

ギターにおける弦の振動と楽器音の関係

三 仲 啓

(1997年10月15日 受理)

Relation between the String Oscillation and the Sound of Guitar

Akira MINAKA

1. はじめに

ギターの音の分析には、撥弦による弦の振動、ブリッジおよび表面版の振動、共鳴胴内での共鳴、表面版およびサウンドホールからの音波の放射、人間の聴覚構造など物理的な側面から、知覚された音が呼び起こす感情などの情緒的な問題まで、多くの対象があり、どれ一つをとってもその分析は難問であり、一筋縄では解けない問題である。

もちろん、演奏家や製作者には、それぞれ経験的および実験的な結果が多く蓄積されているが、当然のことながら、如何にすればよい音や大きい音が出るかという実用的な側面からの分析であり、何故そうなるかという物理学的な疑問には十分な答えは得られていない。また、材料物性や音響学的な研究はあるが、撥弦から楽器音に至る過程を理論的・定量的に追求した研究も見あたらない。

本稿では、クラシックギターが発する音の物理学的解析の第一歩として、固定端の弦の振動について考察する。一見力学の演習問題のような内容ではあるが、そこから現実のギター音の特徴が読みとれることを示す。さらに、弦の振動方向と楽器音の関係、ハーモニクス奏法の場合の弦の振動形態についても考察する。

2. 固定端の弦の自由振動

(1) 波動方程式の解

まず最も簡単な両端が固定された線密度が一様な弦の振動の近似解をまとめておく。

よく知られているように、時刻 t 、位置 x における弦の変位 $u(x,t)$ は、変位が小さく、空気抵抗を無視する場合には次の波動方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、弦を伝わる横波の位相速度 c は、弦の張力 T と線密度 σ により、 $c = \sqrt{T/\sigma}$ で与えられる。

初期条件として各点の位置と速度,

$$u(x,0) = F(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = G(x), \quad (2)$$

が与えられると, (1)の解は,

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \{F(x-ct) + F(x+ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(x) dx, \quad (3)$$

が与えられる。¹⁾

境界条件として弦の両端 ($x=0$ と $x=l$) が固定されている場合は, $F(x)$ および $G(x)$ は $2l$ 周期の奇関数とすればよい。

特に, $G(x)=0$ の場合は簡単で, かつギターの撥弦の場合はこれがよい近似になっている。さらにギター弦の場合は, $F(x)$ として, 図1(a)の形状を考えてよい。すると, 弦の振動は同図(b)のようになることが, (3)式の進行波と後退波を合成する作図により容易にわかる。²⁾

