Bulletin of the Educational Research and Development, Faculty of Education, Kagoshima University
2009, Special Issue No.5, 19-28

論文

『風船』の秘密

鹿児島大学　教育学部　磯川幸直

Mystery of Origami 'Balloon'

1　はじめに

紙を折り曲げる芸術である折り紙に関しては，これまで様々な数学的研究が行われてきた．古くから関心をもたれてきた分野は，作品を傷めることなく折紙作品を平らに折り畳むことができるかどうか (平面折り畳み可能性 flat-foldability) と，紙を折ることで数学の方程式を解くことができるかどうか，などである（たとえば，[1], [2], [3] を参照）.

平面折り畳み可能性の事を考えると真っ先に思い浮かぶ例は,『風船』であろう．まことに『風船』は，伝統折り紙の傑作中の傑作である．これについて伏見康治 [1] はつぎのように述べている：

> 正 6 面体が平面内にたたみこめることは，それほど直感的なことではなく，恐らく古典折り紙の作者は，風船に偶然に到達したのであって，正 6 面体という概念も持っていなかったに違いない．その一つの証拠は，(古典折り紙の作法に従って折って) 息を吹きこんでふくらませた風船は風船に近く丸みを帯びている．

すなわち『風船』は，立方体を平面に折り畳むことを初めから意識して発明されたものでなく，その性質の認識は後に生まれたらしい．この論文の第 2 節では,『風船』の平面折り畳み可能性を題材として，筆者が実際に行った授業の報告をする．この授業は，平成 20 年 3 月に，沖縄県宮古島の平中学校[1]の 1 年生のクラス，および西辺中学校[2]の 1 年生と 2 年生の合同クラスにおいて行ったものである．

ところで，折り紙の可能性は『紙』のもつ物理的性質に束縛されているのであって，幾何学的に厳密なレシピに従って折り紙を行っても，多少の誤差が必然的に生じる．その逆に，幾何学的に近似的なレシピに従って折り紙を行っても，一見すると精密な立体ができあがる．そこで,『風船』の伝統的なレシピは，幾何学的に厳密なものなのかそれとも近似的なものにすぎないのか，すなわち『風船』は厳密に平面折り畳み可能であるか，という疑問が生じる．第 3 節ではほじめに，有名なコーシーの定理が『風船』の平面折り畳み可能性を否定する，ことを説明する．筆者が最初この事実を認識したとき,『風船』の伝統的なレシピは厳密には実行不可能であるにもかかわらず，その製作が現実に可能となっているのは,『紙』の物理的性質に頼るか，または裏に折り込まれた余分な紙を使って，近似的に行われているためであろうと考えた．しかし後に，事実はそうではないことに気が付いた．コーシーの定理は『風船』の平面折り畳み可能性を否定しないのでる．しかし立体を平面に折り畳む変形に対する通念を捨てる

[1]宮古島市中央部に位置する生徒数 500 名程度の中学校
[2]宮古島市北部に位置する生徒数 50 名弱の中学校

ことにより，はじめて認識は整合的となる．この節では，この錯綜とした状況について説明する．なお，この節の内容は前節の内容と併せて，平成20年7月に鹿児島県加世田高等学校において，また11月に鹿児島県甲南高等学校において，授業において説明する機会をもつことができた．今回の考察が，定跡を暗記して問題を解くだけで，意味を実感することのできない数学教育の現状に対して，ひとつの清涼剤を提供することができたのであれば喜びである．

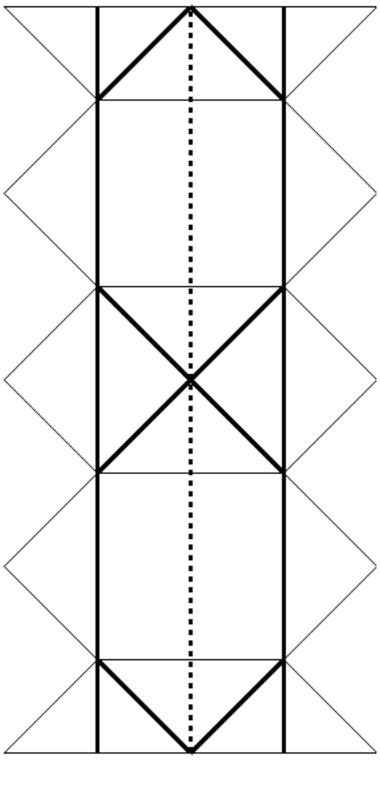
2　『風船』の授業

2.1　導入

中学生は，小学校のときに立方体やいくつかの立体の展開図について学んでいる．一方，彼らは幼少の時より折り紙も経験しているはずだが，折り紙の具体的な経験と，展開図という抽象的な概念を結びつけることは，決してしてこなかったであろう．これは，数学の抽象的な概念が，日常的で具体的な経験と遊離している数学教育の現状の一例である．

