外積方程式系のCompleteの条件(Ⅱ)

一 柳 宣 男

第1報[2]において、外積方程式系の complete[1]の条件について考察し、k—complete の概念を得、k＝2，r＝2の場合の判定条件を得た。本報では r＝2の場合を考察し、つぎの定理を証明する。第1報における記号、定義等はそのまま用いる。

定理． Vの2次元部分空間がⅡ₂型であるための必要十分条件はつぎの i)，ii)，iii) が成立することである。

i) すべての添数に対して $\triangle=0$

ii) 添数 $(i_0 j_0)$ のなかに等しいものの対が (p＋1) 個以上ある場合〔注1〕、任意の添数 $(i_1 j_1)$ に対して $\phi^{(i_0 j_0)}{}_{(i_1 j_1)}=0$

iii) 等しいものの対がp個ある或る添数 (i j) に対して $\phi^{(ij)(ij)}<0$

定理の条件が必要であることは容易に判る。即ち与えられたⅡ₂型の部分空間がつぎの性質を満たすとする：同じものの対が (p＋1) 個以上ある添数 (i j) に対して $H^{12}_{(ij)}$ はすべて零、同じものの対がp個ある或る添数 (i j) に対して $H^{12}_{(ij)}$ は零でない。このとき定理の条件が満たされることは明らかだから以下十分であることを証明する。

Plücker 座標に関する性質

定理の証明に必要な Plücker 座標に関する性質について考察する。J.A.Schouten[4]に従い、和に関してつぎの簡約記号を用いる。

$$A_{\cdots[j_1\cdots j_k]\cdots}=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}A_{\cdots j_l j_1\cdots \hat{j}_l\cdots j_k\cdots}$$

命題1.

(1) $H^{\alpha\beta}_{i_1\cdots i_k[j_1,\, j_2\cdots j_k]}\equiv H^{\alpha\beta}_{j_1\cdots j_k[i_1,\, i_2\cdots i_k]}$

k＝2の場合更に

(2) $H^{\alpha\beta}_{ijh,\,l}\equiv -H^{\alpha\beta}_{ijl,\,h}$

が成立する。

証明．$H^{\alpha\alpha}_{\cdots} = 2H^{\alpha}_{\cdots}$の場合直接計算して容易に確かめ得る。一般の場合ベクトル（$X^{\alpha}_{\cdots} + X^{\beta}_{\cdots}$）の成分に対するPlücker座標の条件式$H_{\cdots} = H^{\alpha}_{\cdots} + H^{\alpha\beta}_{\cdots} + H^{\beta}_{\cdots}$に上述の結果を適用すればよい。

補題1． Ｖの２次元部分空間がつぎの条件を満たすとする。

ｉ）すべての添数に対して　$\triangle = 0$

ii）$X^{1}_{i_1 \cdots i_k} \neq 0$，$X^{2}_{i_0 j_1 \cdots j_{k-1}} \neq 0$

iii）添数（i j）のなかに等しいものがあれば $H^{12}_{(ij)} = 0$

このとき

(3) $$H^{12}_{j_l i_1 \cdots i_k, i_0 j_1 \cdots \hat{j}_l \cdots j_{k-1}} = (-1)^{l} H^{12}_{i_0 \cdots i_k, j_1 \cdots j_{k-1}} \qquad (l=1, \cdots, k-1)$$

(4) $$H^{12}_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{k-1}, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_k} = (-1)^{s+1} H^{12}_{i_0 \cdots i_k, j_1 \cdots j_{k-1}} \qquad (s=1, \cdots, k)$$

が成立する。〔注２〕

証明．假定ｉ）のもとで任意の添数に対して

(5) $$H^{12}_{i_0 \cdots i_k, l_1 \cdots l_{k-2} [j_0} X_{j_1 \cdots j_k]} + H^{12}_{j_0 \cdots j_k, l_1 \cdots l_{k-2} [i_0} X_{i_1 \cdots i_k]} = 0$$