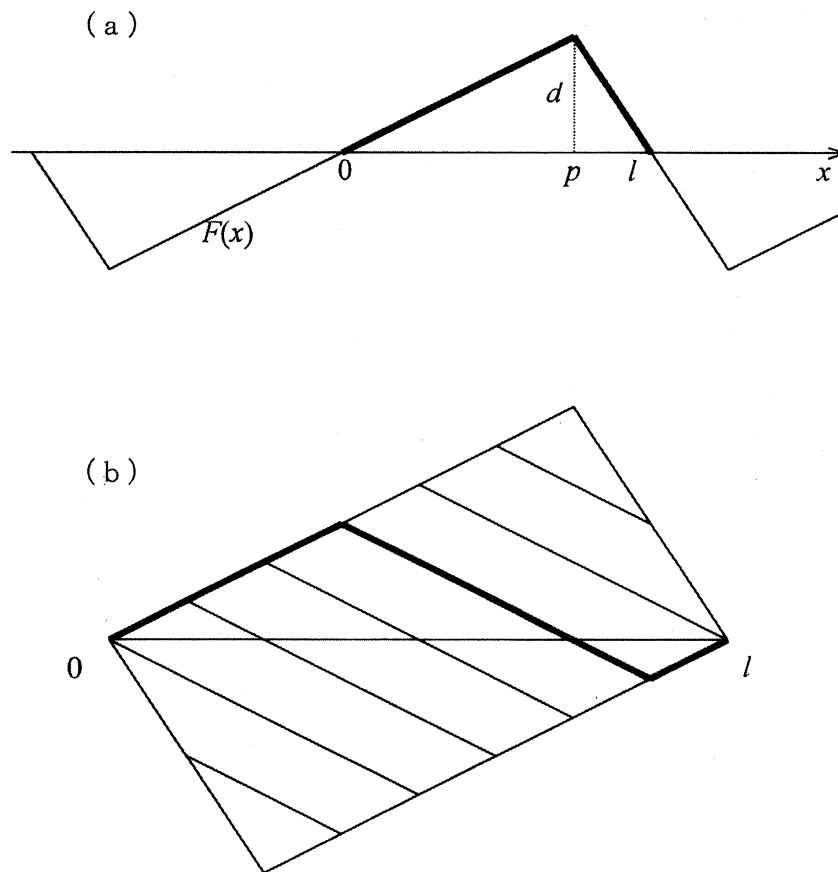


図1 固定端の弦の振動

(a)太線が $t=0$ での弦の形状。 $F(x)$ は $2l$ 周期の奇関数にとる。

(b)図(a)の形から, 初速度0で放たれた弦の振動。

後の便宜のために、撥弦位置を $x=p$ としたときの、 $F(x)$ の具体形と $u(x, t)$ の Fourier 展開を書いておく。

図 1 (a) の関数,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{d}{p}x, & \text{for } 2ml - p < x < 2ml + p \\ \frac{d}{l-p}(l-x), & \text{for } 2ml + p < x < 2(m+1)l - p \end{cases} \quad (m = \text{integer}) \quad (4)$$

を Fourier 展開して,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(d, \frac{p}{l} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (5)$$

$$C_n \left(d, \frac{p}{l} \right) = \frac{2d}{p(l-p)} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{pn\pi}{l}\right)$$

を得る。これから、弦の変位の 2 重 Fourier 展開が次式のように求まる。

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{F(x-ct) + F(x+ct)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(d, \frac{p}{l} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (6)$$

この(6)式が、図 1 (b) の運動を表すものである。なお、(5) の係数 C_n の式から、撥弦位置 $x=p$ が節になるようなモードは励起されないことがわかる。

(2) ギターの音色の第 0 近似

さて、両固定端の弦の振動を考える限りギターの表面板上のブリッジも振動しないことになり、従って表面板の振動もなく、音はほとんど出ないことになる。ブリッジおよび表面板の振動は、別稿で議論するが、ここではブリッジ上の弦受け（骨棒）のごく近傍における弦の変位がそのまま音波の波形に反映するという荒い仮定をして、これを実際のギター音と比較してみる。なお、ここで弦の変位は表面板に垂直な方向を考えることになる（次節の議論を参照のこと）。

ブリッジの位置を $x=l$ とし、その近傍の変位は、

$$u(l-\varepsilon, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(d, \frac{p}{l} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(l-\varepsilon)\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

$$\approx \frac{2d\varepsilon}{p(l-p)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{pn\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (7)$$

となる。ここで、 $\varepsilon (> 0)$ は微小な長さを表す。これを書き直せば、

$$u(l-\varepsilon, t) \approx \begin{cases} \frac{d}{l-p} \varepsilon & \text{for } (2m-1)l+p < ct < (2m+1)l-p \\ -\frac{d}{p} \varepsilon & \text{for } (2m+1)l-p < ct < (2m+1)l+p \end{cases} \quad (m = \text{integer}) \quad (8)$$