さて次の図は，伝統的な『風船』のレシピに従って折ったときにできる折り線を示している．ただし，太い実線は山折り線を，太い点線は谷折り線を表している．この図は,『風船の展開図』と呼ぶこともできる．

図 1



授業では，

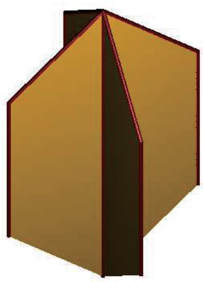
1. 始めに立方体の展開図および偽の展開図（一見すると正しく立方体を組み立てることができそうだが，実際にはできないもの）を示して，簡単に展開図の意味を復習する．
2. つぎに図１を生徒に提示しながら,「この展開図からどんな立体ができますか」，と問う．生徒は,「立方体です」，と答える．しかしこの答えはじつは誤りである．実際には，下の図２の厚さの無い（すなわち体積がゼロの）立体ができる．
3. 答えが誤りであることを告げてから，自作したデモプログラムにより，コンピュータの画面上で，折ってみる．生徒からは，デモに対して感嘆の声が挙がると同時に，この不思議な立体に大いに興味を持つ．
4. この厚さの無い立体に,「空気を吹き込みます」と言って，デモプログラムの続きを動かす．すると，厚さの無い立体が，立方体に変身する．この時点になってようやく，少数の生徒に『風船』の記憶がよみがえる．

2.2　分析という過程

伏見 [1] は，なぜ正 6 面体が折り畳めるのか，という疑問に対して，それが折り畳めるため必要なある条件を満たしていることを指摘する．

> (図２の立体は)4 個の袋を垂直軸のまわりに扉のように排列した形になっている．この袋扉の頂点（と底）の角度は $45°$ であり，肩の角度は $90° + 45° = 135°$ である．$4 \times 2 \times 45° = 360°$ であって，このとがった感じの頂点を開けば平面になりうることを保証している．$2 \times 135° = 270° = 3 \times 90°$ は，この肩がふくらませれば，3 個の直角が集まっている形になることを意味している．こういうわけで，この袋扉をふくらませた結果は，正 6 面体になりうるような幾何学的条件を満たしているのである．

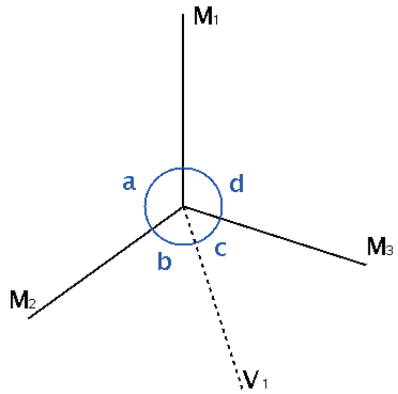
図２



上記の観察を一般化すると，いわゆる『折り紙の基本定理』に辿り着く．ここではその内容を一般的に述べることはせずに，つぎの３つの例で示すことにする（この定理の一般的な叙述

については，たとえば [1][2] を参照）.

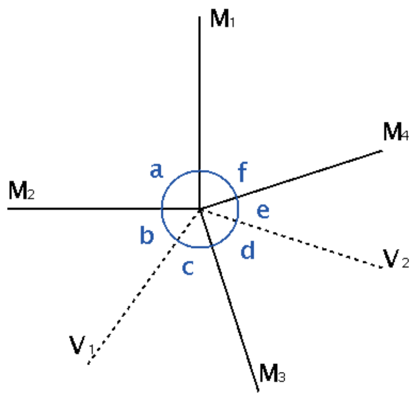
例 1 平面の内部の点から折り線が 4 本出る場合.



折り畳みができるためには，つぎの２つの条件が満たされなければいけない.

- 山折り線が 3 本，谷折り線が 1 本出る.
- ４つの角度は $a - b + c - d = 0$ を満たす.

