# 数学教育におけるオープンエンドアプローチ

植 村 哲 郎・高 堂 年 幸*

(1984年10月15日 受理)

# Open-end Approach Strategy in School Mathematics Teaching

Tetsuro UEMURA and Toshiyuki KODO*

## は じ め に

昨年 能田氏により「算数・数学科 オープンエンドアプローチによる指導の研究」[1] の論文が公刊されたこと等もあり，最近算数・数学教育の中にオープンエンドアプローチと呼ばれる1つの新しい指導法が提案されている。

オープンエンドアプローチの研究は，島田氏を代表者とする共同研究[2]「数学教育における高次目標の評価方法に関する開発研究」に始る。そこでの一連の研究の成果の一部は「算数・数学科のオープンエンドアプローチ 一授業改善への新しい提案一」として公刊されている。能田氏も上記の共同研究に参加され，そこでの成果を基に氏自身さらに研究を重ねられ独自の研究や理論と展開しておられるのが上記の論文である。

筆者も上記の共同研究に参加させて貰った1人である。この研究の中で得たものは非常に多かった。引き続き，筆者自身文部省の科学教育研究費補助を受け独自研究を続けてきた。その成果は，「数学教育における評価〔I〕」[3]「数学教育における評価〔II〕一創造性について一」[4] で報告した。能田氏の論文には足元にも及ばない拙稿であるが，氏の論文に啓発され，ここでは氏とは異った観点からオープンエンドアプローチの研究を進めていることを報告するものである。

まず，オープンエンドアプローチについてその意味や意図について要約し，次にこれが関連すると思われる研究や理論的背景について述べる。これについては，3)4)でも概略は述べてあるが，そこでは充分に説明を尽していない点の補足説明と，〔I〕の論旨説明に必要な事項の説明をする。したがって，3)4)と重複する部分もある。

最後に，オープンエンドアプローチの考え方の授業での生かし方について言及する。これは次のような意図をもっている。前述の論文3)4)でオープンエンドアプローチによる授業の方法と効果にについては仮説[5] を述べたにすぎなかった。本稿ではそこでの仮説を検証するために，高堂氏に実際の授業を実施して戴いた，その結果の報告が主になる。

* 大分県宇佐市立宇佐中学校教諭

# 〔I〕 オープンエンドアプローチ

## (一) オープンエンドアプローチとは

オープンエンドという用語の使われ方としては，アンケート調査などにおける質問法としての open-end question がある。これは，賛正・反対，好き・嫌いなどのような単純な反応だけの回答を求める世論調査式の質問に対比して用いられ，被質問者のより自由な態度を表明させ，それによって態度や意見の広い文脈をつかむことができるような質問法である。この他に一般的には，open-end であることとしては，与えられた一定の情報からより多くの他の情報を導き出したり疑問点を見つけたりするようなことを意味することが多い。

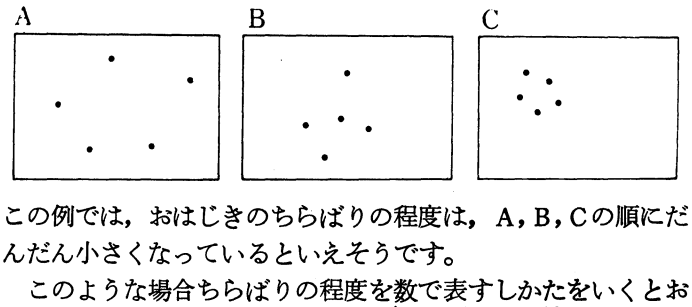
我々は，算数・数学教育の問題において問題に対する解答が一意的に決まるような問題を closed な問題と名づけ，これに対して正答がいく通りも可能になるように条件づけた問題を結果がオープンな問題という意味でオープンエンドな問題 (open-end problem，未完結問題) と呼ぶごとにした[6]。

研究の当初では，オープンエンドな問題が数学教育の高次目標を評価するための手段として有用なものであることを実証しようとするものであったが，次第にこの種の問題の解決を中心テーマとする授業が算数・数学科の教育の改善に有効ではないだろうかという考えに至り，その確認に取り組んべきている。

オープンエンドアプローチと呼ぶ指導の仕方は，「オープンエンドは問題を課題として，そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展開し，その過程で既習の知識・技能・考え方をいろいろに組合せて新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方」を意味するものとする[6]。

以下ではオープンエンドは問題の例とオープンエンドアプローチの例を挙げて，その基本的考え方を説明する。なお詳しくは1)2)12)等に多くの実例があるので，ここでは我々が一連の研究で使ったオープンエンドな問題の典型的な例を1つ示し，次に日常の授業の教材からオープンエンドアプローチによる授業の構成法の1例を示す。

A，B，Cの3人でおはじき遊びをしたら，下の図のようになりました。この遊びでは，落したおはじきのちらばりの小さい方が勝ちとなります。




この例では，おはじきのちらばりの程度は，A，B，Cの順にだんだん小さくなっているといえそうです。

このような場合ちらばりの程度を数で表すしかたをいくとおりも考えて下さい。

図-1

これは，2次元のちらばりの程度を数値化させる問題であるが，数値化の方法はいろいろ考えられ解は一意に決められないものである。調査によると生徒の反応は次のように分類できる[7]。