となり、図2に示すような段階型の関数であることがわかる。これをギター音の第0近似と呼ぶことにする。

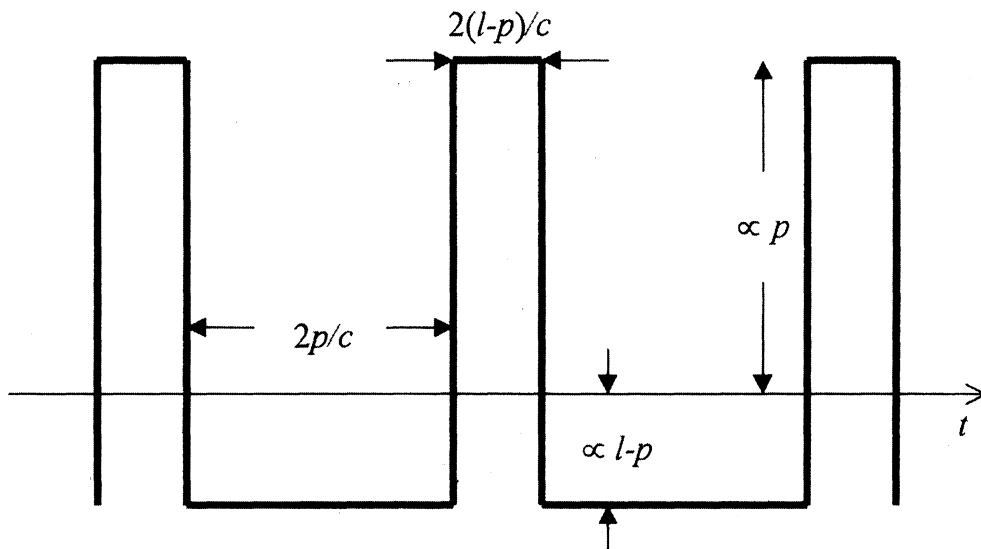


図2 ギター音の第0近似波形

本文中の式(7), (8)で表される関数。撥弦点が弦を内分する比により、山と谷の幅および高さの比が決まる

この関数と実際のギター音の波形を比較することにする。ギター音は、最大振幅になるまでの立ち上がりの部分と、その後の減衰部に大別でき、波形も時間とともに大きく変化する。ここでは撥弦直後や減衰が進行した段階は避け、振幅が最大になるあたりの波形を用いる。より具体的には、デジタルオシロスコープ (KENWOOD DCS-8200) の単掃引モードで、記憶されたデータの先頭から約 100ms (10100 サンプル目) から始めて 20ms 間の 2048 サンプルを採用した。

また、撥弦には指頭ではなくピックを使用した。これらの方法で実験をしてみると、高い再現性が得られることが確認できた。

撥弦位置 ($x=p$) を変えた場合のギター音の波形と第0近似の式(8)とを比較したものが図3である。第0近似の波形は、非常に素朴な近似であるにもかかわらず、実際の波形の特徴をよく表していることがわかる。³⁾