例 2 平面の内部の点から折り線が 6 本出る場合.



折り畳みができるためには，つぎの２つの条件が満たされなければいけない.

- 山折り線が 4 本，谷折り線が 2 本出る.
- ６つの角度は $a - b + c - d + e - f = 0$ を満たす.

例 3 立方体の頂点から折り線が 4 本出る場合．折り畳みができるためには，つぎの２つの条件が満たされなければいけない.

- 山折り線が 3 本，谷折り線が 1 本出る．
- 4 つの角度は $a-b+c-d=0$ を満たす．

ただし，平面の内部の点から折り線が 4 本出る場合は，もちろん $a+b+c+d=360°$ であるが，頂点から折り線が 4 本出る場合は，$a+b+c+d<360°$ である．

授業では，

1. 図 1 に再び生徒の目を向けさせながら，全体ではなくその一部分に，具体的には立方体の上面（と下面）の中心および頂点の箇所に，折り畳みを可能にする秘密があることを指摘する．授業はこの時点から，分析（全体をその本質的な要素に分解する過程）の場面に入る．
2. はじめに例 1 の図（をコピーしたもの）を生徒に渡し，それを実際に折り畳むことにより，4 つの折り線の間にどのような関係があるかを，生徒自身で発見させる．この課題の解決に必要な知識は，角度の知識（小学校で学ぶ事柄）だけなので，多くの生徒が解決できる．
3. 同様に例 2 の図をを生徒に渡し，それを実際に折り畳むことにより，6 つの折り線の間にどのような関係があるかを，生徒自身で発見させる．この例の特別な場合が，立方体の上面（と下面）の中心の周りの折り線の配置となっている．
4. 例 3 の場合は，例 1 の場合とほぼ同様であることを説明する．(時間的な制約により，この作業は行わず，説明するだけにとどめた)．