が成立する。〔注３〕

$H^{12}_{\cdots}$，$X_{\cdots}$のかわりに$H^{\alpha}_{\cdots}$，$X^{\alpha}_{\cdots}$を代入すれば(5)式は$X^{\alpha}_{\cdots}$に関する恒等式となる（第1報(6)式）。この恒等式の$X^{\alpha}_{\cdots}$のところに（$X^{1}_{\cdots} + X^{2}_{\cdots}$）及び（$X^{1}_{\cdots} - X^{2}_{\cdots}$）を代入し、第１報(5)式を用いて計算すればよい。

この(5)式及び假定iii）より

$$H^{12}_{j_l i_1 \quad k, j_1 \cdots \hat{j}_l \cdots j_{k-1} i_0} X^{1}_{i1 \cdots i_k} + H^{12}_{i_0 \cdots i_k, j_1 \cdots \hat{j}_l \cdots j_{k-1} j_l} X^{1}_{i_1 \cdots i_k} = 0$$

假定ii）を用いて(3)式を得る。同様に

$$H^{12}_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{k-1}, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_k} X^{2}_{i_0 j_1 \cdots j_{k-1}} + (-1)^{l-s-1} H^{12}_{i_l i_0 j_1 \cdots j_{k-1}, i_1 \cdots \hat{i}_l \cdots i_k} X^{2}_{i_0 j_1 \cdots j_{k-1}} = 0$$

假定ii）より

$$(-1)^{s} H^{12}_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{k-1}, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_k} = H \quad （一定）$$

なることが判るから、命題１の(1)式及び(3)式を用いて

$$-k\ H = k\ H^{12}_{i_0 \cdots i_k, j_1 \cdots j_{k-1}}$$

を得、(4)式を得る。

Plücker　座標の判定条件としてつぎの性質はよく知られている。[3)]

命題2.　添数に対して歪対称なすべては零でない$N={}_nC_k$個の実数の組　$\{X_{i_1\cdots i_k}\}$　がPlücker座標なるための必要十分条件は、或る$X_{j_1\cdots j_k}\neq 0$なる添数の組$(j_1\cdots j_k)$に対して

$$X_{[i_0\cdots i_{k-1}}X_{i_k]j_1\cdots\hat{j_l}\cdots j_k}=0 \qquad (l=1,\cdots,k)$$

が成立することである。ここに$(i_0\cdots i_k)$はすべての添数を動くものとする。

定　理　の　証　明　1

補題2.　Vの２次元部分空間において、添数$(i\,j)$に対して$H^1_{(i\,j)}=H^2_{(i\,j)}=H^{12}_{(i\,j)}=0$なるための必要十分条件は、任意の添数$(i_1\,j_1)$に対して　$\Phi^{(i\,j)}_{(i_1\,j_1)}=0$
なることである。

証明．第１報定理１の証明と同様。

定理の假定iii）を満たす添数を

$$(i\,j)=(i_0\cdots i_h t_1\cdots t_p,\ j_1\cdots j_{h-1}t_1\cdots t_p) \qquad (h+p=k)$$

とする。λ，μを任意の実数とするときベクトル$(\lambda X^1_{\cdots}+\mu X^2_{\cdots})$の成分がPlücker座標なるための条件は、任意の添数に対して

$$H_{\cdots}=\lambda^2 H^1_{\cdots}+\lambda\mu H^{12}_{\cdots}+\mu^2 H^2_{\cdots}=0$$

特に$H_{(i\,j)}=0$を考えると、この方程式の判別式Dは$D=-\frac{1}{2}\Phi^{(ij)\,(ij)}$で定理の假定iii)より正、したがって異なる２組の実根を持つ。この方向をgeneratorに取り、このgeneratorを改めて$(X^1_{\cdots})$，$(X^2_{\cdots})$とすると

$$H^1_{(i\,j)}=0,\quad H^2_{(i\,j)}=0,\quad H^{12}_{(i\,j)}\neq 0$$

である。ここで

$$X^1_{i_1\cdots i_h t_1\cdots t_p}\neq 0, \qquad X^2_{i_0 j_1\cdots j_{h-1}t_1\cdots t_p}\neq 0$$

と假定して一般性を失なわない。

本節ではp＝０の場合、次節でp≧１の場合を考察し、このgeneratorの成分がPlücker座標であることを示す。以下定理の假定は常に満たされているものとする。

補題3.