高周波成分ほど減衰が強いことを考慮すると、さらに詳細な比較が可能だろうが、元々が荒い近似であるので、ここではこれ以上の議論は避けておく。

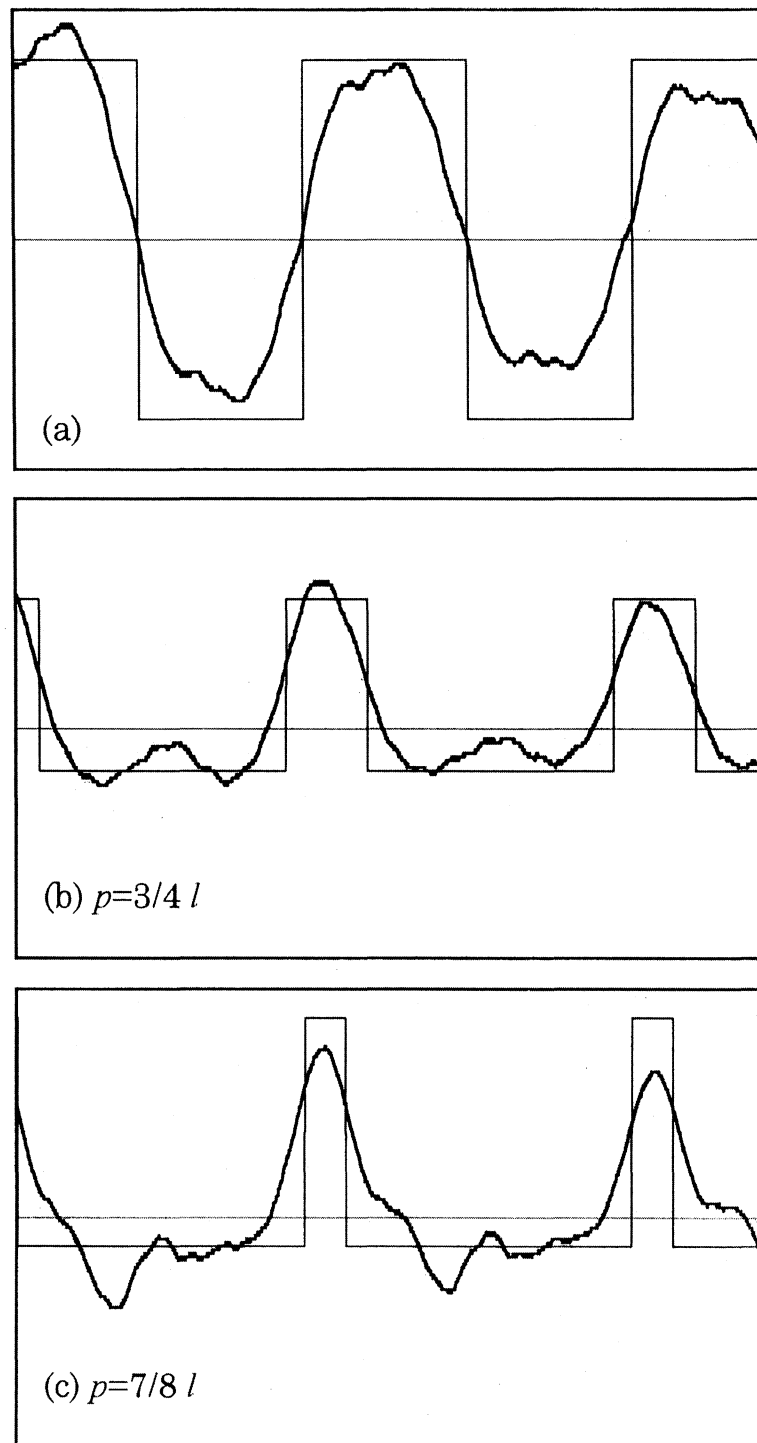


図3 ギター音の波形と第0近似との比較

5弦を弦長の(a) $1/2$ 、(b) $1/4$ 、(c) $1/8$ の位置で撥弦した場合を示す。横軸の時間は撥弦の約 100ms 後から 20ms の間、縦軸は任意スケールである。細線は第0近似の式(7)、(8)を表す。

ちなみに、ヴァイオリン属の弦の変位は、

$$u(x, t) \propto \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (9)$$

となる。この弦の形状は、常に静止弦の線分を底辺とする三角形の2辺になり、その頂点は両固定端を通る放物線上を移動する。²⁾この頂点の移動方向は、ダウンボウとアップボウでは反対になり、これは(9)式全体の符号が逆転することに相当する。

ヴァイオリン属の場合にも、(7)、(8)式と同様な第0近似を考えると次式を得る。

$$\begin{aligned} u(l-\varepsilon, t) &\propto \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \\ &= \frac{\pi\varepsilon}{2l} (ct - 2ml), \quad \text{for } (2m-1)l < ct < (2m+1)l, \quad (m = \text{integer}) \end{aligned} \quad (10)$$

すなわち、ヴァイオリンの音波の第0近似は鋸(のこぎり)波になる。

図4にチェロの音波と第0近似の鋸波を重ねて示した。ここでも第0近似としては、波形をよく再現していることがわかる。また、ダウンボウとアップボウでの波形の反転も自然に説明できる。

ギターの場合は撥弦位置により音色(倍音構成)が変わるが、ヴァイオリン属の場合は、第0近似の範囲では、擦弦位置は音色には影響しないことになる。ただ、(9)式の導出過程を考えれば、音量(振幅)には影響することが予想される。しかし、擦弦位置は、音量を決定する要因としては第二義的なものであろう。

(3) 弦の振動方向

実際のギター弦の変位は、表面板に平行な方向と垂直な方向の2成分を持っている。一方、本稿では弦の平面的な振動のみを考察しているので、それがどの方向の成分を議論しているのかを明らかにしておかねばならないだろう。

ギター弦の振動は、その撥弦方法からわかるように、表面板に平行な方向に大きな変位を持つ。しかし、ブリッジおよび表面板の振動は、その構造から明らかなように、表面板に垂直な方向の変位が大きい。従って、表面板に垂直な方向の弦の変位は相対的に小さいが、これがブリッジや表面板を振動させる主な原因と考えられる。