以上の分析により，平面折り畳み可能性に対する『必要条件』を得ることができた．

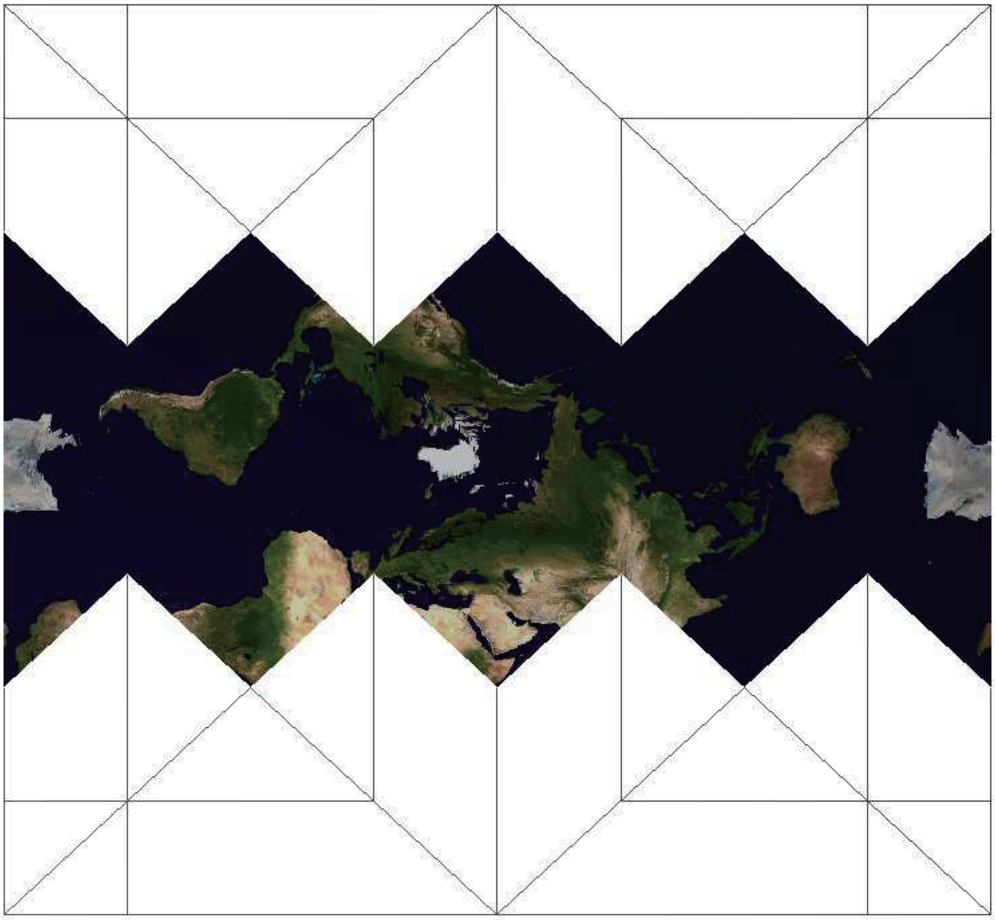
2.3　総合という過程

分析の過程により展開図の各部分が満たすべき必要条件が解かったので，つぎはその必要条件をすべて満たすような展開図から，実際に平面折り畳み可能な立体を作ることができるかどうかが問題となる．言い替えれば，分析の過程で得られた知識を利用して，全体を再構築する総合という過程の考察をする．

しかし，この逆方向の問題には次節で述べるように，大きな困難が存在する．そこでここでは,『風船』を伝統的なレシピに従って折ることにより，その結果は折り線が図 1（各部分で必要条件を満たしている展開図）のように付くことを確認するに留めた．

授業では，白紙の正方形から『風船』を折るより，生徒の興味を増すために，次の図（を上質の紙にカラー印刷したもの）を折ることにした．この図は，NASA のサイトからダウンロードした画像（人工衛星からの写真）を，筆者が OpenGL を利用したプログラムにより,『風船』の展開図に貼り付けたものである．

図３



3　『風船』の数学的分析

3.1　コーシーの剛性定理

平面図形の場合，三角形は 3 辺の長さを決めれば形が決まるが，たとえば四角形は 4 辺の長さを決めても形は決まらない．この事実を，三角形は剛性をもつと言う．

大数学者コーシーは 1813 年に立体に対してつぎの定理を発見した（数学の傑作のひとつであるその証明については．たとえば [4] を参照）.

　どんな凸多面体も，そのすべての面の形を変えないで，変形することはできない.
　すなわち，どの２面角（隣り合う２つ面のなす角）も変えることはできない.

すなわち，凸多面体は剛性を持っている.

立方体の表面に図１の折り線を付け，その折り線で囲まれた図形はすべて面と見なすことにする.（たとえば，立方体の上面は，面の中心から 6 本の折り線が出ることにより，4 個の小さ

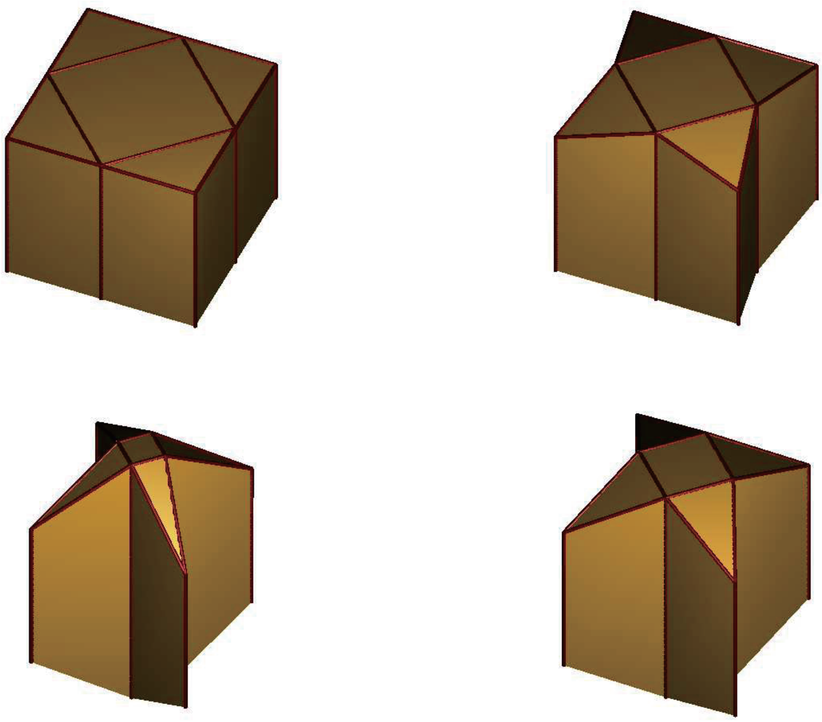
な二等辺三角形と 2 個の大きな二等辺三角形に分割される．これら 6 個の三角形をすべて面と見なす.）こうしてできた多面体は，凸多面体ではない．しかし，コーシーの定理の証明を子細に再検討すると，このような多面体も剛性を持つことがわかる．こうして，つぎの事実が判明した：

『風船』は微小な変形すらできない，ましてや折り畳むことはできない.

