

イノベーション理論に基づく線形連続確率システムの 新しい同定手法について

中 森 誠 一

On New Identification Procedure of Linear Continuous Stochastic System
based on the Innovations Theory

Seiichi NAKAMORI

1. はじめに

信号の状態空間モデルから信号の自己共分散関数を導出する過程は、容易に理解できる¹⁾。しかしながら、自己共分散関数から信号の状態空間モデルを同定する問題は、複雑で難解である²⁾。信号のフィルタ推定値を求めるフィルタ方程式は、信号の状態方程式の一つの実現である。推定問題において著名な Kalman フィルタの方程式がイノベーション過程を含む形で表され、信号の状態空間モデルの実現であることは良く知られている³⁾。共分散情報を使用した線形フィルタ³⁾は、方程式の中にイノベーション過程を含んでおり、Kalman フィルタの場合と同様に、信号の状態空間モデルの実現となっている。筆者は、さきに信号と雑音の共分散情報を使用して、線形連続時間確率システムにおける状態空間モデルを同定するアルゴリズムを提案した⁴⁾。文献 4) では、観測行列は単位行列として、システム行列、制御行列が精度良く推定された。しかしながら、文献 4) の問題設定を拡張して、アナログ信号 $x(t)$ に線形変調をかけて伝送するときは、信号に乗ずる観測行列 (図 1 参照) を単位行列ではなく、一般的に $H(t)$ と表示する必要がある¹⁾。本論文では、以下の諸仮定のもとで、共分散情報を使用して、システム行列、制御行列、観測行列を同定する新しいアルゴリズムを提案する。

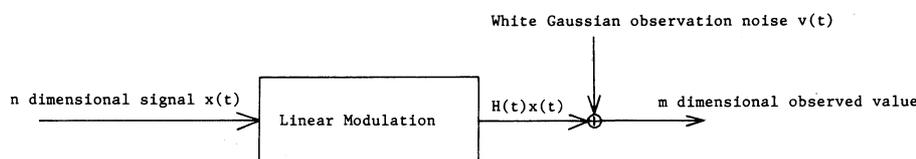


図 1 信号伝達のブロック線図

- (1) 定常確率的あるいは非定常確率的信号 $x(t)$ の期待値は、ゼロとする。
- (2) 信号の状態空間モデルへの白色ガウス雑音入力の分散と白色ガウス観測雑音の分散は、既知と

する。

(3) 確率過程 $z(t)$ の自己共分散関数は, semi-degenerate 核³⁾表示される。

(4) 入力信号 $x(t)$ と観測値 $y(t)$ との相互共分散関数も semi-degenerate 核表示される。

文献4) と本論文との相違点を含めて, 本論文の研究内容は, 次のように要約される。

(1) 文献4) では, 共分散情報を使用した線形連続時間フィルタ³⁾と基礎的な推定理論⁵⁾から, 同定アルゴリズムを導出している。これに対して, 本論文では, イノベーション理論に基づき⁶⁾ イノベーション過程の統計的性質を利用して, 文献4) とは全く異なる同定アルゴリズムを提案する。イノベーション過程は, $\hat{z}(t)$ を $z(t)$ のフィルタ推定値, $y(t)$ を観測値とすると, $y(t) - \hat{z}(t)$ と表される。ここに, $\hat{z}(t)$ は文献3) のフィルタ・アルゴリズムにより計算される。

(2) 本論文では, 信号推定の立場から, イノベーション理論と共分散情報による線形連続時間フィルタ³⁾を参考にしながら, 信号 $x(t)$ を推定するシーケンシャルなアルゴリズムも導出する。このフィルタ・アルゴリズムの中には観測行列 $H(t)$ が含まれるが, 観測行列は本稿の同定アルゴリズムにより推定する。

(3) 文献4) では, 観測行列は単位行列としたが, 本稿では, より一般的に $H(t)$ と表示する。

(4) 線形時不変連続確率システムにおいて, $x(t)$ の自己共分散関数の上限を求めるアルゴリズムは, P. Faurre により導出された²⁾ フィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ の自己共分散関数は, $x(t)$ の自己共分散関数の下限となることが知られている²⁾ 本論文では, この下限を計算するシーケンシャル・アルゴリズムも示す。

最後に, 本稿で提案したアルゴリズムの妥当性を調べるために, 状態方程式の時変パラメータと, $x(t)$ および $z(t)$ を推定する数値計算シミュレーション例を示す。

2. 線形確率システムの最小自乗推定問題

次の線形確率システムを考えよう。

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad z(t) = H(t)x(t) \quad (2)$$