このことは、弦の振動面が、表面板(より正確には弦受けの上面)にできるだけ平行になるように撥弦してみると、小さな音しかしないこと、逆に、振動面を表面板に垂直になるようにすると、ごく軽く弾いてもかなりの音量が出ることから想像できる。

これに対し、ヴァイオリンでは、湾曲したブリッジや魂柱などの構造により、弦の振動を有効に表面板の振動に変えている。擦弦(強制振動)と撥弦(減衰振動)という基本的な違いはあるが、構造上からもギターは弦の振動エネルギーをさほど有効には音波のエネルギーに変換していない可能性がある。ただ、ギターの弦受け上面は低音弦側が高く作られるのが普通であり、この傾斜は、

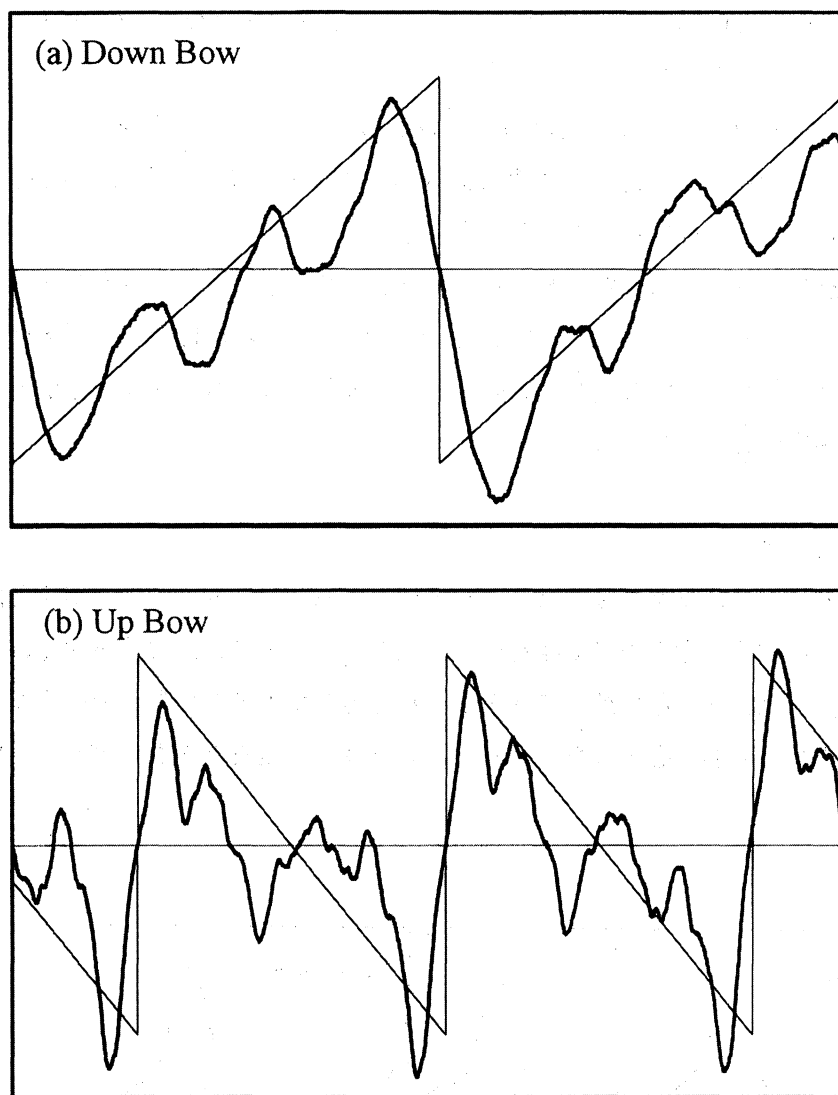


図4 チェロ音の波形 (a)ダウンボウ (b)アップボウ

細線は第0近似(10式を表し、縦軸は任意スケールである。

データは文献4)によるため、本稿の他のデータとは条件が異なる。

表面板に水平な弦の振動から表面板の垂直振動を得るのに役立つと思われる。

上記のことから、本稿で議論している平面的な弦の振動において、弦自身の振動形態を問題とする場合には表面板に平行な振動面を考えてよいが、音と関連した議論を行う場合には表面板に垂直な成分の振動を扱っているわけである。従って、前節でギター音の第0近似を考えた際も、表面板に垂直な成分の変位を扱っていたことになる。