3.2　一時的折り線

では，傑作『風船』は実は虚構であったのか？ 結論から言うと，そうではない．実際，立方体は次ぎのようにして折り畳むことができる（変形の最後は図２である）.

図４



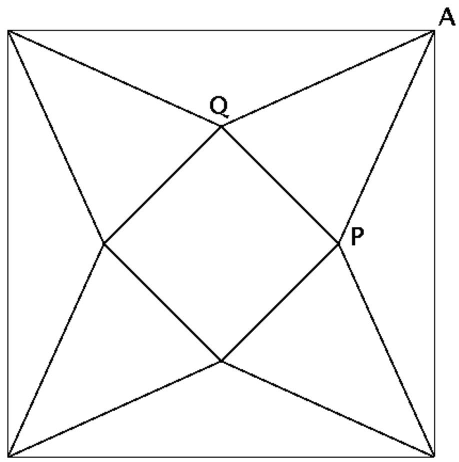
何故，この変形はコーシーの定理に矛盾しないのだろうか．図４をよく注意して見ると，立方体の上面（および下面）の折り線の位置が変化していることに気が付く．すなわち，折り線の位置が変化するので，立体の面の形が変化する．したがってコーシーの定理の仮定を満たさないので，矛盾しない．こうして，

立方体の表面に一時的な折り線を付けることにより，平面折り畳みが可能になる

ことがわかった.

高校生の参考にするために，折り線の正確な位置を述べておく．図5は立方体の上面を表しているものとし，立方体を折り畳む前の頂点の座標は $(\pm1, \pm1, \pm1)$ であるとする．とくに頂点 A の座標は $(1, 1, 1)$ である．折り畳む過程において，折り線 AP 等が現れる．点 P の x 座標が t となった時，点 P の位置は $(t, 0, 2-t)$ であり，頂点 A の位置は $(u, u, 1)$ となることが高校数学の知識で容易にわかる．ただし $u = (t + \sqrt{2-t^2})/2$ である．

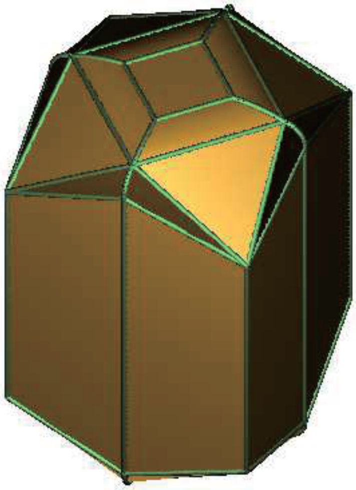
図5



3.3　曲面による変形

しかし物理的には，一時的折り線は奇妙な存在である.『紙』にいったん折り線を付けると，それは消えないで永久に残る．この物理的な矛盾は，一時的折り線を可展曲面で置き換えることにより解決できる（可展曲面についてはたとえば [5] を参照）．実際,『風船』の場合，一時的折り線 PQ は円柱の側面の一部で，一時的折り線 AP は円錐の側面の一部で置き換えることにより，変形ができる．図6にその一場面を掲載したが，台形に見える部分は円柱の側面の一部であり，三角形に見える部分は円錐の側面の一部である．

図６



結論：

『風船』を平面に折り畳むためには，その面の一部を可展曲面で置き換える必要がある．

謝辞

鹿児島大学教育学部八田明夫教授には，これまでも小学生に対して講演する機会を多く与えていただきましたが，今回も当論文を執筆する動機を与えていただき，新しい問題と発想を生むことができたことを深く感謝いたします．

参考文献

[1]　伏見康治・伏見満枝　『折り紙の幾何学』　日本評論社　1979
[2]　ゲレトシュレーガー　『折紙の数学　ユークリッドの作図法を超えて』　森北出版　2004
[3]　ハル　『折り紙の数理と科学』　森北出版　2005
[4]　フランクル・前原　『幾何学の散歩道』　共立出版　1991
[5]　ヒルベルト・コーンフォッセン　『直観幾何学』　みすず書房　1932