ここに, $x(t)$ は n 次元で期待値ゼロの定常あるいは非定常確率的信号, $A(t)$ はシステム行列, $B(t)$ は $n \times r$ の制御行列, $H(t)$ は $m \times n$ の観測行列である。また, $u(t)$ は期待値ゼロで分散 $Q(t)$ の白色ガウス雑音入力, $v(t)$ は期待値ゼロで分散 $R(t)$ の白色ガウス観測雑音である。

$$E[u(t)u^T(s)] = Q(t)\delta(t-s) \quad (3)$$

$$E[v(t)v^T(s)] = R(t)\delta(t-s) \quad (4)$$

$$E[v(t)u^T(s)] = 0 \quad (5)$$

ここに, $\delta(\cdot)$ は Dirac の δ 関数, $Q(t)$, $R(t)$ はそれぞれ $r \times r$, $m \times m$ の対称正定値行列である。また, 信号 $x(t)$ と白色ガウス雑音 $u(t)$, 信号 $x(t)$ と白色ガウス観測雑音 $v(t)$ は, それぞれ統計

的に独立とする。

$$E[x(t) u^T(s)] = 0 \quad (6)$$

$$E[x(t) v^T(s)] = 0 \quad (7)$$

$x(t)$ のフィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ が次の式で与えられるものとする。

$$\hat{x}(t) = \int_0^t g(t, s) v(s) ds \quad (8)$$

ここに、 $v(s)$ は次式で表されるイノベーション過程である。

$$v(s) = y(s) - \hat{z}(s) \quad (9)$$

(9)式において、 $\hat{z}(s)$ は $z(s)$ のフィルタ推定値を表し、観測値の線形積分変換により

$$\hat{z}(t) = \int_0^t h(t, s) y(s) ds \quad (10)$$

と記されるものとする。

$x(t)$ の最適フィルタ推定値を求めるために、評価関数

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t))] \quad (11)$$

を最小にする問題を直交射影の原理⁵⁾に従って次のように考える。 $x(t)$ のフィルタ推定誤差 $x(t) - \hat{x}(t)$ がイノベーション過程 $v(s)$ と直交するという性質

$$E[(x(t) - \hat{x}(t)) v^T(s)] = 0, \quad 0 < s < t \quad (12)$$

と、イノベーション過程は白色雑音で、その分散は $R(t)$ であることから、

$$\begin{aligned} E[x(t) v^T(s)] &= E[\hat{x}(t) v^T(s)] \\ &= E\left[\int_0^t g(t, x) v(x) v^T(s) dx\right] \\ &= g(t, s) R(s) \end{aligned}$$

の関係式が得られる。これより(8)式的最適インパルス応答関数は、

$$g(t, s) = E[x(t) v^T(s)] R^{-1}(s) \quad (13)$$

と表される。すなわち、 $g(t, s)$ を計算するには、 $E[x(t) v^T(s)]$ を求める式を導出する必要がある。これについては、第4節で考察する。

さて、(10)式で表される $z(t)$ のフィルタ推定値の最適性を考慮するために、評価関数

$$J' = E[(z(t) - \hat{z}(t))^T (z(t) - \hat{z}(t))] \quad (14)$$

を最小にするような $\hat{z}(t)$ を最適なフィルタ推定値とする。直交射影の原理より、周知の Wiener-Hopf 積分方程式⁵⁾

$$E[z(t) y^T(s)] = \int_0^t h(t, x) E[y(x) y^T(s)] dx \quad (15)$$

が得られる。(2), (4), (7)式と $z(t)$ の自己共分散関数 $K_z(t, s) = E[z(t) z^T(s)]$ の表示から、最適インパルス応答関数の満足するボルテラ型第2種の積分方程式

$$h(t, s) R(s) = K_z(t, s) - \int_0^t h(t, x) K_z(x, s) dx \quad (16)$$

を得る。 $z(t)$ の最適なフィルタ推定値を求めるアルゴリズム³⁾は、第3節で掲げる。

第3節以下の推定理論あるいは同定理論において、信号 $x(t)$ と観測値 $y(s)$ との相互共分散関数 $K_{xy}(t, s)$ 、信号 $z(t)$ の自己共分散関数 $K_z(t, s)$ は、いずれも semi-degenerate 核を用いて(17)式と(18)式