さて、表面板に垂直な方向の弦の振動がギター音に反映していることは、以下の考察とデータから直接的に確認することができる。右利きの演奏者が人差し指で自然に撥弦すると、弦を上向きかつ表面板に向かって押し込む形になる。これを〔上押〕と略記することになると、弦の可能な初期変位の向きは、この他に〔下押〕,〔上引〕,〔下引〕がある。親指による自然な撥弦は〔下押〕であ

り、〔上引〕と〔下引〕は、バルトークピッチカートのように表面板から弦を引き上げる向きの撥弦になり通常の奏法では生じない。

もし、弦の水平振動成分が主に音波に効いているなら〔上*〕と〔下*〕(*は押・引のいずれか)で変位の符号が逆になり、逆に、垂直振動成分が主に効いているなら〔*押〕と〔*引〕(*は上・下のいずれか)とで波形が逆になるはずである。

上記4方向の撥弦を行った場合のギター音の波形を図5に示す。この波形データは図3と同じ方法で採取した。図から明らかなように、〔上*〕と〔下*〕の変位は同符号、〔*押〕と〔*引〕は逆符号となることがわかる。すなわち、このデータは表面板に垂直な振動成分がギター音を生じさせていることを明快に証明している。

3. ハーモニクス奏法

ギターにおけるハーモニクス奏法は、ヴァイオリン属のフラジオレット奏法と同様に、弦上で振動の節を作りたい位置に指を当てて弦を弾く。ただしギターでは、撥弦後すぐに指を弦から離す。ギター弦の場合、一旦ある位置に節ができると、指を離してもその位置が節のまま振動するので、発音中ずっと指を当てておく必要はない。むしろ無意味な減衰を与えないように、撥弦後すぐに指を離すのである。

