

An Interface Crack in a Laminated Beam Subject to Thermal Gradient

○正 深川和良 (鹿大院)  
正 有富正男 (鹿大)

正 小田美紀男 (鹿大)  
正 戸谷眞之 (鹿大)

Kazuyoshi FUKAGAWA, Mikio ODA, Masao ARITOMI, and Masayuki TOYA  
Dept. of Mechanical Engineering, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Interface Crack, Energy Release Rate, Buckling, Thermal Stress

1. 結言

中央にはく離を有する異種材積層はりを想定し、熱応力によるはりの変形およびはく離のエネルギー解放率を、古典はり理論に基づき解析する。

2. たわみの解析

図1に示すような中央部に中心対称なはく離(界面き裂)を有する異種材はりを接着して作られた積層はり温度勾配下に置かれた場合の熱応力によるはく離進展の解析を行う。等方弾性体を仮定し、厚さ、ヤング率、熱膨張係数、熱伝導率、ポアソン比をそれぞれ  $h_i, E_i, \alpha_i, \lambda_i, \nu_i$  ( $i=1,2$ )とする。ここで  $i=1$  は上のはりを、 $i=2$  は下のはりを意味する。はりの全長は  $L$ 、はく離長さは  $2c$ 、幅はともに  $b$  とする。上のはりの上面は  $T_1$ 、下のはりの下面は温度  $T_2$  に保たれているものとする。また、はく離部分において、上下層が互いに接触しない場合は特に、き裂部分に空隙が生じることに起因するき裂の上面と下面の温度ギャップが生じるであろう。簡単のため、き裂の上面温度を場所にはよらない一定値  $T_A$ 、き裂の下面温度を  $T_B$  と置く<sup>(1)</sup>。これらの温度はき裂表面の熱の流れを支配する無次元数  $B_c$  (ピオ数)によって以下のように表すことができる。

$$T_A = \frac{T_1(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad (1)$$

$$T_B = \frac{T_2(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad (2)$$

ただし、

$$\eta = \lambda_2 h_1 / \lambda_1 h_2, B_c = (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1) / \lambda_1 \lambda_2 \quad (3)$$

はく離部分上下のはりの各中立軸を  $z$  軸の原点としたときの温度分布は、それぞれ以下ようになる。

$$T = (T_1 - T_A)z/h_1 + (T_1 + T_A)/2 \quad (4)$$

$$T = (T_B - T_2)z/h_2 + (T_B + T_2)/2 \quad (5)$$

界面温度  $T_0$  は、 $B_c = \infty$  と置いて、

$$T_0 = (T_1 + \eta T_2) / (1 + \eta) \quad (6)$$

となる。したがって、接着部分の温度分布は、界面を  $z=0$  と設定すると、上下のはりに対してそれぞれ以下の

ように与えられる。

$$T = z(T_1 - T_0)/h_1 + T_0, T = z(T_0 - T_2)/h_2 + T_0 \quad (7)$$

接着部分 AB, CD のたわみの解析は Timoshenko<sup>(2)</sup> によりなされた等温変化を受けるバイメタルのたわみ解析の手法を拡張すればよい。たわみの基礎式はすでに文献(3)に導かれており、解は簡単に求めることができる。

はく離部分 BC のたわみ曲線について解析する。本報でははく離面は互いに接触していない場合を考える(この重ねはりの両端では合モーメントおよび軸方向合力は0である)。この部分は端部をヒンジで止められた重ねはりとみなすことができる。仮に  $T_1 > T_2$ 、 $\alpha_1 > \alpha_2$  の場合を考えると、はく離部は上に凸にたわみ、またはく離の上側のはりには圧縮力が誘起されている。この場合ヒンジの作用は上のはりに対しては、はりの両下すみ部に作用する水平方向の集中圧縮軸力  $P$ 、下のはりに対しては、はりの両上すみ部に作用する水平方向の集中引っ張り軸力  $P$  に置き換えることができる。自由体線図を図2に示す。ここで  $M'_1 + M'_2 = 0$  が成り立つ。また図2の力の状態を力学的に等価な材端モーメント  $M_1 (= M'_1 + Ph_1/2)$ 、 $M_2 (= M'_2 + Ph_2/2)$  および上下各はりの中立軸に作用する軸力の組み合わせ(上層に圧縮力  $P$ 、下層に引張力  $P$ )に置き換える。