で与えられる。 $A(t)$, $B(s)$, $C(t)$, $D(s)$ は, それぞれ $n \times l$, $m \times l$, $n \times i$, $m \times i$ の有界な行列である。 $X(t)$ と $Y(s)$ は, $m \times j$ の有界な行列とする。ここに, n , l , m , i と j は任意の正の整数とする。

$$K_{xy}(t, s) = \begin{cases} A(t)B^T(s), & 0 \leq s \leq t \\ C(t)D^T(s), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \quad (17)$$

$$K_z(t, s) = \begin{cases} X(t)Y^T(s), & 0 \leq s \leq t \\ Y(t)X^T(s), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \quad (18)$$

3. $z(t)$ の最適フィルタ・アルゴリズム³⁾

図1の信号 $z(t)$ の自己共分散関数が(18)式の semi-degenerate 核で表示されるときに, (16)式のボルテラ型第2種積分方程式と(10)式から出発して, $z(t)$ の最適なフィルタ推定値を計算するシーケンシャル・アルゴリズムは, 文献3) で既に導出している。また, 最適なインパルス応答関数 $h(t, s)$ を求めるアルゴリズムも示した³⁾ これらのアルゴリズムは, $x(t)$ の最適フィルタ問題や確率システムのパラメータ同定問題を解くための準備として必要である。 $z(t)$ の最適フィルタ・アルゴリズムと最適インパルス応答関数のアルゴリズムを[定理1]に示す。

[定理1]

信号 $z(t)$ の自己共分散関数が(18)式の semi-degenerate 核の形で表されるときに, $z(t)$ の最適フィルタ推定値 $\hat{z}(t)$ と最適インパルス応答関数 $h(t, s)$ は, 以下のアルゴリズムによりシーケンシャルに計算される³⁾

$$\hat{z}(t) = X(t) e(t) \quad (\text{最適フィルタ推定値}) \quad (19)$$

$$de(t)/dt = J(t, t) (y(t) - \hat{z}(t)) \quad (20)$$

(初期条件: $e(0) = 0$)

$$J(t, t) R(t) = (Y^T(t) - r(t) X^T(t)) \quad (21)$$

$$dr(t)/dt = J(t, t) (Y(t) - X(t) r(t)) \quad (22)$$

(初期条件: $r(0) = 0$)

$$h(t, s) = X(t) J(t, s) \quad (\text{最適インパルス応答関数}) \quad (23)$$

$$\partial J(t, s) / \partial t = -J(t, t) h(t, s) \quad (24)$$

(初期条件: $J(0, s) = Y^T(s) R^{-1}(s)$)

[定理1]のフィルタ・アルゴリズムが著名な Kalman フィルタと異なる点を列挙してみよう。

- (1) Kalman フィルタは状態空間モデル, 観測値, 状態空間モデルへの入力雑音の分散, 観測雑音の分散の情報を必要とするのに対して, [定理1]のフィルタは観測値, 観測雑音の分散, semi-degenerate 核表示された $z(t)$ の自己共分散関数 (18)式参照) の情報を使用している。 $z(t)$ の自己共分散関数は, 観測値の自己共分散関数から白色観測雑音の分散を差し引いて得られるので, $z(t)$

の自己共分散関数を有界な行列 $X(t)$, $Y(s)$ により(18)式のように偶関数表示することができる。このように, [定理1]のフィルタは, Kalman フィルタよりも比較的入手し易い情報から $z(t)$ の最適フィルタ推定値を計算できる。

4. イノベーション理論による $x(t)$ の最適フィルタ

(8)式で $x(t)$ のフィルタ推定値が与えられたときに, インパルス応答関数 $g(t, s)$ は, (13)式より $g(t, s) = E[x(t) v^T(s)] R^{-1}(s)$ のように記された。まず, [定理2] では, $g(t, s)$ を求めるアルゴリズムを示す。

[定理2]

信号 $x(t)$ と観測値 $y(s)$ との相互共分散関数が(17)式により, 信号 $z(t)$ の自己共分散関数が(18)式で表されるときに, (8)式のフィルタ推定値を求める最適なインパルス応答関数 $g(t, s)$ は, 次のアルゴリズムによりシーケンシャルに計算される。

$$g(t, s) = (A(t) B^T(s) - A(t) q^T(s) X(s)) R^{-1}(s) \quad (25)$$

$$dq(t)/dt = J(t, t) (B(t) - X(t) q(t)) \quad (26)$$

(初期条件: $q(0) = 0$)

$$J(t, t) R(t) = (Y^T(t) - r(t) X^T(t)) \quad (27)$$

$$dr(t)/dt = J(t, t) (Y(t) - X(t) r(t)) \quad (28)$$

(初期条件: $r(0) = 0$)

(証明)