(6)　$$H_{j_l i_1\cdots i_h,\ i_0 j_1\cdots\hat{j_l}\cdots j_{h-1}}=0 \qquad (l=1,\cdots,h-1)$$

$$(7)\quad H_{i_s\, i_0 j_1 \cdots j_{h-1},\; i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h} = 0 \qquad (s=1,\ \cdots,\ h)$$

である。〔注4〕

証明．補題2を用いて補題1と同様に証明される。

系． νを任意の添数とするとき$s=1,\ \cdots,\ h$に対して

$$(8)\quad H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1},\; i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots \hat{i}_m \cdots i_h\, \nu} = 0 \qquad (s \neq m)$$

$$(9)\quad H_{i_0 \cdots i_h,\; i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots \hat{i}_m \cdots i_h\, \nu} = 0 \qquad (s \neq m)$$

$$(10)\quad H_{j_l\, i_1 \cdots i_h,\; i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots \hat{i}_m \cdots i_h\, \nu} = 0 \qquad (s \neq m)\quad (l=1,\ \cdots,\ h-1)$$

が成立する。

証明．$h=2$のとき第1報定理2の証明1)より。$h \geqq 3$のとき(9)，(10)式は補題2より明らかである。(8)式は第1報(5)，(6)式、補題3の(7)式、補題2より導かれるつぎの関係式からいえる。

$$H_{i_s\, i_0 j_1 \cdots j_{h-1},\; i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots \hat{i}_m \cdots i_h\, \nu} X^1{}_{i_1 \cdots i_h} = 0$$

さて、$\nu \cdots \xi$を任意の添数とするとき(8)，(9)，(10)式及び第1報(5)，(6)式より

$$H_{\nu \cdots \xi,\; i_3 \cdots i_h [i_1} X^1{}_{i_0\, j_1 \cdots j_{h-1}]} = 0$$

$$H_{\nu \cdots \xi,\; i_3 \cdots i_h [i_2} X^1{}_{i_0\, j_1 \cdots j_{h-1}]} = 0$$

$$H_{\nu \cdots \xi,\; i_3 \cdots i_h [i_0} X^1{}_{i_1 \cdots i_h]} = 0$$

$$H_{\nu \cdots \xi,\; i_3 \cdots i_h [j_l} X^1{}_{i_1 \cdots i_h]} = 0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ h-1)$$

今これらを$H_{\nu \cdots \xi,\; i_3 \cdots i_h \tau}$（$\tau = i_1,\ i_2,\ i_0,\ j_l$）に関する連立方程式と考えると係数の行列として

$$X^1 = \begin{pmatrix} X_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1}} & 0 & -X_{i_1 j_1 \cdots j_{h-1}} & \cdots & (-1)^l X_{i_0 i_1 j_1 \cdots \hat{j} \cdots j_{h-1}} & \cdots \\ 0 & X_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1}} & -X_{i_2\ 1 \cdots j_{h-1}} & \cdots & (-1)^l X_{i_0 i_2 j_1 \cdots \hat{j}_l \cdots j_{h-1}} & \cdots \\ -X_{i_0 i_2 i_3 \cdots i_h} & X_{i_0 i_1 i_3 \cdots i_h} & X_{i_1 \cdots i_h} & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \\ -X_{j_l i_2 i_3 \cdots} & X_{j_l i_1 i_3 \cdots i_h} & \cdot & 0 & X_{i_1 \cdots i_h} & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を得る。〔注5〕

