数学教育におけるオープンエンドアプローチ

植村哲郎・高堂年幸*

(1984年10月15日　受理)

Open-end Approach Strategy in School Mathematics Teaching

Tetsuro UEMURA and Toshiyuki KODO*

はじめに

昨年　能田氏により「算数・数学科　オープンエンドアプローチによる指導の研究」[1] の論文が公刊されたこと等もあり，最近算数・数学教育の中にオープンエンドアプローチと呼ばれる1つの新しい指導法が提案されている。

オープンエンドアプローチの研究は，島田氏を代表者とする共同研究[2]「数学教育における高次目標の評価方法に関する開発研究」に始る。そこでの一連の研究の成果の一部は「算数・数学科のオープンエンドアプローチ　一授業改善への新しい提案一」として公刊されている。能田氏も上記の共同研究に参加され，そこでの成果を基に氏自身さらに研究を重ねられ独自の研究や理論と展開しておられるのが上記の論文である。

筆者も上記の共同研究に参加させて貰った1人である。この研究の中で得たものは非常に多かった。引き続き，筆者自身文部省の科学教育研究費補助を受け独自研究を続けてきた。その成果は，「数学教育における評価〔Ｉ〕」[3]「数学教育における評価〔Ⅱ〕一創造性について一」[4] で報告した。能田氏の論文には足元にも及ばない拙稿であるが，氏の論文に啓発され，ここでは氏とは異った観点からオープンエンドアプローチの研究を進めていることを報告するものである。

まず，オープンエンドアプローチについてその意味や意図について要約し，次にこれが関連すると思われる研究や理論的背景について述べる。これについては，3)4)でも概略は述べてあるが，そこでは充分に説明を尽していない点の補足説明と，〔Ｉ〕の論旨説明に必要な事項の説明をする。したがって，3)4)と重複する部分もある。

最後に，オープンエンドアプローチの考え方の授業での生かし方について言及する。これは次のような意図をもっている。前述の論文3)4)でオープンエンドアプローチによる授業の方法と効果にについては仮説[5] を述べたにすぎなかった。本稿ではそこでの仮説を検証するために，高堂氏に実際の授業を実施して戴いた，その結果の報告が主になる。

* 大分県宇佐市立宇佐中学校教諭

〔I〕 オープンエンドアプローチ

(一) オープンエンドアプローチとは

オープンエンドという用語の使われ方としては，アンケート調査などにおける質問法としての open-end question がある。これは，賛正・反対，好き・嫌いなどのような単純な反応だけの回答を求める世論調査式の質問に対比して用いられ，被質問者のより自由な態度を表明させ，それによって態度や意見の広い文脈をつかむことができるような質問法である。この他に一般的には，open-end であることとしては，与えられた一定の情報からより多くの他の情報を導き出したり疑問点を見つけたりするようなことを意味することが多い。

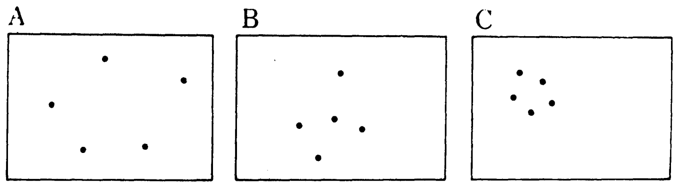
我々は，算数・数学教育の問題において問題に対する解答が一意的に決まるような問題を closed な問題と名づけ，これに対して正答がいく通りも可能になるように条件づけた問題を結果がオープンな問題という意味でオープンエンドな問題 (open-end problem，未完結問題) と呼ぶごとにした[6]。

研究の当初では，オープンエンドな問題が数学教育の高次目標を評価するための手段として有用なものであることを実証しようとするものであったが，次第にこの種の問題の解決を中心テーマとする授業が算数・数学科の教育の改善に有効ではないだろうかという考えに至り，その確認に取り組んべきている。

オープンエンドアプローチと呼ぶ指導の仕方は，「オープンエンドは問題を課題として，そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展開し，その過程で既習の知識・技能・考え方をいろいろに組合せて新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方」を意味するものとする[6]。

以下ではオープンエンドは問題の例とオープンエンドアプローチの例を挙げて，その基本的考え方を説明する。なお詳しくは1)2)12)等に多くの実例があるので，ここでは我々が一連の研究で使ったオープンエンドな問題の典型的な例を１つ示し，次に日常の授業の教材からオープンエンドアプローチによる授業の構成法の１例を示す。