仮定により白色ガウス観測雑音の分散 $R(t)$ は既知としているので, 統計量 $E[x(t) v^T(s)]$ がわかると, (13)式から $g(t, s)$ を計算できる。(9)式のイノベーション過程 $v(s)$, および(10)式のフィルタ推定値 $\hat{z}(t)$ の表現を考慮すると, $E[x(t) v^T(s)]$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} E[x(t) v^T(s)] &= E[x(t) (y(s) - \hat{z}(s))^T] \\ &= K_{xy}(t, s) - \int_0^s E[x(t) y^T(\tau)] h^T(s, \tau) d\tau \\ &= K_{xy}(t, s) - \int_0^s K_{xy}(t, \tau) h^T(s, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

(12)式の直交射影の原理は $0 < s < t$ の場合に成立するので, 直交射影の原理から導かれる(13)式の $g(t, s)$ の式も勿論この不等式を満たすはずである。 $K_{xy}(t, s)$ は(17)式の semi-degenerate 核により表示されるので, 関数

$$q(s) = \int_0^s J(s, \tau) B(\tau) d\tau \quad (30)$$

を導入すると, (29)式は

$$E[x(t) v^T(s)] = A(t) B^T(s) - A(t) q^T(s) X^T(s) \quad (31)$$

となり, (13)式と(31)式から(25)式が得られる。

(30)式を t で微分すると,

$$dq(t)/dt = J(t, t) B(t) + \int_0^t \partial J(t, x) / \partial t B(\tau) d\tau \quad (32)$$

が得られる。(32)式に(23), (24)式を代入して, (30)式を使用すると,

$$dq(t)/dt = J(t, t) (B(t) - X(t) q(t)) \quad (33)$$

となり, (26)式が求められる。(26)式の $q(t)$ の微分方程式の時刻 $t=0$ における初期条件は, (30)式から $j \times l$ のゼロ行列である。

さて, (27)式は(21)式に, (28)式は(22)式に等しい。よって, [定理 2] は証明された。(Q. E. D.)

次に, [定理 2] のアルゴリズムを用いて, 信号 $x(t)$ を推定する最適なフィルタ・アルゴリズムを導出しよう。

[定理 3]

信号 $x(t)$ と観測値 $y(s)$ との相互共分散関数が(17)式により, 信号 $z(t)$ の自己共分散関数が(18)式で表されるときに, 信号 $x(t)$ の最適フィルタ推定値を求めるシーケンシャル・アルゴリズムは, 次のようになる。

$$\hat{x}(t) = A(t) f(t) \quad (34)$$

$$df(t)/dt = (B^T(t) - q^T(t) X^T(t)) R^{-1}(t) (y(t) - \hat{z}(t)) \quad (35)$$

(初期条件: $f(0) = 0$)

$$dq(t)/dt = J(t, t) (B(t) - X(t) q(t)) \quad (36)$$

(初期条件: $q(0) = 0$)

$$J(t, t) R(t) = (Y^T(t) - r(t) X^T(t)) \quad (37)$$

$$dr(t)/dt = J(t, t) (Y(t) - X(t) r(t)) \quad (38)$$

(初期条件: $r(0) = 0$)

(証明)

$x(t)$ のフィルタ推定値は(8)式により, 最適なインパルス応答関数 $g(t, s)$ は(25)式で与えられるので, (25)式を(8)式に代入して,

$$\hat{x}(t) = \int_0^t A(t) (B^T(s) - q^T(s) X^T(s)) R^{-1}(s) v(s) ds \quad (39)$$

が得られる。関数

$$f(t) = \int_0^t (B^T(s) - q^T(s) X^T(s)) R^{-1}(s) v(s) ds \quad (40)$$

を導入すると, 最適な $x(t)$ のフィルタ推定値は

$$\hat{x}(t) = A(t) f(t) \quad (41)$$

と表される。(40)式にイノベーション過程を表す(9)式を代入して得られる式を t で微分すると, (35)式が求められる。(35)式の微分方程式の $t=0$ における初期条件は, (40)式より $l \times l$ のゼロベクトルである。また, (37)式と(38)式は, それぞれ(21), (22)式に等しい。よって, [定理 3] が証明された。(Q. E. D.)