ⓐ点を結んでできる多角形の面積 ⓑ多角形の周の長さ ⓒ点を結ぶ最大線分の長さの和 ⓓ任意の点から各点への長さの和 ⓔ円ですべての点をおおうときの円の半径 ⓕ座標の考えによる平均偏差・標準偏差に近い方法 ⓖ平面上に方眼をかいておきそこに落ちた方眼の数

これをオープンエンドアプローチによる授業の展開では次のような方法をとることになる。まずこのような問題にはとまどう生徒もいるので説明を加えて題意を把握させ，充分に時間を与えていろいろな考えを自由に出させる。上記ⓐ〜ⓖのような考えが出たきたところで，それぞれについて検討させる。これらの方法にはそれぞれ長所や短所がある。たとえばⓐの方法では点が一直線上に並んだ場合に不都合が起こるし，ⓖの方法でちらばりの程度は異る場合に同じ数値になったりまた逆になる場合も起る。授業ではこのようなそれぞれの長所や短所を指摘させなからより適当な数値化の方法を考えさせていく。生徒が個々に考えたアイデアを発表させ吟味させながら，つまりそれらの方法を一般化するときの利点や不合理を発見させなから2次元のちらばりの考え方を指導する[8]。

この教材は小学校から高校までのどん段階でも教材化しうるものである。オープン－エンド－アプローチの意図は充分生かされることは実証されている[8]。しかし2次元のちらばりは普通のカリキュラムからは外れた教材であるので，次に教科書にある教材のオープン化の例を示す。

（例2）重心の定理

「三角形の3つの中線は1点で交り，その交点Gは3つの中線をそれぞれ2：1の比に分ける。このを三角形の重心という。」

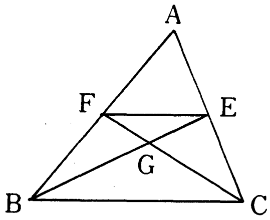
この定理の証明では次のような図を示して

「BC と EF の間にどんなことが言えるか」

「△GBC∽△GEF を証明せよ」

「点Gは線分 BE，線分 CF をどんな比に分けるか」

「AD と BE の交点 G′ の場合はどうか」



図－2

などの段階的な設問をして結論へ誘導したり，或いは，すぐに証明の記述を始めたり[9]するような説明がされるのが普通である。このような課題の与え方は生徒が自由な思考をする余地がほとんどなくこれを我々は closed な問題と呼んでいる。これに対して次のような課題の与え方が考えられる。

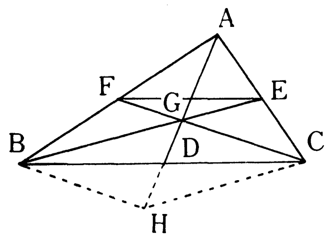
右の図は次の2つの性質を持つように書かれた。

1　AD，BE，CF は三角形 ABC の中線である。

2　四辺形 BHCG は平行四辺形である。

問1　下の三角形を使って（略）1と2の性質をもつような図を作って下さい。また点Hはどのように決めればよいですか。

問2　右図にはどんな性質がありますか。いろいろな観点からできるだけたくさん見つけなさい。



図－3

問3　問2で見つけた性質で，成り立つことが簡単にわかるもの証明のいらないもの，証明の必要なものに分けなさい。

このような活動をさせたのち重心の性質の証明方法を考えさせる。この課題の与え方は，正答がいく通りも可能となり生徒の多様な思考を促しており，オープンエンドな問題を取り上げていると言える。この授業の展開を図式化すると次のようになる。

普通の授業の展開や教科書等では，(1)から(3)への一本道を直接進む方法をとり，(1)から(2)，

(c)
(a)
(1)問題場面を与える
(2)作図方法や性質を列挙させる
(b)
(3)証明方法を考えさせる

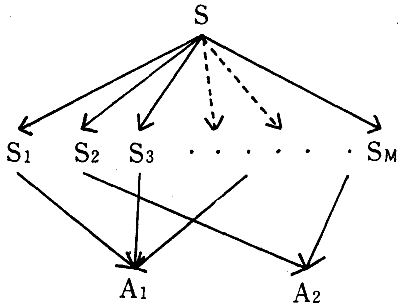



図-4

(2)から(3)へと移る段階は，特に設定しない。しかし段階(a)は(3)が成功するかどうかのポイントである。何故なら，上の例で(2)が充分に尽されていれば，重心の性質の証明が完成する為には，(2)で発見した多くの性質から仮定と結論が何であるかをまず探し証明に必要な性質を取捨選択し，正しい順序で配列していく作業が残っているにすぎないのであるから。もちろん，これは簡単なことではないが。

証明でつまずく場合には次の2つの段階でのつまずきが考えられる。

(1) 証明に必要な性質を想起できない。

(2) 性質には気づいているがそれらが証明にどう結びつくのか不明である。

(1)の段階の重要性は実際の指導では見逃がされがちである。ところが(1)の段階つまり図の中に潜在する性質を発見する（この段階では直観的でよい）ことができなければ，次の段階の証明はできないことになるのであるから，この点に着目した指導が必要であると考える。ここに述べたオープンエンドアプローチによる指導のねらいはそこにある。

**(二) オープンエンドアプローチに関連する研究**

能田氏は，オープンエンドアプローチによる指導の理論的背景をヘルバルトの「タクト論」とデューイの「知性化」に求めている。筆者は，オープン－エンドな課題の与え方が要求している思考は数学教育における創造性と密接に関連があり，またそれを授業で生かす為には数学の発見の発想やKＪ法の研究が有効であると考えている。