A，B，Cの３人でおはじき遊びをしたら，下の図のようになりました。この遊びでは，落したおはじきのちらばりの小さい方が勝ちとなります。



この例では，おはじきのちらばりの程度は，A，B，Cの順にだんだん小さくなっているといえそうです。

このような場合ちらばりの程度を数で表すしかたをいくとおりも考えて下さい。

図-1

これは，２次元のちらばりの程度を数値化させる問題であるが，数値化の方法はいろいろ考えられ解は一意に決められないものである。調査によると生徒の反応は次のように分類できる[7]。

ⓐ点を結んでできる多角形の面積　ⓑ多角形の周の長さ　ⓒ点を結ぶ最大線分の長さの和　ⓓ任意の点から各点への長さの和　ⓔ円ですべての点をおおうときの円の半径　ⓕ座標の考えによる平均偏差・標準偏差に近い方法　ⓖ平面上に方眼をかいておきそこに落ちた方眼の数

これをオープンエンドアプローチによる授業の展開では次のような方法をとることになる。まずこのような問題にはとまどう生徒もいるので説明を加えて題意を把握させ，充分に時間を与えでいろいろな考えを自由に出させる。上記ⓐ～ⓖのような考えが出たきたところで，それぞれについて検討させる。これらの方法にはそれぞれ長所や短所がある。たとえばⓐの方法では点が一直線上に並んだ場合に不都合が起こるし，ⓖの方法でちらばりの程度は異る場合に同じ数値になったりまた逆になる場合も起る。授業ではこのようなそれぞれの長所や短所を指摘させなからより適当な数値化の方法を考えさせていく。生徒が個々に考えたアイデアを発表させ吟味させながら，つまりそれらの方法を一般化するときの利点や不合理を発見させなから2次元のちらばりの考え方を指導する[8]。

この教材は小学校から高校までのどん段階でも教材化しうるものである。オープン－エンド－アプローチの意図は充分生かされることは実証されている[8]。しかし2次元のちらばりは普通のカリキュラムからは外れた教材であるので，次に教科書にある教材のオープン化の例を示す。

（例2）重心の定理

「三角形の3つの中線は1点で交り，その交点Gは3つの中線をそれぞれ2：1の比に分ける。このを三角形の重心という。」

この定理の証明では次のような図を示して

「BC と EF の間にどんなことが言えるか」

「△GBC∽△GEF を証明せよ」

「点Gは線分 BE，線分 CF をどんな比に分けるか」

「AD と BE の交点 G′ の場合はどうか」

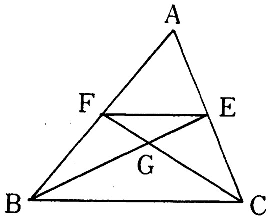


図-2

などの段階的な設問をして結論へ誘導したり，或いは，すぐに証明の記述を始めたり[9]するような説明がされるのが普通である。このような課題の与え方は生徒が自由な思考をする余地がほとんどなくこれを我々は closed な問題と呼んでいる。これに対して次のような課題の与え方が考えられる。

右の図は次の2つの性質を持つように書かれた。

1　AD，BE，CF は三角形 ABC の中線である。

2　四辺形 BHCG は平行四辺形である。

問1　下の三角形を使って（略）1と2の性質をもつような図を作って下さい。また点Hはどのように決めればよいですか。

問2　右図にはどんな性質がありますか。いろいろな観点からできるだけたくさん見つけなさい。

問3　問2で見つけた性質で，成り立つことが簡単にわかるもの証明のいらないもの，証明の必要なものに分けなさい。

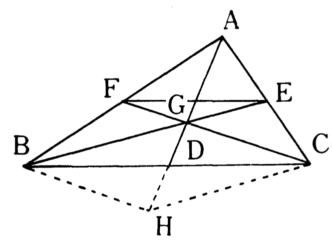


図-3

このような活動をさせたのち重心の性質の証明方法を考えさせる。この課題の与え方は，正答がいく通りも可能となり生徒の多様な思考を促しており，オープンエンドな問題を取り上げていると言える。この授業の展開を図式化すると次のようになる。