第 5 節では, 信号 $x(t)$ のフィルタ推定誤差共分散関数を求めるシーケンシャルなアルゴリズムのほか, 本論文の主題である同定問題に関する重要な結果と, それらの導出方法を説明する。

5. $A(t)$ の同定アルゴリズム

まず、システム行列 $A(t)$ を同定するアルゴリズムを [定理 4] に示す。

[定理 4]

(1)式の信号 $x(t)$ の状態方程式において、最適インパルス応答関数 $g(t, s)$ は、

$$\partial g(t, s) / \partial t = A(t) g(t, s) \quad (42)$$

の偏微分方程式を満足する。また、システム行列 $A(t)$ は、[定理 2] で計算されるインパルス応答関数 $g(t, s)$ の擬似逆行列 $g(t, s)^{\dagger}$ を用いて、

$$A(t) = \partial g(t, s) / \partial t g(t, s)^{\dagger} \quad (43)$$

により計算される。

(証明)

(13)式より

$$g(t, s) R(s) = E[x(t) v^T(s)] \quad (44)$$

が得られる。(44)式を t で微分すると、(1)式より

$$\partial g(t, s) / \partial t R(s) = E[(A(t) x(t) + B(t) u(t)) v^T(s)] \quad (45)$$

が求められる。(13)式における変数 t と s は、不等式 $0 < s < t$ の関係を満足している。したがって、 $u(t)$ が白色雑音であることを考慮すると、(45)式の統計量 $E[u(t) v^T(s)]$ はゼロ行列になる。このため、(45)式は、

$$\partial g(t, s) / \partial t R(s) = A(t) E[x(t) v^T(s)] \quad (46)$$

と変形される。(46)式に(44)式を代入して整理すると、(42)式を得る。 $A(t)$ を推定するために、(42)式において $g(t, s)$ の擬似逆行列を利用すると、(43)式が得られる。(Q. E. D.)

6. $x(t)$ の自己共分散関数の下限と $B(t)$ の同定アルゴリズム

P. Faurre は、線形定常システムにおいて、自己共分散関数の上限を求めるアルゴリズムを提案した²⁾ ところで、フィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ の自己共分散関数は、信号 $x(t)$ の自己共分散関数の下限であることが知られている。このことは、次のように確かめられる。信号 $x(t)$ のフィルタ推定誤差共分散関数 $P(t)$ は、

$$P(t) = E[(x(t) - \hat{x}(t)) (x(t) - \hat{x}(t))^T] \quad (47)$$

と定義される。直交射影の原理より、 $x(t)$ のフィルタ推定誤差とフィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ との期待値はゼロとなるので、(47)式は

$$\begin{aligned} P(t) &= E[(x(t) - \hat{x}(t)) x^T(t)] \\ &= E[x(t) x^T(t)] - E[\hat{x}(t) \hat{x}^T(t)] \end{aligned} \quad (48)$$

と変形される。フィルタ推定誤差共分散関数 $P(t)$ は、半正定値行列であるので、

$$E[x(t) x^T(t)] \geq E[\hat{x}(t) \hat{x}^T(t)] \quad (49)$$

となり、 $x(t)$ のフィルタ推定値の自己共分散関数は、信号 $x(t)$ の自己共分散関数の下限であることが理解される。以下では、 $x(t)$ のフィルタ推定値の自己共分散関数を $P^*(t)$ と記す。[定理5] では、 $P^*(t)$ を求めるシーケンシャル・アルゴリズムを示す。

[定理5]

フィルタ推定値の推定誤差共分散 $P^*(t)$ は、(50)式によりシーケンシャルに計算される。

$$dP^*(t)/dt = A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) + g(t, t)R(t)g^T(t, t) \quad (50)$$

また、(1)式の制御行列 $B(t)$ は

$$B(t) = g(t, t)R^{1/2}Q^{-1/2} \quad (51)$$

により推定される。ここで、 $g(t, t)$ は、[定理2]の最適インパルス応答関数 $g(t, s)$ を求めるアルゴリズムにおいて、変数 s を t に等しく置いて得られるアルゴリズムから計算される。

[証明]

(8)式と、イノベーション過程 $v(\cdot)$ は白色雑音であり、その分散は $R(t)$ であることから、 $P^*(t)$ は

$$\begin{aligned} P^*(t) &= E[\hat{x}(t) \hat{x}^T(t)] \\ &= E\left[\left(\int_0^t g(t, s) v(s) ds\right) \left(\int_0^t g(t, \tau) v(\tau) d\tau\right)^T\right] \\ &= \int_0^t g(t, s) R(s) g^T(t, s) ds \end{aligned} \quad (52)$$

と変形される。(52)式の $P^*(t)$ の表現は積分形であり、さらに最適インパルス応答関数 $g(t, s)$ の計算をしなければならず、非常に複雑である。(52)式を t で微分して、(42)式を用いると、(50)式が得られる。(50)式は、 $x(t)$ の自己共分散関数の下限を計算する式であるので、 $x(t)$ の自己共分散関数 $P(t)$ に対する微分方程式⁵⁾

$$dP(t)/dt = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)Q(t)B^T(t) \quad (53)$$

と(50)式を比較して、(51)式が得られる。(Q. E. D.)