$P$  の正負によって、たわみ曲線の解の形は異なってくる。以下では、 $P$  が正(はりのたわみは上に凸)の場合についてのみ記し、上に凹になる場合の式は省く(解析手順は  $P$  を負として取り扱うだけで上に凸の場合と同じである)。 $P$  が正の場合、はく離端で上下のはりのたわみが0であるという条件を課すとこの場合のたわみ曲線は以下の式となる。

$$w_1 = (M_1 + F_1) \{ (\cos k_1 x / \cos k_1 c) - 1 \} / P \quad (8)$$

$$w_2 = (M_2 + F_2) \{ -(\cosh k_2 x / \cosh k_2 c) + 1 \} / P \quad (9)$$

ここで、

$$k_1 = \sqrt{\frac{P}{D_1}}, F_1 = \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 B_c \eta (T_1 - T_2)}{12(1+B_c)(1+\eta)} \quad (10)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{P}{D_2}}, F_2 = \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 B_c (T_1 - T_2)}{12(1+B_c)(1+\eta)} \quad (11)$$

また、材端モーメント  $M_1, M_2$  は、はく離端での上下のはり

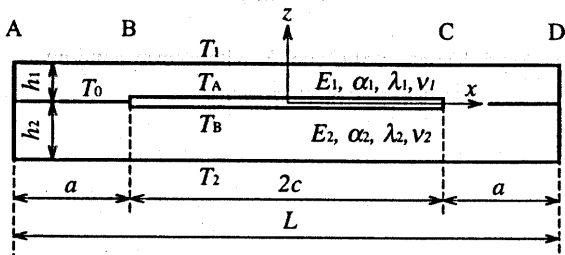


Fig.1 A laminated beam containing an interface crack

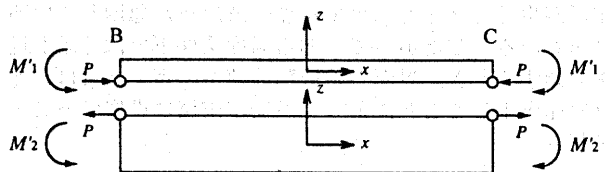


Fig.2 Forces and moments in the interval BC

りの傾きが等しいという条件から決定され、次のようになる。

$$M_1 = \frac{(F_2 + Ph/2)k_2 \tanh k_2 c - F_1 k_1 \tanh k_1 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (12)$$

$$M_2 = \frac{(F_1 + Ph/2)k_1 \tanh k_1 c - F_2 k_2 \tanh k_2 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (13)$$

ここで、 $h=h_1+h_2$ 。次に上下のはりにおける変位の適合条件より、軸力  $P$  に関する方程式を求める。変形前に中立軸に垂直であった断面は変形後も垂直関係を保つという条件より以下の関係式が成り立つ。

$$-\frac{Pc}{E_1 h_1} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 c (T_1 + T_A) - \frac{Pc}{E_2 h_2} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 c (T_B + T_2) - \frac{1}{2} \left[ \int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx - \int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx \right] + \frac{h}{2} \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=c} = 0 \quad (14)$$

式(14)は  $P$  に関する非線形方程式であり数値的に解く必要がある。

### 3. たわみ曲線の数値解例とエネルギー解放率

ここでモデル材に対する計算例を示す。図1に示すモデルにおいて、はりの長さを  $L=200\text{mm}$ 、はく離長さを  $2c=100\text{mm}$ 、上のはりの厚さ  $h_1=1.0\text{mm}$ 、下のはりの厚さ  $h_2=10.0\text{mm}$ 、幅  $b=1 \times 10^3\text{mm}$  と設定した。材料として上層にジルコニア ( $\text{ZrO}_2$ ) を想定しヤング率を  $E_1=168.58\text{GPa}$ 、熱膨張係数を  $\alpha_1=11.50 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 、ポアソン比  $\nu_1=0.32$  とし、また下層に SUS304 を想定しヤング率を  $E_2=196.13\text{GPa}$ 、熱膨張係数を  $\alpha_2=17.10 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 、ポアソン比  $\nu_2=0.29$  とし式(14)の数値解を求めた。それに基づいて得られたたわみ曲線を図3に、また得られた軸力  $P$ 、およびこれから計算された上層と下層の中心におけるたわみの差  $dw (=w_1-w_2, x=0)$  と上層上面の温度  $T_1$  の関係を図4に示す。この図では軸力  $P$  に関しては  $Bc=0$  に対応している場合を、たわみの差  $dw$  に関しては  $Bc=0, 2, 8$  に対応している場合をプロットしている。 $Bc=0$  の場合に注目してみると、軸力  $P$  は上層上面温度  $T_1$  がある温度になるまではほぼ直線的に増加していくが、それ以上の温度になるとほぼ一定の値となるのがわかる。またこの場合のたわみの差  $dw$  は上面温度  $T_1$  が  $P$  が一定となる温度以下では小さいが、 $T_1$  がそれ以上の温度になると急激に大きくなるのがわかる。すなわち上層の座屈が生じていることがわかる。