同様に（$X^2_{\cdots}$）について係数の行列X^2 を得る。λ, μ を任意の実数とするとき〔注6〕

$$|\lambda X^1 + \mu X^2| = -\lambda^2 \mu^2 (\lambda X^1_{i_1 \cdots i_h} + \mu X^2_{i_1 \cdots i_h})^{h-2}$$

$$\times H^{12}_{i_1 i_0 j_1 \cdots i_{h-1}, i_2 i_3 \cdots i_h} H^{12}_{i_2 i_0 j_1 \cdots j_{h-1}, i_1 i_3 \cdots i_h}$$

$X^1_{i_1 \cdots i_h} \fallingdotseq 0$及び補題1より適当な$\lambda$, μに対してこの値は零でない。即ち連立方程式の係数の行列の階数は$h+2$、したがって$H_{\nu \cdots \xi, i_3 \cdots i_h \tau}$はすべて零である。

同様にして$H_{\nu \cdots \xi, i_2 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \tau} = 0$が示される。命題2の$X_{j_1 \cdots j_k}$として$X^1_{i_1 \cdots i_h}$をとれば$\{X^1_{\nu \cdots \xi}\}$がPlücker座標であることが判る。

補題1の(4)式及び補題3の(7)式より、$X^2_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1}}$の添数をつけかえて$X^2_{i_1 \cdots i_h}$と考えれば、同様にして$\{X^2_{\nu \cdots \xi}\}$がPlücker座標であることが判る。

定　理　の　証　明　Ⅲ

$p \geqq 1$のとき、前節と同様にして任意の添数$\nu \cdots \xi$に対して

(11)　$H_{\nu \cdots \xi, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h t_1 \cdots t_p} = 0$　　$(s = 1, \cdots, h)$

が成立する。以下$p = 1$の場合を考察する。$p > 1$の場合も同様に証明される。

補題4.

(12)　$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t, i_1 \cdots i_h} = 0$　　$(s = 1, \cdots, h)$　〔注7〕

証明. 第1報(5), (6)式に命題1の(2)式, (11)式を適用して

$$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [i_s} X^1_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1}]t} = 0$$

$$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [i_0} X^1_{i_1 \cdots i_h]t} = 0$$

$$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [j_l} X^1_{i_1 \cdots i_h]t} = 0 \qquad (l = 1, \cdots, h-1)$$

今これらを

$$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t, i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \tau} \qquad (\tau = i_s, i_0, j_l)$$

に関する連立方程式と考えると係数の行列として

$$
Y^1 = \begin{pmatrix}
X_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t} & -X_{i_s j_1 \cdots j_{h-1} t} & \cdots & (-1)^l X_{i_0 i_s j_1 \cdots \hat{j}_l \cdots j_{h-1} t} & \cdots \\
(-1)^s X_{i_0 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h t} & X_{i_1 \cdots i_h t} & & O & \\
\vdots & & \ddots & & \\
(-1)^s X_{j_l i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h t} & & O & X_{i_1 \cdots i_h t} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

を得る。〔注5〕

同様に（$X^2_{\cdots}$）について係数の行列Y^2を得る。λ, μ を任意の実数とするとき

$$
|\lambda Y^1 + \mu Y^2| = (-1)^{s-1} \lambda \mu (\lambda X^1_{i_1 \cdots i_h t} + \mu X^2_{i_1 \cdots i_h t})^{h-1}
$$

$$
\times H^{12}_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h t}
$$

$X^1_{i_1 \cdots i_h t} \neq 0$ 及び補題1より適当なλ, μに対してこの値は零でない。即ち、連立方程式の係数の行列の階数は h＋1 、したがって$H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \tau}$はすべて零である。

系. ν を任意の添数とするときs＝1，…，hに対して

(13) $H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \nu} = 0$

(14) $H_{i_0 i_1 \cdots i_h t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \nu} = 0$

(15) $H_{j_l i_1 \cdots i_h t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \nu} = 0$　　　　(l＝1，…，h—1)