7. $H(t)$ の同定アルゴリズム

本節では、観測行列 $H(t)$ を同定するアルゴリズムを提案する。[定理6]に $H(t)$ の同定アルゴリズムを掲げる。

[定理6]

(2)式の観測方程式の観測行列 $H(t)$ は、

$$H(t) = X(t)q(t)A^T(t)P^{*-1}(t) \quad (54)$$

により計算される。ただし、関数 $q(t)$ と、 $x(t)$ のフィルタ推定値の自己共分散関数 $P^*(t)$ は、それぞれ微分方程式

$$dq(t)/dt = J(t, t)(B(t) - X(t)q(t)) \quad (55)$$

(初期条件： $q(0) = 0$)

$$dP^*(t)/dt = A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) + g(t, t)R(t)g^T(t, t) \quad (56)$$

を計算して求められる。

(証明)

直交射影の原理から、 $0 < s < t$ のとき、信号 $x(t)$ のフィルタ推定誤差 $x(t) - \hat{x}(t)$ は、フィルタ推定値 $\hat{z}(s)$ に直交する。すなわち、

$$x(t) - \hat{x}(t) \perp \hat{z}(s) \quad (57)$$

が成立する。(57)式と $\hat{z}(s) = H(s)\hat{x}(s)$ の関係式から、

$$E[x(t)\hat{z}^T(s)] = E[\hat{x}(t)\hat{x}^T(s)]H^T(s) \quad (58)$$

が得られる。(10)式と(23)式より、(58)式の左辺は

$$\begin{aligned} E[x(t)\hat{z}^T(s)] &= E[x(t) \int_0^s y^T(\tau) h^T(s, \tau) d\tau] \\ &= \int_0^s K_{xy}(t, \tau) J^T(s, \tau) X^T(s) d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

となる。(59)式より、 t と τ 大小関係は $0 \leq \tau \leq t$ である。このとき、 $K_{xy}(t, \tau)$ は(17)式より $A(t)B^T(\tau)$ と表される。したがって、(59)式は

$$E[x(t)\hat{z}^T(s)] = A(t) \int_0^s B^T(\tau) J^T(s, \tau) X^T(s) d\tau \quad (60)$$

となる。(60)式に(30)式を代入すると、

$$E[x(t)\hat{z}^T(s)] = A(t)q^T(s)X^T(s) \quad (61)$$

が得られる。(58)式の左辺に(61)式を代入して、

$$A(t)q^T(s)X^T(s) = E[\hat{x}(t)\hat{x}^T(s)]H^T(s) \quad (62)$$

が求められる。(62)式において、 s を t に限りなく近づけて、フィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ の自己共分散関数が $P^*(t)$ と表されることから、少し整理すると、(54)式が得られる。(Q. E. D.)

8. デジタル・シミュレーション

$A(t)$, $B(t)$, $H(t)$ を推定する同定アルゴリズムの妥当性を調べるために、スカラ信号の場合の計算機シミュレーション例を示す。なお、計算機は PC-9801VF2 を使用し、プログラムは FORTRAN 言語で作成した。

$x(t)$ を生成する確率的モデルは(1)式により、観測方程式は(2)式で与えられた。本例題では、 $A(t)$ と $B(t)$ は、それぞれ(63)式と(64)式の微分方程式により発生される不規則なスカラの時変パラメータとする。

$$dA(t)/dt = -5A(t) + w_1(t), \quad E[w_1(t)w_1^T(s)] = 0.1^2\delta(t-s) \quad (63)$$

$$dB(t)/dt = -B(t) + w_2(t), \quad E[w_2(t)w_2^T(s)] = 0.1^2\delta(t-s) \quad (64)$$

信号 $x(t)$ は、(1)式を再記して、

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (65)$$

の状態方程式により生成される。本例題では、白色雑音 $u(t)$ の分散 $Q(t)$ の値は 1 とする。

同定結果を記述する前に、フィルタ推定値 $\hat{z}(t)$, $\hat{x}(t)$ の観測雑音による影響を調べる。図 2 は、白色ガウス観測雑音を $N(0, 0.1^2)$, $N(0, 0.5^2)$, $N(0, 1)$ とするときの $\hat{z}(t)$ の時間特性を表す。図 2 より、観測雑音の分散の値を大きくすると、推定特性が劣化していることが分かる。図 3 は、白色ガウス観測雑音を $N(0, 0.1^2)$, $N(0, 0.5^2)$, $N(0, 1)$ とするときの $\hat{x}(t)$ の時間特性を表す。図 3 より、