(1) 数学教育における創造性

創造性とオープンエンドアプローチの考え方との関連に ついては 既述した[3)4)]。 要約すると次のようなことである。

創造性に対する研究は数多くなされおり創造性の意味も様々であるが，心理学的な考え方の代表的なものに J.P. Guilford の考え方がある。そこでは，創造性に強く寄与する因子として発散的思考 (divergent thinking) を挙げ，そして発散的思考は更に fluency（流暢性），flexibility（柔軟性），originality（独創性）などに分析されるとしている[10)]。数学教育における創造性の研究でもこの考え方を踏襲したものが多い[11)12)]。したがって数学教育における創造的能力も発散的思考に集中するという考え方に立っている。そこで言われる発散的思考とは，収束的思考と対比して用いられ，収束的思考とは1つの解を求めたり解があるかないかなどを解答させるものであり，発散的思考は1つ

の問題場面において解が１通りでなく多様な解を考えさせる思考を意味している。オープンエンドアプローチによる指導はこのような発散的思考を積極的に利用することで授業を展開する方法であるからこのような意味で創造性研究はオープン－エンド－アプローチの研究と関連するところが多い。

また数学教育における創造性研究では，数学における創造性を能力としてとらえ，それを測定し数量化しょうとする立場での研究がある[13]。そこでは数学における創造性テストと呼ぶテストを作り，それらを流暢性，独創性，柔軟性などの観点からそれぞれ反応の総数，ユニークさ，アイデアの総数として評価する方法がとられることが多い。創造性テストとして用いられる問題場面はオープンエンドな問題である。しかし内容的には数学的にあまり意味がないと思われるような問題もある。妥当性は吟味が必要である。

数学教育における創造性を発散的思考にのみ限定した捉え方は適当とは言えないが，このように収束的思考より発散的思考が重視される理由は，１つに記憶より思考が，注入主義よりも開発教授が大切であるという思想があることにもよるが，従来の学習指導ではあまりに求答主義の分析的思考や収束的思考が重視されすぎていたという反省の意味もあるのではなかろうか。

オープンエンドアプローチによる指導はこのような反省の上に立った新しい指導方法と言うこともできる。

(2)　数学における発想

ポアンカレがフックス関数に関する性質を発見したときの経過を詳説している[14]中で，ある種の問題を暫く考えて解決できず，一時考えることをやめ，数学とは全く関係ないことをしている時に突然啓示があり急転直下難問の解決を見たことが述べられている。この事が良く創造性の研究などにも引用される。そしてそのような数学的な発見の過程の分析がなされている。例えば黒田氏は[15]，

①　課題意識ができる段階

②　模索の段階で試行錯誤が行なわれる

③　あたための段階で意識的な努力は中止し代りに無意識的な活動が続く

④　洞察の段階で直観や霊感が出てくる

⑤　検証の段階で論文その他他人にも客観的に知りうるような作品に表して吟味が行われる。

と５段階に分析している。この他にも創造活動を段階に分ける考え方はいろいろある[16][17]。

しかし，このように発見の過程をいかに細く分析しても何故④の段階の思考が始るのかは解明できていない。ポアンカレの発見の例では天才的なインスピレーションだけが強く印象づけられるのである。他の人が，数学の難解な問題に直面したときに①②③と同じ経過をたどってポアンカレと同じ行動をとったとしても問題の解決にいつでも到達するとは思われない。そして，ポアンカレのこのような方法では無駄や失敗も多く発明や発見に至らない徒労に終ってしまうことも多いのではないかと考えられる。しかしポアンカレは次のようにも述べている。「(③のような）無意識的活動は（①②のような）意識的活動が一方に於てこれに先だち，また他方において続く場合にのみ可能

なのであって，さもなければ決して効果はあがらない……。」そして「すすんで努力して一見途方もない見当外れをしたかのような気が続いた後でなければ突然の霊感は下っていない」[18] と③の潜在的自我が数学上の発見に重要な役割を果たすことを認めながらも①②の意識的自我が不可欠であるとしている。

一方　アダマールは，③のような無意識過程を分析して，「インスピレーションは全く偶然ではあり得ない。無意識の過程における思考は通常の論理的分析の操作や意識的思考のような言語を用いたものではないが，それに代る別の形の思考（綜合と称している）がなされている」[21] と言う。また川喜田氏[19]はポアンカレの発見における③の段階の無意識活動を「ＫＪ法[20]と同じような手続きがポアンカレの頭の中では非自覚的に進行していたのではないか」と指摘している。つまり，数学の問題に関する情報は最初から頭の中に点在していて内面的な努力によってそれらの情報がグルーピングされ数学の問題の解決に結びつくアイデアが生れたのであるとしている。ポアンカレやアダマールは発明や発見のような創造活動は「観念の組合せで起る。創造することとは無用な組合せをつくらないで有用な組合せをつくることである。発明や発見は識別であり区別である」[22]と言っているが，ＫＪ法のグルーピングはこのような創造活動を念頭操作から具体的操作活動に転換したものであると言うことができる。さらに川喜田氏は「ポアンカレの場合は，必要な情報をその都度外に出して定着させないで頭の中に詰め込んだままで無理をしている。内面的な過重な努力をもっと意識的に外に吐き出して図解や文章にしながら，さらに人間的な能力を加えた方がすばらしい成果をもたらすのではないか」[23] と述べている。