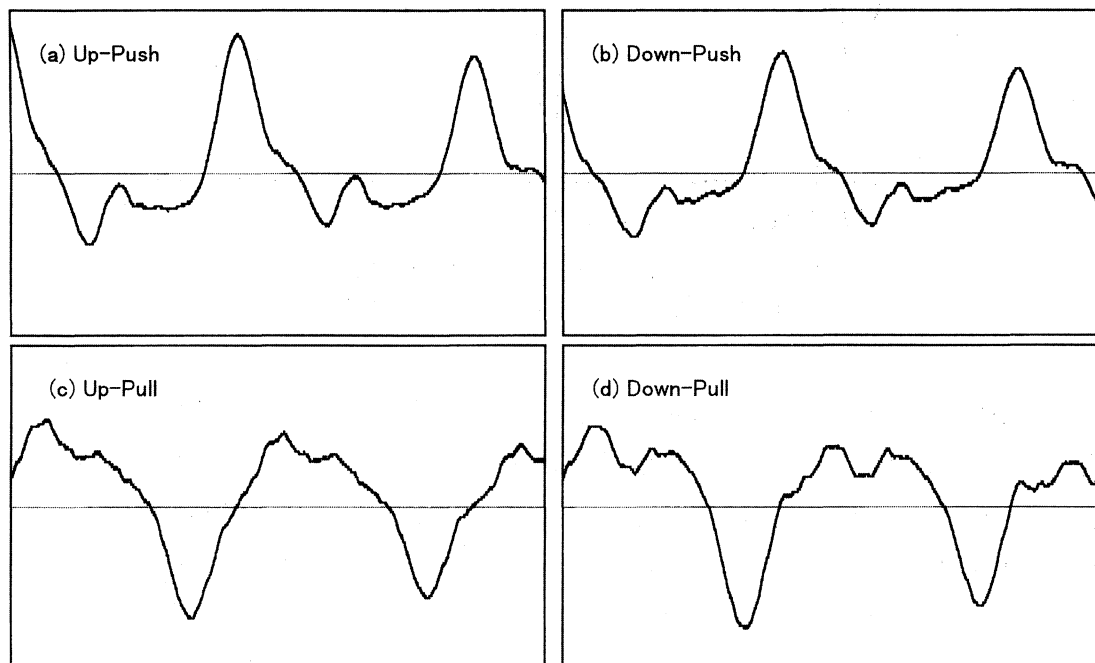


図5 撥弦方向(初期変位方向)とギター音の波形

(a)「上押」、(b)「下押」、(c)「上引」、(d)「下引」、各方向の意味は本文参照。

さて、ハーモニクス奏法時の弦の振動は次のようにモデル化できるだろう（図6参照）。ここでも表面板に垂直な振動成分のみを考えていること、および図6では表面板は図の上側になることに注意してほしい。ハーモニクス奏法では、まず左手の指を弦上の点 $x=a$ に軽く触れておいて、右手の指で撥弦する。撥弦動作に入ると、弦は表面板に向かって押し込まれるので、左手の指と弦は離れる。従って、撥弦後弦が左手の指に当たり、指から力を受けるまでは、通常の奏法による自由振動と同じである。

例えば、弦の中央である12フレットに指を触れたハーモニクスの場合には、振動数は2倍、周期は半分の音が得られるが、撥弦直後の約半周期における弦の運動は、ハーモニクスを行わない場合と同じになる。

以下、弦が指に触れた後の振動形態を見るために、定式化を試みる。

(1) 力を受ける弦の振動

力を受けながら振動する固定端の弦の運動方程式は、例えば以下のように解くことができる。まず、 $x=0$ と $x=l$ が固定端であるから、変位は次のように Fourier 展開できる。

$$u(x,t) = \sum_n q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (11)$$

$$\dot{u}(x,t) = \sum_n \dot{q}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (12)$$

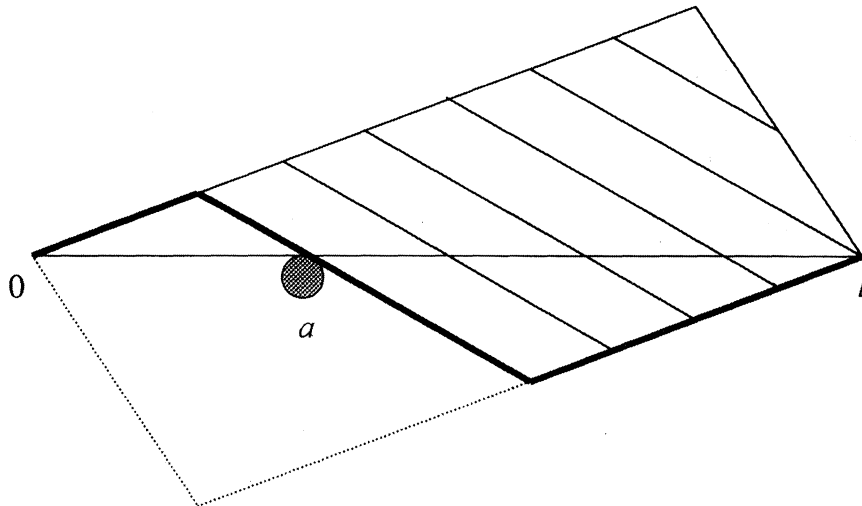


図6 ハーモニクス奏法のモデル化

撥弦後 $x=a$ の位置においた指に当たるまで、弦は自由振動をする。その後、指から受ける力により、 $x=a$ が節となるモード以外は減衰していく。

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、それぞれ、

$$K = \frac{1}{2} \sigma \int_0^l \dot{u}^2 dx = \frac{1}{4} \sigma l \sum_n q_n^2, \quad (13)$$

$$U = \frac{1}{2} T \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{4} T l \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{l^2} q_n^2 \quad (14)$$

と書けるので、これらから $q_n(t)$ を一般化座標とする Lagrange 方程式

$$\ddot{q}_n + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} q_n = \frac{2}{\sigma l} \Phi_n \quad (15)$$

が決まる。その一般解は、

$$q_n(t) = \dot{q}_n(0) \frac{1}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + q_n(0) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \frac{2}{n\pi \sigma c} \int_0^t \sin(t-t') \Phi_n dt' \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 Φ_n は一般化拘束力であり、 $\Phi_n \delta q_n$ が仕事を表す。特に、弦の各点に働く力が $F(x,t)dx$ と書ける場合は、

$$\Phi_n(t) = \int_0^l F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (17)$$