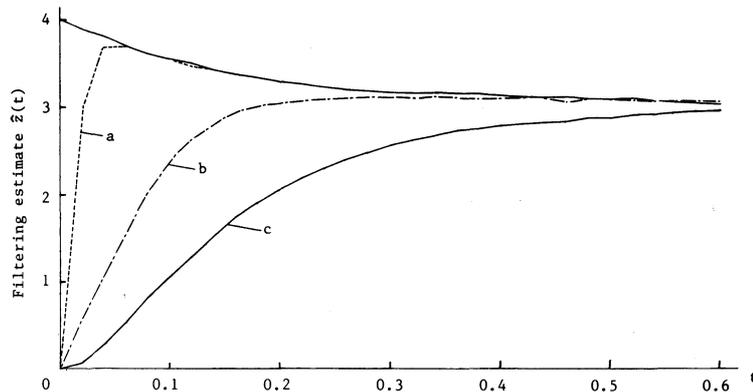


図 2 フィルタ推定値 $\hat{z}(t)$ の時間特性
 a 白色観測雑音が $N(0, 0.1^2)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{z}(t)$
 b 白色観測雑音が $N(0, 0.5^2)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{z}(t)$
 c 白色観測雑音が $N(0, 1)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{z}(t)$

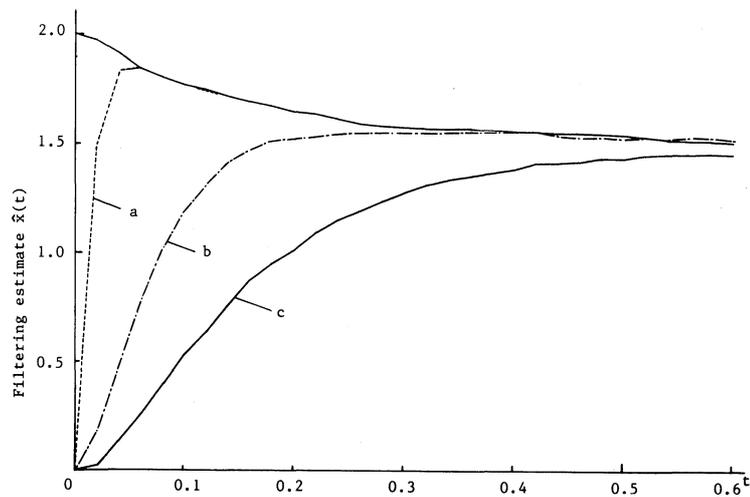


図 3 フィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ の時間特性
 a 白色観測雑音が $N(0, 0.1^2)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{x}(t)$
 b 白色観測雑音が $N(0, 0.5^2)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{x}(t)$
 c 白色観測雑音が $N(0, 1)$ のときのフィルタ推定値 $\hat{x}(t)$

フィルタ推定値 $\hat{x}(t)$ は $\hat{z}(t)$ と同様に、妥当な推定特性を示している。図 4 は、白色ガウス観測雑音を $N(0, 0.1^2)$, $N(0, 0.5^2)$, $N(0, 1)$ とするときの $B(t)$ の推定値の時間特性を示す。観測雑音の分散を大きくすると、 $B(t)$ の推定特性が劣化する傾向にあることがわかる。観測雑音の分散の大きさを 6 通りにした場合の $A(t)$, $B(t)$, および $H(t)$ の推定誤差の自乗の平均値を表 1 に示す。ただし、