以上述べたような数学における発見の分析研究は，数学教育に大きな示唆を与えてくれる。仮に数学の問題があったとする。その問題に対していろいろなアイデアが浮かび交錯させながら解決方法を模索する段階がある。このような意識的活動で解決せずに無意識的活動ののち突然啓示があって解決することがあっても，意識的活動が充分にはされることなしには啓示もありえないとポアンカレ等は指摘する。また，「無意識的活動の部分もできるだけ意識化する方が良いのではないか」と川喜田氏は言っている。つまりたとえば意識的活動で見つけたアイデアを問題の解決まで結びつけることができない，アイデアは一見全く関連がないように思われ，問題の解決につながるような意味あるものに組み立てることができないとき，まず多くのアイデアをカードに書きとめるなどの形に残しそれらをグルーピングしたり配列したりするような作業をしながら，問題解決に結びつく選択や有用な組合せを構成する方法が有効ではないかと言っているのである。

児童や生徒の算数，数学の学習の場合も同様な事が考えられる。図形を用いた論証の問題を例にとろう。まず証明に用いられる図を見て生徒は様々な性質に気づく必要がある。そしてそれらの性質の中には証明に必要な性質やアイデアが必ず含まれていなければならないので発見できる性質やアイデアは豊富な程良い。次にそれらの性質やアイデアから証明に有用なものを抽出して，組合せ，順序よく配列することができなければならない。

オープンエンドアプローチによる指導の有効性は多々研究されているが，本稿では上記の２つの

点を指導できる指導方法としてオープンエンドアプローチが有効であることを実証したい。たとえば，前節の重心の問題をオープン化した課題の与え方を例にとることにする。ここでは，Ⅱ，Ⅲのような設問によって発散的思考を促すのがオープンエンドアプローチの１つの特徴であった。p. 46の ⓐの段階は生徒がそれぞれに見つけ出した性質を意識的に外に出させようとする意図があるそして次には，意識的に外に出させた性質を証明と結びつけるために，つまり ⓑの段階でＫＪ法的手法の導入が有効であると考える[24]。

次節では，オープンエンドアプローチによる指導を，中学校３年の教材「円と接線」の性質を用いた論証指導の授業で実験した結果を報告したい[25]。

## 〔Ⅱ〕 オープンエンドアプローチによる授業

### 性質カードを用いた図形の論証力を高める指導
### ―中学校３年「円と接線」を例にして―

前節で，オープンエンドアプローチによる授業の関連する研究や理論的背景，また授業の構成方法等について述べた。そして最後にオープンエンドアプローチによる授業の効果についての仮説を設定した。以下では，この仮説を検証する為に実施した授業の結果を報告する。

**(一)　研究の目的および方法**

授業研究者：　大分県宇佐市立宇佐中学校　高堂年幸

研究の仮説：　生徒が証明でつまずく大きな原因として大きくは次の２点が考えられる。

(1)　証明に必要な性質を完全には見つけ出せない。

(2)　性質には気づいているが，それを証明に結びつけることができない。

したがって，論証の指導では，まず証明に必要な図形の性質を十分に時間を与えてみつけ出させる（授業をオープン化することになる)。次にそれをカード（これを「性質カード」と呼ぶ）に記入させる。この性質カードを用いて思考の視点や方向を明らかにして考えさせれば（ＫＪ法的技法を取り入れることになる）証明の見通しを持つことができ，さらに意欲も高まるであろう。

研究のねらい：(1)　多様な性質を含む課題とその与え方を工夫する。

(2)　課題から多くの性質を見つけさせ，その性質を証明方法の発見に役立たせる手だてを工夫する。

研究の方法：宇佐中学校第３学年の１学級（実験群33人）に実験授業をする。また同学年のほぼ同一レベルの学級（統制群33人）には教科書どおりの普通の授業を実施して事前，事後における両学級の論証力を比較し検証する。さらに数学の学力により実験学級を上位（９人)，中位（15人)，下位（９人）に分けその変容をみる。

実施期：昭和58年２学期

(二)　中学校３年「円と接線」の指導計画（略）

(三)　「性質カード」を用いた論証指導

課題づくりの工夫　課題づくりにあたって次の点に留意した。①既習の性質（三角形の合同や相似など）を豊富に含む。②未習の性質（以後学習する円と接線の長さや角に関する）を含む。③見つけた性質が未習の性質の証明に生かされる。④観点（辺，角，位置関係）を豊富に含む。⑤下位の生徒もみつけられるような性質を含む。⑥できるだけ多様な解決方法が見つけられるようにする。以上をふまえて次の課題を作った。

円に内接する三角形ＡＢＣの辺ＡＣの両端から接線を引き，その交点をＰとする。ＯとＡ，ＯとＣをそれぞれ結び，線分ＯＰとＡＣとの交点をＭとするこの図についていろいろな観点からながめ，調べた関係をかけ。

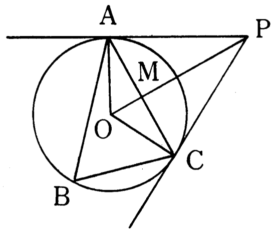



図-5

「性質カード」を用いた指導

課題の与え方（オープン化）

題意を説明し，できるだけ多くの性質を出させ，課題の中の図を印刷した小さなカード（縦 3cm 横6cm）１枚に１つずつ性質を記入させる。生徒が見つけた性質は表１のとおりである。