次に  $Bc$  の影響を調べるため、たわみの差についてみると、 $Bc$  が大きいほど座屈が生じる上面温度  $T_1$  が大きくなっていることがわかる。言い換えると同じ温度条件に対し  $Bc$  が小さくなるほど上層と下層の温度ギャップが大きくなり、これに伴って軸力  $P$  も増大し座屈しやすくなっていることがわかる。

Suo と Hutchinson<sup>(4)</sup> は一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。彼らの結果に基づいて、 $Bc=8, T_1=100, T_2=0$  におけるエネルギー解放率とたわみの差  $dw$  とき裂長さ  $c$  の関係を計算した例を図5に示す。この図から座屈が生じるとともにエネルギー解放率が急増していることがわかる。したがって、ある温度条件下でははく離が進展を開始するとき、界面の破壊靱性値が一定であれば、それは座屈が生じることによって不安定破壊に進展することが予想される。

### 参考文献

(1) Hutchinson, J.W. and Lu, T.J., Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 117, 386 (1995).

(2) たとえば、須藤一著，“残留応力とゆがみ”，165 (1988)，内田老鶴圃。  
 (3) 戸谷真之，小田美紀男，ラック・インディヨノ，有富正男 日本機械学会論文集，A-66, 1362 (2000).  
 (4) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., 43(1990), 1-18

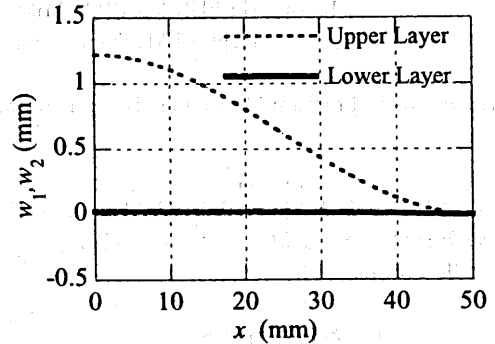


Fig.3 Example of deflection curves of upper and lower beams ( $Bc=0, T_1=200^\circ\text{C}, T_2=100^\circ\text{C}$ )

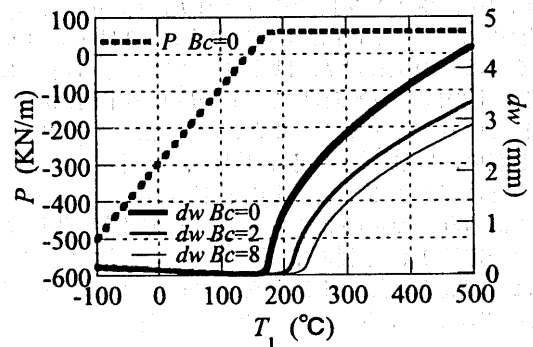


Fig.4 Variations of  $P$  and  $dw$  with  $T_1$  ( $Bc=0, T_2=100^\circ\text{C}$ )

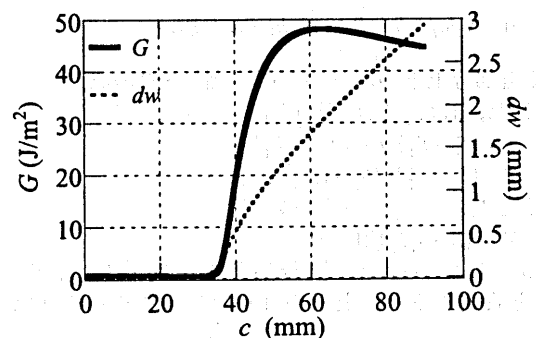


Fig.5 Variation of  $G$  and  $dw$  with  $c$  corresponding to  $Bc=8, T_1=100^\circ\text{C}, T_2=0^\circ\text{C}$