普通の授業の展開や教科書等では，(1)から(3)への一本道を直接進む方法をとり，(1)から(2)，

(c)
(a)
(1)問題場面を与える
(2)作図方法や性質を列挙させる
(b)
(3)証明方法を考えさせる

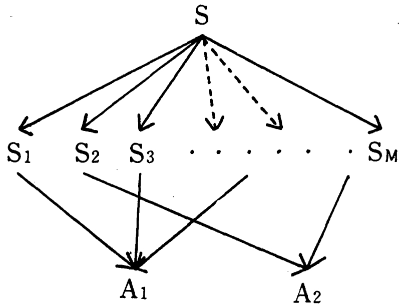


図-4

(2)から(3)へと移る段階は，特に設定しない。しかし段階(a)は(3)が成功するかどうかのポイントである。何故なら，上の例で(2)が充分に尽されていれば，重心の性質の証明が完成する為には，(2)で発見した多くの性質から仮定と結論が何であるかをまず探し証明に必要な性質を取捨選択し，正しい順序で配列していく作業が残っているにすぎないのであるから。もちろん，これは簡単なことではないが。

証明でつまずく場合には次の２つの段階でのつまずきが考えられる。

(1) 証明に必要な性質を想起できない。

(2) 性質には気づいているがそれらが証明にどう結びつくのか不明である。

(1)の段階の重要性は実際の指導では見逃がされがちである。ところが(1)の段階つまり図の中に潜在する性質を発見する（この段階では直観的でよい）ことができなければ，次の段階の証明はできないことになるのであるから，この点に着目した指導が必要であると考える。ここに述べたオープンエンドアプローチによる指導のねらいはそこにある。

(二) オープンエンドアプローチに関連する研究

能田氏は，オープンエンドアプローチによる指導の理論的背景をヘルバルトの「タクト論」とデューイの「知性化」に求めている。筆者は，オープン－エンドな課題の与え方が要求している思考は数学教育における創造性と密接に関連があり，またそれを授業で生かす為には数学の発見の発想やＫＪ法の研究が有効であると考えている。

(1) 数学教育における創造性

創造性とオープンエンドアプローチの考え方との関連について は 既述した[3,4]。 要約すると次のようなことである。

創造性に対する研究は数多くなされおり創造性の意味も様々であるが，心理学的な考え方の代表的なものに J.P. Guilford の考え方がある。そこでは，創造性に強く寄与する因子として発散的思考 (divergent thinking) を挙げ， そして発散的思考は更に fluency (流暢性)， flexibility (柔軟性)， originality (独創性) などに分析されるとしている[10]。数学教育における創造性の研究でもこの考え方を踏襲したものが多い[11,12]。したがって数学教育における創造的能力も発散的思考に集中するという考え方に立っている。そこで言われる発散的思考とは，収束的思考と対比して用いられ，収束的思考とは１つの解を求めたり解があるかないかなどを解答させるものであり，発散的思考は１つ

の問題場面において解が1通りでなく多様な解を考えさせる思考を意味している。オープンエンドアプローチによる指導はこのような発散的思考を積極的に利用することで授業を展開する方法であるからこのような意味で創造性研究はオープン－エンド－アプローチの研究と関連するところが多い。

また数学教育における創造性研究では，数学における創造性を能力としてとらえ，それを測定し数量化しょうとする立場での研究がある[13]。そこでは数学における創造性テストと呼ぶテストを作り，それらを流暢性，独創性，柔軟性などの観点からそれぞれ反応の総数，ユニークさ，アイデアの総数として評価する方法がとられることが多い。創造性テストとして用いられる問題場面はオープンエンドな問題である。しかし内容的には数学的にあまり意味がないと思われるような問題もある。妥当性は吟味が必要である。

数学教育における創造性を発散的思考にのみ限定した捉え方は適当とは言えないが，このように収束的思考より発散的思考が重視される理由は，1つに記憶より思考が，注入主義よりも開発教授が大切であるという思想があることにもよるが，従来の学習指導ではあまりに求答主義の分析的思考や収束的思考が重視されすぎていたという反省の意味もあるのではなかろうか。

オープンエンドアプローチによる指導はこのような反省の上に立った新しい指導方法と言うこともできる。

(2)　数学における発想

ポアンカレがフックス関数に関する性質を発見したときの経過を詳説している[14]中で，ある種の問題を暫く考えて解決できず，一時考えることをやめ，数学とは全く関係ないことをしている時に突然啓示があり急転直下難問の解決を見たことが述べられている。この事が良く創造性の研究などにも引用される。そしてそのような数学的な発見の過程の分析がなされている。例えば黒田氏は[15]，