生徒にとってこのような課題の与えられ方は初めてであり，解答に戸惑いが見られるので，題意の説明に加えて解答法についてある程度の示唆を与える必要がある。また十分な思考時間を与えな

表１

| | 性質 | 人数 |
|---|---|---|
| 辺 | ①　ＡＰ＝ＣＰ | 27 |
| | ②　ＡＯ＝ＣＯ | 27 |
| | ③　ＡＭ＝ＣＭ | 30 |
| 角 | ④ ∠ＡＯＰ＝∠ＣＯＰ | 19 |
| | ⑤ ∠ＡＰＯ＝∠ＣＰＯ | 20 |
| | ⑥ ∠ＰＡＭ＝∠ＰＣＭ | 20 |
| | ⑦ ∠ＯＡＭ＝∠ＯＣＭ | 25 |
| | ⑧ ∠ＡＭＰ＝∠ＣＭＰ＝90° | 24 |
| | ⑨ ∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＰ＝90° | 16 |
| | ⑩ ∠ＡＭＯ＝∠ＣＭＯ＝90° | 13 |
| | ⑪ ∠ＡＭＰ＝∠ＯＭＣ | 5 |
| | ⑫ ∠ＡＭＯ＝∠ＰＭＣ | 7 |
| | ⑬ ∠ＭＣＰ＋∠ＣＰＭ＝90° | 4 |
| | ⑭ ∠ＡＯＭ＋∠ＭＡＯ＝90° | 2 |
| | ⑮ ∠ＭＰＡ＋∠ＰＡＭ＝90° | 3 |
| | ⑯ ∠ＭＡＯ＋∠ＰＡＭ＝90° | 1 |
| | ⑰ ∠ＯＣＭ＋∠ＭＯＣ＝90° | 4 |
| 位置 | ⑱ ＡＰ⊥ＡＯ，ＯＣ⊥ＯＰ | 8 |
| | ⑲ ＡＣ⊥ＯＰ（含ＰＭ，ＯＭ)） | 21 |
| 二等分線 | ⑳ ＯＭは∠ＡＯＣの二等分線 | 1 |
| | ㉑ ＯＰは∠ＡＰＣの二等分線 | 3 |
| | ㉒ △ＡＯＰと△ＣＯＰは二等辺三角形 | 2 |

| | 性質 | 人数 |
|---|---|---|
| 形 | ㉓ △ＡＣＰは二等辺三角形 | 4 |
| | ㉔ △ＡＯＣは二等辺三角形 | 7 |
| | ㉕ △ＡＭＰと△ＣＭＰは直角三角形 | 5 |
| | ㉖ △ＯＡＭと△ＯＣＭは直角三角形 | 2 |
| 面積 | ㉗ △ＡＭＰ＝△ＣＭＰ | 6 |
| | ㉙ △ＯＡＭ＝△ＯＣＭ | 5 |
| | ㉙ △ＯＡＰ＝△ＯＣＰ | 2 |
| 合同 | ㉚ △ＡＭＯ≡△ＣＭＯ | 26 |
| | ㉛ △ＡＰＯ≡△ＣＰＯ | 19 |
| | ㉜ △ＡＭＰ≡△ＣＭＰ | 25 |
| 相似 | ㉝ △ＯＡＰ∽△ＡＭＰ | 1 |
| | ㉞ △ＡＯＭ∽△ＰＡＭ | 9 |
| | ㉟ △ＭＣＰ∽△ＣＯＭ | 5 |
| | ㊱ △ＭＯＣ∽△ＭＣＰ ∽△ＡＯＭ∽△ＡＭＰ | 1 |
| その他 | ㊲ ∠ＤＡＯ＝∠ＦＣＯ＝90° | 1 |
| | ㊳ ∠ＡＯＣ＝2∠Ｂ | 21 |
| | ㊴ ∠ＡＯＰ＝∠ＣＡＰ | 1 |
| | ㊵ 弧ＡＥ＝弧ＥＣ | 2 |
| | ㊶ おうぎ形ＯＡＥ＝おうぎ形ＯＥＣ | 2 |
| | ㊷ ∠ＯＡＰ＋∠ＡＯＰ＋∠ＡＰＯ＝180° | 1 |
| | ㊸ ∠ＭＡＰ＋∠ＡＰＭ＋∠ＡＭＰ＝180° | 1 |
| | ㊹ ∠ＯＡＭ＋ＡＯＭ＋∠ＡＭＯ＝180° | 1 |

ければ直観的に判断できるような性質だけの発見にとどまり質的に高い性質の発見があまり期待できない。しかしこのような課題に対する思考を通して，多様な観点から数学的性質を観察する態度が育つと思われる。

このあとで，見つけた性質を説明できるものと説明できないものに分けさせたりして，証明の必要性や視点・方向などを示唆し，簡単に説明できる性質については，生徒に発表させるなどして，証明問題に対する生徒の意欲化への手だてをとった。特に中位の生徒に効果があった。

証明の見通しをたてさせる指導

$\angle AMP = \angle CMP = 90^\circ$ の証明の手だてを例にとって説明する。まず次のような内容の指示プリントを配り(a)から(d)の順に考えさせ，また，「重要事項一覧表」(ここでは三角形の合同条件)を持たせて必要に応じて使用させた。