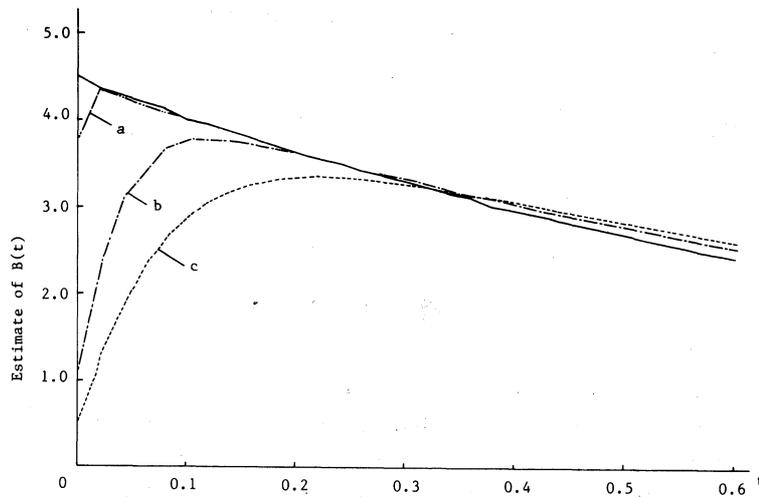


図4 $B(t)$ の推定値の時間特性
 a 白色観測雑音が $N(0, 0.1^2)$ のときの $B(t)$ の推定値
 b 白色観測雑音が $N(0, 0.5^2)$ のときの $B(t)$ の推定値
 c 白色観測雑音が $N(0, 1)$ のときの $B(t)$ の推定値

表1 $A(t), B(t), H(t), x(t), z(t)$ の推定値の推定誤差の自乗の平均値
 (平均は時刻 $0.02 \leq t \leq 1.0$ の時間区間における99個の等間隔で得られたデータを用いて計算した。)

	Estimate of A(t)	Estimate of B(t)	Estimate of H(t)	$\hat{x}(t)$	$\hat{z}(t)$
$N(0, 0.1^2)$	1.40409×10^{-6}	4.30204×10^{-4}	2.98045×10^{-6}	4.81634×10^{-6}	0.00191
$N(0, 0.3^2)$	1.40340×10^{-6}	0.01133	2.37550×10^{-6}	0.03796	0.15189
$N(0, 0.5^2)$	1.40251×10^{-6}	0.06971	1.90559×10^{-6}	0.10938	0.43757
$N(0, 0.7^2)$	1.38736×10^{-6}	0.17363	1.57501×10^{-6}	0.18755	0.75021
$N(0, 1)$	1.39712×10^{-6}	0.37385	1.22738×10^{-6}	0.30174	1.22702
$N(0, 5^2)$	1.40742×10^{-6}	2.81153	4.51434×10^{-6}	1.62210	6.48840

平均は、時刻 $0.02 \leq t \leq 1.0$ の時間区間における99個の等間隔点での、各々の推定値のデータを使用した。また、表1より、 $A(t)$ と $H(t)$ は、それぞれ精度良く推定されていることがわかる。

なお、微分方程式の数値計算には、4次のルンゲ・クッタ法を利用した。微分方程式を計算機で解かせるときの刻み幅は、0.001とした。また、計算に用いた変数は、全て単精度とした。

9. 終わりに

本論文では、共分散情報を使用した新しい同定アルゴリズムの提案を行った。この種アルゴリズムとしては、実現問題の立場から、Andersonらによる Spectral Factorization 法に関する一解法が提案されているが²⁾ 対象とするシステムは、線形定常確率システムである。本論文では、線形時変確率システムを対象としている点において、従来の問題設定を発展させている。

また、信号 $z(t)$ を推定する [定理1] のフィルタは、既に筆者と杉坂氏により開発されたが³⁾ 観測行列 $H(t)$ が未知の状態では信号 $x(t)$ を推定する手法については、従来より検討されておらず、信号推定問題を同定問題と融合させたところに本論文の斬新性がある。この融合的な概念は、ちょうど

状態変数の推定のためのフィルタと最適レギュレータを結合させた分離定理⁸⁾の考え方に類似している。

最後に、数値計算シミュレーション例が示され、 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $H(t)$ の推定値に対して、興味ある結果が得られた。

参 考 文 献

- 1) H. Van Trees: Detection, Estimation, and Modulation Theory,, Part 1, Wiley (1968)
- 2) P. Faurre: Stochastic Realization Algorithms, System Identification Advances and Case Studies, Edited by R. Mehra and D. Lainiotis, Academic Press (1976)
- 3) 中森・杉坂: 共分散情報による線形フィルタの設計; システムと制御, 22-2, 51/59 (1978)
- 4) S. Nakamori: On-Line Identification of Time Variant Parameters Using Covariance Information, Proc. ICASSP-IECEJ-ASJ International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 4, 2723/2726(1986)
- 5) A. Sage and J. Melsa: Estimation Theory with Applications to Communications and Control, McGraw-Hill (1971)
- 6) T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation. Part 1 : Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. Aut. Control, AC-13- 6, 645/655(1968)
- 7) B. Anderson and P. Moylan: Spectral Factorization of a Finite-Dimensional Nonstationary Matrix Covariance, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19- 6, 680/692(1974)
- 8) 木村: 動的システムの理論, 産業図書 (1976)