と表せる。

(2) ハーモニクス奏法における弦の運動

$x=a$ の点に指を触れたハーモニクスの場合は、

$$F(x,t) = f(t) \delta(x-a) \quad (18)$$

としてよいので、(17)式は、

$$\Phi_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) f(t) \quad (19)$$

となる。撥弦後はじめて弦が指に触れる時刻を t_1 、弦から指を離す時刻 t_2 とすると、

$$f(t) = 0 \quad \text{for } t < t_1 \text{ or } t > t_2 \quad (20)$$

である。

弦が静止している初期状態から弦が指に触れるまで ($t < t_1$) は(6)式がそのまま成立し、

$$q_n(t) \equiv C_n(d, p/l) \cos(n\pi ct/l) \quad (21)$$

となる。

指が弦に触れている間 ($t_1 < t < t_2$) に何が起こるかを詳しくみると次のようになる。

まず、(19)式からわかるように、 $x=a$ が節になっているモードに対しては一般化拘束力が働かない。

従って、例えば7フレットのハーモニクス ($a=l/3$) の場合、 $n=3,6,9, \dots$ のモードは、自由振動を続ける。

それ以外のモードは、拘束力を受ける。この拘束力は $x=a$ での変位が0になるまで働くので、これらのモードは必ず減衰する。実際のギターでは10周期以下で十分な減衰が起こり、事実上これらのモードは消滅すると考えられる。

この減衰の過程は、例えば、 $x=a$ で弦に加わる力が $u(a,t)$ に比例するという模型を採用すれば具体的に追跡できるが、本稿ではそこまで立ち入らないことにする。

結局、 $x=a=(k/m)l$ ($m=2,3,\dots; k=1,2,\dots,m-1$) の位置で指を触れたハーモニクス奏法を行った後の、弦の変位は、

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(d, \frac{p}{l} \right) \sin \left(\frac{mn\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{mn\pi ct}{l} \right) \quad (22)$$

で表せる。この式の時間の原点 $t=0$ は撥弦時であるが、(22)式が成立するのは、ハーモニクス奏法のため弦に触れていた指を離した後 ($t>t_2$) のみである。

例えば、7フレット ($a=l/3$) のハーモニクスの際に、19フレット ($p=2/3l$) の位置で撥弦すると、全く音が出ないことは簡単に確認できる。これは19フレットで撥弦すると元々 $3n$ ($n=1,2,3,\dots$) のモードが含まれておらず、その他のモードは指によって減衰させられてしまうということで理解できる。実際、この場合には(22)式が恒等的に0になる。

さて、(22)式で表される弦の振動形態は、時間の原点を

$$t_0 \equiv \frac{m-1}{m} \frac{l}{c} \quad (23)$$

だけずらして次式の形に書くとよくわかる。

$$u_m(x, t-t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\left(1 - \frac{m-1}{m} \frac{l}{p} \right) d, \frac{p - \{(m-1)/m\}l}{l/m} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l/m} \right) \cos \left(\frac{n\pi ct}{l/m} \right) \quad (24)$$

これを(6)式で与えられる自由振動の弦の変位 $u(x,t)$ と比較すると、ハーモニクス奏法における弦の振動は、 l/m の長さの弦を、 $p - \{(m-1)/m\}l$ の位置で弾いた場合と同じで、最大変位は $1 - \frac{m-1}{m} \frac{l}{p}$ 倍になることがわかる。特に、撥弦位置で最大変位が起こることは、変位の符号まで含めて自由振動の場合と同様である。この弦の振動形態の例を図7に示してある。

(3) 音波の第0近似

ハーモニクス奏法における弦の振動形態がわかったので、前章と同様に音波の第0近似を求めることができる。このためには、弦の長さや撥弦位置を適当に変更して考えれば、通常の奏法における弦の振動と同じになることを利用すればよい。

例えば、7フレットのハーモニクスにおいて、ブリッジ側から弦長の $1/10$ の位置で撥弦した