(a)　どの図形に着目すればよいか。

(b)　着目した図形に含まれる性質を書いたカードを集める。

(c)　集めたカードを見て，性質どおしの関係から新しく導ける性質はないか。

(d)　証明に必要なカードを集めて，筋道に合うようにカードを並べよ。

実際には，前時までに作成し説明した「性質カード」のうち①,②,④,⑤,⑥,⑦,⑨,㉓,㉔,㉙,㉛の11枚のカードを使って説明させた。次の（表２）はＮ子（下位群）の思考の経過である。

表２　Ｎ子の思考の経過

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓓ |
|---|---|---|---|
| △ＡＯＣに着目する。 | ＡＯ＝ＣＯ，∠ＡＯＭ＝∠ＣＯＭ，∠ＯＡＭ＝∠ＯＣＭ | 新しく導ける性質を考える。 | カードをみるが，何を根拠にしたらよいかがつかめなく，いきづまる。 |
| Ｔ：他の図形に着目してみよ。──→しばらく考える。※Ｔは指導者の助言，→印はそのときの生徒の反応 | | | |
| △ＭＡＰと△ＭＣＰに着目する。 | △ＡＰＣは二等辺三角形，∠ＰＡＭ＝∠ＰＣＭ，ＰＡ＝ＰＣ，∠ＡＰＭ＝∠ＣＰＭ | 直角三角形の合同がいえそうだ。 | カードを並べ証明の記述にかかるが，確かめていく中で，合同条件に合わないことに気づく。 |
| Ｔ：「重要事項一覧表」で条件をよく調べてみなさい。──→一覧表とカードを見比べている。 | | | |
| | | 合同にはなりそうだと考え，条件は一辺とその両端の角が等しいことに気づく。 | ①，⑥，⑤，㉜，⑧の順にカードを並べる。 |

「性質カード」は着目する図形の決定や証明するための条件を確めるのに効果が見られた。「指示プリントは自ら思考する方向づけになった。証明方法の発見に行き詰まった時は視点を変更させたり筋道を立てて考えさせたりすることの助言が必要である。推論の展開や証明の記述を行うときの資料として与えた「重要事項一覧表」は図形の性質を確認することや性質の想起に役立った。

表3　3人の抽出生徒の反応

| | H 男 （上位） | K 子 （中位） | N 男 （下位） |
|---|---|---|---|
| 着目した図形 | 四角形ＡＯＣＰ | △ＰＯＣと△ＡＭＰ | △ＡＯＰ |
| その図形に含まれる「性質カード」を集めよ。 | ＡＰ＝ＣＰ<br>∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＰ＝∠Ｐ<br>ＡＯ＝ＣＯ | ∠ＡＰＯ＝∠ＣＰＯ<br>∠ＡＭＰ＝∠ＣＭＰ＝∠Ｒ<br>∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＰ＝∠Ｒ | ∠ＯＡＭ＋∠ＡＯＭ＝∠Ｒ<br>∠ＰＡＭ＋∠ＯＡＭ＝∠Ｒ<br>∠ＯＡＰ＝∠ＣＭＰ＝∠Ｒ |
| 集めたカードをみて，性質どうしの関連から新しく導ける性質はないか。 | ∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＰ＝∠Ｒだから，四角形ＡＯＣＰは円に内接する。 | △ＰＯＣ∽△ＡＭＰ | △ＡＯＰ，△ＡＭＰ，△ＡＭＯは直角三角形 |
| 証明に必要なカードを集めて，すじ道に合う順にカードを並べよ。 | ∠ＯＡＰ＝∠ＣＯＰ＝∠Ｒ<br>∠ＰＡＣ＝∠ＡＯＰ<br>∠ＡＯＰ＝∠ＣＯＰ＝∠Ｒ | ∠ＡＰＭ＝∠ＣＰＭ<br>∠ＡＭＰ＝∠ＣＭＰ＝∠Ｒ<br>∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＰ＝∠Ｒ | ∠ＯＡＭ＋∠ＡＯＭ＝∠Ｒ<br>∠ＯＡＰ＋∠ＣＭＰ＝Ｒ<br>∠ＰＡＭ＋∠ＡＰＭ≒∠Ｒ |
| 証明の記述後の感想 | カードがなかったら，悪戦苦闘していたところだろうが，早く証明ができてうれしかった。 | 普通なら，先生がいった証明を写すくらいだったけど今度は自分からカードを使って証明できたのでよかった。 | 日頃あまり思いつかないが「性質カード」を使うと，とたんに次から次へと考えることができ，証明がわりに簡単にできた。 |

証明の指導

ここでは，前時の学習を深め多様な証明方法を考えさせなから論証力を高めることをねらいとする。実際には，「性質カード」，「指示プリント」，「重要事項一覧表を使って，∠PAC＝∠POC の証明を取り上げた。表①の性質のうち前時まで説明した25個の性質それぞれ記入した25枚の性質カードを使用させた。表③は上位，中位，下位の３人の生徒が見通しを立てるまでの思考の経過と感想である。

オープン化によって多様な性質を見つけさせてきたことが本時の証明では生きてきた。証明で行き詰まったとき自力で観点を変更できる生徒が増えてきた，またそのことが多様な証明方法を発見することにつながった。しかし反面，証明方法を着想させるのに時間を要する。特に，下位の生徒には，性質カードの利用の仕方を含めて指導方法を工夫する必要がある。

