q_2}{n(p_2-p_1)}\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}y'^2-$$
$$\left.\frac{p_2q_2}{n(p_2-p_1)^2}y''^2\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\left(\frac{1-F(t'')}{q_2}\right)=-\sqrt{\frac{p_2}{nq_2}}\,y''-\tfrac{1}{2}\left(\frac{p_2}{n}\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}+\frac{p_2}{nq_2}\right)y''^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log A_2=(np_1+\varepsilon_1)\left\{\sqrt{\frac{q_1}{np_1}}\,y'+\tfrac{1}{2}\left(\frac{q_1}{n}\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\frac{q_1}{np_1}\right)y'^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$+(nq_1-nq_2-2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left\{-\frac{\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}y'+\frac{\sqrt{p_2q_2}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}y''\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}y'^2-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}y'^2+2y'y''\frac{\sqrt{p_1q_1p_2q_2}}{n(p_2-q_1)^2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{p_2q_2}{n(p_2-p_1)}\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}y''^2-\frac{p_2q_2}{n(p_2-p_1)}y''^2\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$+(nq_2+\varepsilon_2)\left\{-\sqrt{\frac{p_2}{nq_2}}\,y''-\tfrac{1}{2}\left(\frac{p_2}{n}\frac{f'(\zeta)}{\{f(\zeta'')\}^2}+\frac{p_2}{nq_2}\right)y''+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

y' の項： $(np_1+\varepsilon_1)\sqrt{\dfrac{q_1}{np_1}}+(nq_1-nq_2-2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(-\dfrac{\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{n}\,(p_2-p_1)}\right)$

$$=\sqrt{n}\,\sqrt{p_1q_1}+\varepsilon_1\frac{\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{np_1}}-\sqrt{n}\,\sqrt{p_1q_1}+\frac{(2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{p_1q_1}}{\sqrt{2}\,(P_2-P_1)}\to 0\ (n\to\infty)$$

y″ の項： $\frac{1}{2}\Big\{\Big(\dfrac{q_1}{n}\dfrac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\dfrac{q_1}{np_1}\Big)(np_1+\varepsilon_1)+(nq_1-nq_2-2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$

$$\times\Big(-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)^2}\Big)\Big\}\to-\frac{p_2q_1}{2(p_2-p_1)}\quad(n\to\infty)$$

y'^2 の項： $\frac{1}{2}\Big\{\Big(\dfrac{q_1}{n}\dfrac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\dfrac{q_1}{np_1}(np_1+\varepsilon_1)+(nq_1-nq_2-2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$

$$\times\Big(-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}\cdot\frac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta')\}^2}-\frac{p_1q_1}{n(p_2-p_1)}\Big)\Big\}\longrightarrow-\frac{p_2q_1}{2(p_2-p_1)}\quad(n\to\infty)$$

$y'y''$ の項： $\dfrac{\sqrt{p_1q_1p_2q_2}}{p_2-p_1}$

y''^2の項： $\frac{1}{2}\Big\{p_2q_2\dfrac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}-\dfrac{p_2q_2(2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{n(p_2-p_1)}\dfrac{f'(\zeta')}{\{f(\zeta'')\}^2}-\dfrac{p_2q_2}{p_2-p_1}$

$$+\frac{(2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)p_2q_2}{n(p_2-p_1)}-p_2q_2\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}-p_2$$

$$-\varepsilon\Big(\frac{p_2}{n}\frac{f'(\zeta'')}{\{f(\zeta'')\}^2}+\frac{p_2}{nq_2}\Big)\Big\}\to-\frac{p_2q_1}{2(p_2-p_1)}\quad(n-\infty)$$

故に

(2.4)　$$\lim_{n\to\infty}A_2=\exp\Big\{-\frac{p_2q_1}{2(p_2-p_1)}\Big(y'^2-2\sqrt{\frac{p_1q_2}{p_2q_1}}\,y'y''+y''^2\Big)\Big\}$$

又

$$A_3=\frac{f(x')}{f(\zeta')}\frac{f(x'')}{f(\zeta'')}$$

$$=\frac{f\Big(\zeta'+\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n}}\dfrac{y'}{f(\zeta')}\Big)}{f(\zeta')}\ \frac{f\Big(\zeta''+\sqrt{\dfrac{p_2q_2}{n}}\dfrac{y''}{f(\zeta'')}\Big)}{f(\zeta'')}$$

$$=\frac{f(\zeta')+\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n}}\dfrac{y'}{f(\zeta')}\cdot f''\Big(\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n}}\dfrac{\theta_1y'}{f(\zeta')}+\zeta'\Big)}{f(\zeta')}\ \cdot$$

$$\frac{f(\zeta'')+\sqrt{\dfrac{p_2q_2}{n}}\dfrac{y''}{f(\zeta'')}f'\Big(\zeta''+\sqrt{\dfrac{p_2q_2}{n}}\dfrac{\theta_2y''}{f(\zeta'')}\Big)}{f(\zeta'')}$$

$$(0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1)$$

故に

(2.5)　$A_3\to 1\quad(n\to\infty)$

以上から

(2.6)　$$\lim_{n\to\infty}q(y,'y'')=\frac{\sqrt{p_2q_1}}{2\pi\sqrt{p_2-p_1}}e^{-\frac{p_2q_1}{2(p_2-p_1)}\left(y'^2-2\sqrt{\frac{p_1q_2}{p_2q_1}}\,y'y''+y''^2\right)}$$

故に Z′. Z″ の同時分布は asymptotically normal である。そして，limiting normal distribution の平均は ζ' と ζ'' で，この平均の周りの second order moments $\mu_2(Z')$, $\mu_{11}(Z', Z'')$, $\mu_2(Z'')$ の asymptotic expressions は夫々 $\frac{p_1 q_1}{nf^2(\zeta')}$, $\frac{p_1 q_2}{nf(\zeta')f(\zeta'')}$, $\frac{p_2 q_2}{nf^2(\zeta'')}$ である事がわかる。

文　献

Harald CRAMER : Mathematical methods of Statistics (1946)