①　課題意識ができる段階

②　模索の段階で試行錯誤が行なわれる

③　あたためめの段階で意識的な努力は中止し代りに無意識的な活動が続く

④　洞察の段階で直観や霊感が出てくる

⑤　検証の段階で論文その他他人にも客観的に知りうるような作品に表して吟味が行われる。

と5段階に分析している。この他にも創造活動を段階に分ける考え方はいろいろある[16][17]。

しかし，このように発見の過程をいかに細く分析しても何故④の段階の思考が始るのかは解明できていない。ポアンカレの発見の例では天才的なインスピレーションだけが強く印象づけられるのである。他の人が，数学の難解な問題に直面したときに①②③と同じ経過をたどってポアンカレと同じ行動をとったとしても問題の解決にいつでも到達するとは思われない。そして，ポアンカレのこのような方法では無駄や失敗も多く発明や発見に至らない徒労に終ってしまうことも多いのではないかと考えられる。しかしポアンカレは次のようにも述べている。「(③のような) 無意識的活動は (①②のような) 意識的活動が一方に於てこれに先だち，また他方において続く場合にのみ可能

なのであって，さもなければ決して効果はあがらない……。」そして「すすんで努力して一見途方もない見当外れをしたかのような気が続いた後でなければ突然の霊感は下っていない」[18] と③の潜在的自我が数学上の発見に重要な役割を果たすことを認めながらも①②の意識的自我が不可欠であるとしている。

一方 アダマールは，③のような無意識過程を分析して，「インスピレーションは全く偶然ではあり得ない。無意識の過程における思考は通常の論理的分析の操作や意識的思考のような言語を用いたものではないが，それに代る別の形の思考（綜合と称している）がなされている」[21] と言う。また川喜田氏[19]はポアンカレの発見における③の段階の無意識活動を「ＫＪ法[20]と同じような手続きがポアンカレの頭の中では非自覚的に進行していたのではないか」と指摘している。つまり，数学の問題に関する情報は最初から頭の中に点在していて内面的な努力によってそれらの情報がグルーピングされ数学の問題の解決に結びつくアイデアが生れたのであるとしている。ポアンカレやアダマールは発明や発見のような創造活動は「観念の組合せで起る。創造することとは無用な組合せをつくらないで有用な組合せをつくることである。発明や発見は識別であり区別である」[22]と言っているが，ＫＪ法のグルーピングはこのような創造活動を念頭操作から具体的操作活動に転換したものであると言うことができる。さらに川喜田氏は「ポアンカレの場合は，必要な情報をその都度外に出して定着させないで頭の中に詰め込んだままで無理をしている。内面的な過重な努力をもっと意識的に外に吐き出して図解や文章にしながら，さらに人間的な能力を加えた方がすばらしい成果をもたらすのではないか」[23] と述べている。

以上述べたような数学における発見の分析研究は，数学教育に大きな示唆を与えてくれる。仮に数学の問題があったとする。その問題に対していろいろなアイデアが浮かび交錯させながら解決方法を模索する段階がある。このような意識的活動で解決せずに無意識的活動ののち突然啓示があって解決することがあっても，意識的活動が充分にはされることなしには啓示もありえないとポアンカレ等は指摘する。また，「無意識的活動の部分もできるだけ意識化する方が良いのではないか」と川喜田氏は言っている。つまりたとえば意識的活動で見つけたアイデアを問題の解決まで結びつけることができない，アイデアは一見全く関連がないように思われ，問題の解決につながるような意味あるものに組み立てることができないとき，まず多くのアイデアをカードに書きとめるなどの形に残しそれらをグルーピングしたり配列したりするような作業をしながら，問題解決に結びつく選択や有用な組合せを構成する方法が有効ではないかと言っているのである。

児童や生徒の算数，数学の学習の場合も同様な事が考えられる。図形を用いた論証の問題を例にとろう。まず証明に用いられる図を見て生徒は様々な性質に気づく必要がある。そしてそれらの性質の中には証明に必要な性質やアイデアが必ず含まれていなければならないので発見できる性質やアイデアは豊富な程良い。次にそれらの性質やアイデアから証明に有用なものを抽出して，組合せ，順序よく配列することができなければならない。

オープンエンドアプローチによる指導の有効性は多々研究されているが，本稿では上記の２つの