**（四）　論証力の変容と数学的思考の多様化**

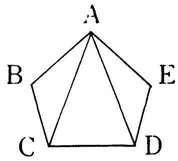
(1)　論証力の変容

図５ような問題で，オープジエンドアプローチによる授業を行なった実験学級と普通の授業法をとった統制学級に対して，実験の事前と事後に論証力を調査した。その結果が表４である。

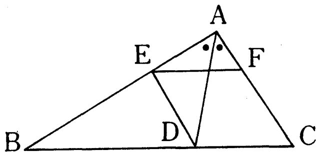
Ⓐ，Ⓑともに事前においても実験学級が統制学級より正答者数か上まっているが有意差ではない。事後の結果はⒶ，Ⓑ，Ⓒいずれも有意な差をもって実験学級が統制学級より正答者が多い。統計的にもオープン化の論証力向上への有効性が示されたといってよい。また上，中，下位群の各層別にⒷについて調べた結果では，中位のグループに効果が大であるように思われる。しかし有意な効果で

論証力の問題

Ⓐ正五角形ＡＢＣＤにおいて，対角線ＡＣ，ＡＤをひけば，ＡＣ＝ＡＤである。これを証明せよ。




Ⓑ下の図のように，△ＡＢＣのＡの二等分線がＢＣと交わる点をＤとし，ＤからＡＣに平行線をひき，ＡＢとの交点をＥとし，ＥからＢＣに平行線をひき，ＡＣとの交点をＦとすればＡＥ＝ＦＣであることを証明せよ。




Ⓒ下の図のように，円Ｏの外の点Ａから，円Ｏに２本の接線をひき，それぞれの接点をＢ，Ｄとする。接点Ｄから，ＡＢに平行線をひき，円Ｏとの交点をＣとし，ＢとＤ，ＢとＣを結ぶとき，ＢＣ＝ＢＤを証明せよ。

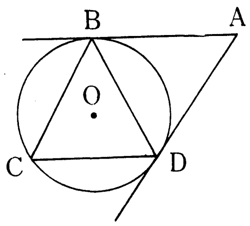



図-５

表４　論証力の結果（数字は正答者数）

| 問題＼学級 | | 実験学級 | | 統制学級 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 事前 | 事後 | 事前 | 事後 |
| Ⓐ | | 24 | 31** | 19 | 20 |
| Ⓑ | | 16 | 23** | 11 | 12 |
| Ⓒ | | 0 | 25** | 0 | 11 |
| Ⓑ | 上位 | 8 | 9 | | |
| | 中位 | 7 | 12 | | |
| | 下位 | 1 | 2 | | |

※　左は問題Ⓑについて，実験学級の正答者数を各層毎に記入したものである。

**1％有意

はなかった。また，実験学級における証明の記述内容を見てみると，性質を書きぬくようになったこと，記述に論理的な筋道を正確に書けるようになったことなどの変容が見られた。

数学的思考の多様化の調査問題

下の図は二等辺三角形ＡＢＣ（ＡＢ＝ＡＣ）底角の二等分線とＡＢ，ＡＣとの交点をＤ，Ｅとし，ＢＥとＣＤとの交点をＧとする。また，∠ＡＣＨの二等分線とＢＥの延長との交点をＦとする。この図について，いろいろな観点からながめ調べた関係をかきなさい。

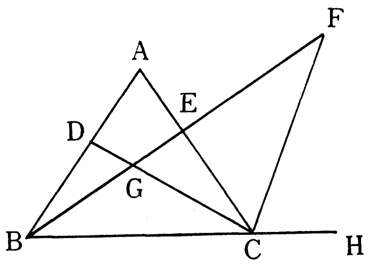



図-６

(2)　数学的思考の多様化

オープンエンドアプローチによる授業を３回実施した後，図６のようなオープンエンドな問題によって，実験学級と統制学級について数学的思考の広がりについて調査した。表５は生徒が発見した関係の個数を観点毎に合計したものである。図７は表５の観点を更に細く分析して，各自の発見した関係を観点の数に換算した観点数の度数分布表である。

ここで言う「数学的思考の広がり」とは，前節で説明した数学教育の創造性の研究によると発散的思考とも言うべきものが，表の結果的「流暢性」図７は「柔軟性」と言うことできる。オープンエンドアプローチによる授業の重要なねらいであるので当然の結果でもあるが，その効果が大きいことを数値は示している。

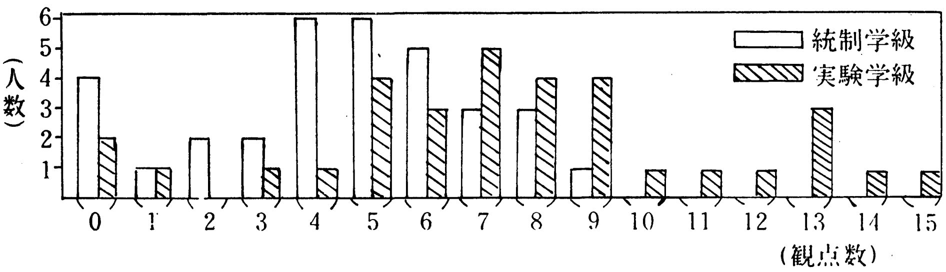
表５　思考の多様化の調査結果

| 観点＼学級 | 実験 | 統制 |
|---|---|---|
| 辺 | 125 | 84 |
| 角 | 209 | 111 |
| 位置関係 | 22 | 3 |
| 形 | 56 | 34 |
| 合同 | 55 | 45 |
| 面積 | 38 | 18 |
| 相似 | 18 | 8 |
| その他 | 3 | 1 |