が成立する。

証明．(14)，(15)式は命題1の(2)式及び(11)式より明らかである。(13)式は第1報(5)，(6)式、命題1の(2)式、(11)，(12)式より導かれるつぎの関係式からいえる。

$$
H_{i_s i_0 j_1 \cdots j_{h-1} t,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h \nu} X^1_{i_1 \cdots i_h t} = 0
$$

さて、$\nu \cdots \xi$ を任意の添数とするとき第1報(5)，(6)式、補題4の系、(11)式より

$$
H_{\nu \cdots \xi,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [i_s} X_{i_0 j_1 \cdots j_{h-1}] t} = 0
$$

$$
H_{\nu \cdots \xi,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [i_0} X_{i_1 \cdots i_h] t} = 0
$$

$$
H_{\nu \cdots \xi,\ i_1 \cdots \hat{i}_s \cdots i_h [j_l} X_{i_1 \cdots i_h] t} = 0
$$

なる関係式が得られ、補題4の証明と同様にして

$$(16)\quad H_{\nu\cdots\xi,\ i_1\cdots i_h}=0$$

を得る。

(11), (16)式より命題2における$X_{j_1\cdots j_k}$として$X^1_{i_1\cdots i_h t}$（≒0）を取れば$\{X^1_{\nu\cdots\xi}\}$がPlücker座標なることが判る。

前節の終りに注意したことにより同様にして$\{X^2_{\nu\cdots\xi}\}$がPlücker座標なることを知る。

（1966年10月15日受理）

注

1. $(i_0\, j_0)$ はiii）の添数の等しいものの対をすべて含む場合に限定してよい。（定理の十分条件の証明で、ii）の仮定はこの場合しか使っていない）
2. $k=2$の場合は命題1の(2)式より明らか。
3. $X_{\cdots}$は$X^1_{\cdots}$又は$X^2_{\cdots}$を表わす。以下同様。
4. $H_{\cdots}$は$H^1_{\cdots}$又は$H^2_{\cdots}$を表わす。以下同様。
5. $X^1_{\cdots}$と書くべきところを$X_{\cdots}$と書いた。
6. $|\lambda X^1+\mu X^2|$はつぎに示す$|X^1|$の計算と同様に計算される。第1行に$X^1_{i_1\cdots i_h}$を乗じ、第3行以下に適当な数を乗じて第1行から引き、第1行の第3成分以下を消去する。第2行について同様の操作を行なうと、補題2より

$$|X^1|=-(X^1_{i_1\cdots i_h})^{h-2}H^1_{i_1 i_0 j_1\cdots j_{h-1},\ i_2 i_3\cdots i_h}\times H^1_{i_2 i_0 j_1\cdots j_{h-1},\ i_1 i_3\cdots i_h}$$

7. $h=2$の場合は命題1の(2)式及び(11)式より明らか。

文　　献

1. E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques, Hermann, Paris (1945), 28.
2. 一柳宣男，外積方程式系のCompleteの条件：Ｉ，広島女子短大研究紀要，15(1964)，25—29.
3. W.V.D.Hodge & D.Pedoe, Methods of algebraic geometry：Ｉ, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1947)，312—315.
4. J.A.Schouten & W.v.d.Kulk, Pfaff's problem and its generalizations, Oxford Univ. Press, Oxford (1949)，9.

Summary

Conditions of a Complete System of Exterior Equations (Ⅱ)

Nobuo Hitotsuyanagi

The Faculty of Education, Kagoshima University

The present paper is a sequel to the previous one[2], in which the author attempted to find the conditions that a system of exterior equations be complete.[1]

Regarding the Plücker coordinates of a k—dimensional subspace in n-dimensional real vector space as the components of a vector in N-dimensional real vector space V ($N = n\,C\,k$), we obtain the subset G of V which corresponds to the system of all k-dimensional subspaces. As we have seen in the previous paper,[2] by linealizing the system of exterior equations, our problem is reduced to the following : Which r-dimensional subspaces S in V are generated by a subset of G ?

The present paper deals with the case where $r = 2$, and by means of the Plücker coordinates of S in V our problem is solved in this special case (Theorem) .