授業研究のまとめと今後の課題

(1)　のオープン化の良し悪しは，生徒の意欲化に影響を及ぼすので課題の与え方が重要なポイントである。オープンエンドな

表7 数学的思考の多様化の調査結果




問題に対して生徒は不慣れであるために，課題の充分な説明が不可欠で時間も要するので事前に検討する必要がある。

(2) オープンエンドアプローチによる授業を心掛けると，数学的な問題場面に対する多様な見方はかなり高まる。

(3) 今回の実験授業のように，「性質カード」を用いた証明問題の追求のさせ方は論証力の向上に有効である特に上，中位の生徒に顕著である。しかし，下位の生徒には効果は少なく今後アプローチの工夫が必要である。

## お わ り に

本稿では，オープンエンドアプローチによる指導の原理とその有効性についての仮説を中学校の実験授業によって検証した。結果を報告した実験の結果ある程度の効果があることは実証できたがまだ改良を要する点が非常に多い。中学校においても指導方法やオープン化が有効な場面について検討したり，小学校等のオープンエンドアプローチの指導についても実践研究をすすめたい。

また，〔I〕(一) の (1)で述べた創造的な思考を能力としてとらえ，それが数学教育上どのような意味をもつかについても調査したい。今はまだ，重心の問題のオープンエンドな問題で frequency, flexibility, originality 等について，付属中の生徒で測定し数学の学力，知能等との相関などを予備調査している段階である。

**注**

1) 能田伸彦『オープンアプローチによる指導の研究』東洋館出版社，1983，能田氏は注2)にある共同研究の一員であり本書はその後の氏独自の研究の成果をまとめた学位論文を平易に書き改めたものである。

2) 島田茂編『算数・数学科のオープンエンドアプローチ —授業改善への新しい提案—』みずうみ書房，1977，本書は昭和51年度までの6年間，文部省科学教育研究費補助金の交付を受け「算数・数学科の高次目標の評価方法の開発」をテーマとして研究した共同研究の成果の一部である。本稿の筆者も研究の一員として参加し上掲書の共同執筆者の1人でもある。

3) 拙稿『数学教育における評価〔I〕』中国・四国教育学会紀要，第24巻，1978，p.267-269.

4) 拙稿『数学教育における評価〔II〕—創造性について—』中国・四国教育学会紀要 第25巻，1979，p. 254-255.

5) 上掲稿 3) p.269

6) 上掲書 2) p.9

7) 上掲書 2) p.38-39 にも反応がまとめられている。筆者も昭和59年8月に鹿児島市立田上小学校で調

査した結果では ⓐ ⓑ がほとんどでⓔⓕに近いものが少数でⓖの反応はなかった。

8) 沢田利夫・杉山吉茂『現代教育評価講座4　算数・数学』第一法規，1978，p.169-179 に坪田耕三氏が小学校5年生に授業をした結果が詳しく報告されている。

9) 中学校2年数学教科書昭和59年版　学校図書版　p.166，東京書籍版 p.167

10) Guilford, J.P., The Three Faces of Intellect, American Psychologist, 1959, p.470-473

11) 沢田利夫『学教育における高次目標の評価方法に関する開発研究』，国立教育研究所資料。

12) D.S. Balka, H.L. Prouse, R. Meyer, E. Evanse など。これらの文献は上掲稿 p.269 に挙げた。その内容については上掲書11) p.31-35 や 3) p.268，4)等に紹介されている。

13) 12)に記した論文はほとんどそのような立場での論文である。

14) ポアレカレ著，吉田洋一訳『科学と方法』岩波書店，S.45，p.59-61

15) 黒田正典『創造性の心理学』朝倉書店，1970，p.2

76) G. ポリア著『いかにして問題を解くか』丸善，1954

17) 古くは，G. Wallas の①準備期　②あたため　③啓示期　④検証期の4段階に分ける例が代表的である。

18) 上掲書 14) p.60-61

19) 川喜田二郎『発想法』中公新書。

20) 詳しくは上掲書 19)にある。自由に出されたバラバラの情報を紙片に書き込んで，それら全部に目を通しながら最初は小さなグループを作り次第に大きなグループにまとめていきながら新たなアイデアを得ようとする方法である。この技法は，一見関係のないように思われる雑多で多数の点的情報から新しい関係や構造を発想するのにも効果があると思われる。

21) アダマール著，伏見康治訳『発明の心理』みすず書房，1959，p.89-90

22) 上掲書 14) p.55　上掲書　21) p.47-48

23) 上掲書 19) p.117

24) 上掲稿 3) p.269 で仮説として述べてある。

25) 高堂年幸『性質カードを用いた図形の論証力を高める指導』大分県教育センター研修生の研究報告　昭和58年度 p.78-80 の内容から本稿に必要な部分を補足し再録した部分もある。

26) 2)に記した研究は，さらに竹内芳男氏，沢田利夫氏等を中心とする共同研究「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導とその評価」へとも発展し，その成果の一部が『問題から問題へ』東洋館出版社として昭和59年4月に公刊されている。