

温度こう配下における異種材積層円板中の円形はく離* (第2報, はく離面の開口を仮定したモデルの解析)

深川和良*¹, 有富正男*², 戸谷真之*²

A Disc-Shaped Interface Crack in a Circular Laminated Plate Subject to Thermal Gradient (2nd Report, Analysis of the Model Assuming the Opening of Crack Faces)

Kazuyoshi FUKAGAWA*³, Masao ARITOMI and Masayuki TOYA

*³ Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,
1-21-40 Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

Symmetrical bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped delamination subject to thermal gradient is analyzed on the basis of the theory of small deflection of plates. A disc-shaped crack model where the crack faces are open is considered. Radial in-plane forces are induced in the parts of the constituent plates above and below the disc-shaped crack. A nonlinear equation for determining the in-plane forces is derived by modeling the cracked part as two lapped discs hinged along both rims, and by imposing the compatibility condition of the deformations of the two plates. Numerical solutions are obtained for some model plates. It is shown that relative displacement at the center of the crack increases gradually with the increase in temperature gradient. However, at a critical temperature gradient, the relative displacement begins to increase very rapidly, i.e., local delamination buckling occurs. Energy release rate is small for temperature gradient below the critical value, but it takes a large value when the temperature gradient is increased above the critical value. Energy release rate also increases with the increase in the radius of the crack and hence the buckling driven delamination grows unstably.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Construction, Disc-Shaped Interface Crack, Energy Release Rate, Thermal Stress

1. 緒言

異種材料を組み合わせて作られる材料では、接合残留応力や熱応力に起因する接着面(界面)のはく離が、材料の信頼性に関する重要な問題となる。破壊力学の観点からは、積層材料を使用するにあたっては、あらかじめはく離の存在を想定し、それがいかなる条件のもとで進展するかを把握しておくことが不可欠である。

前報⁽¹⁾では温度こう配下における積層円板を想定し、微小たわみの板理論に基づき、はく離部分が全面接触する場合について解析を行った。しかしながら全面接触の仮定は常に成り立つわけではなく、たとえば一様な温度変化に対してはき裂面は常に開口していることが導かれた。そこで本研究では、前報において導いた温度こう配のもとにおける積層板の微小たわみの基礎式に基づき、はく離部分が開口しているモデルに

ついて、熱応力による板の変形、およびはく離のエネルギー解放率を解析する。前報と重複する部分については詳細を省き、結果だけを示すこととする。

なお、戸谷⁽²⁾は以前一様な温度変化を受ける場合を解析したが、そこには基本的な誤りがあった。その全面的な訂正も本論文でなされる。

2. 解析

図1に示すような中央に円形はく離を有する、材質の異なった2枚の弾性円板をはり合わせて作られた積層円板を考える。等方弾性体を仮定し、ヤング率、ポアソン比、熱膨張係数、熱伝導率、板厚を上板については $E_1, \nu_1, \alpha_1, \kappa_1, h_1$, 下板については $E_2, \nu_2, \alpha_2, \kappa_2, h_2$ とする。また、円板の半径を a , 円形はく離の半径を b とする。このような円板に対し、上板上面に温度 T_1 , 下板下面に T_2 を与えた場合、仮に $\alpha_1 > \alpha_2, T_1 > T_2$ とすると、図1に示すような上向きに凸となるような軸対称のたわみが生じる。

き裂面が開口している場合は、き裂部分に生じる空気層により熱の流れがさえぎられ、はく離の上下の面

* 原稿受付 2003年3月20日。

¹ 正員, 鹿児島大学大学院理工学研究科(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)[現: 熊本県工業技術センター生産技術部(☎862-0901 熊本市東町3-11-38)].

² 正員, 鹿児島大学工学部。

E-mail: fukagawa@kmt-iri.go.jp

における温度は異なってくる。はく離の上面温度を T_A 、下面温度を T_B とする。解析の簡単化のため T_A 、 T_B は場所によらず一定であるとする。ここで、き裂面間の熱の流れを表す無次元数 B_c (ピオ数) を導入すると、 T_A 、 T_B は付録 A、式 (28) のように B_c をパラメータとして表される。 $B_c = 0$ は、き裂面は熱的に完全に絶縁された状態に対応し、 $T_A = T_1$ 、 $T_B = T_2$ となる。また $B_c = \infty$ は空気層による熱の流れの妨害がない状態に対応し、 $T_A = T_B$ となる。以下、 $\alpha_1 > \alpha_2$ 、 $T_1 > T_2$ と仮定して解析を行う。

図2に円環部分およびはく離部分の自由体線図を示す。図2(a)に示すように円環部分内縁には今のところ未知のモーメント M_i が作用しているものとする。円環部分のたわみを w_A とする。 w_A についての解析は前報⁽¹⁾とまったく同じであり、結果は付録 A、式 (31)~(44) に与えられている。

また前報同様、はく離部分を図2(b)に示すように円周縁でヒンジ止めされた重ね板としてモデル化する⁽¹⁾。図1のように変形する場合を想定すると、ヒンジの作用は上の円板に対して円板下縁部に半径方向に作用する圧縮力(単位長さ当たり $-Z$ とする)、下の円板に対して円板上縁に作用する引張力(Z)に置き換えることができる。また、各板の縁に作用するモーメントを M_1 、 M_2 とする。これらも今のところ未知であるが、モーメントの連続条件

$$M_i = M_1 + M_2 \dots\dots\dots(1)$$

が課せられる。

上下の板のたわみをそれぞれ w_{B1} 、 w_{B2} とする。上の板に対しせん断力は以下のように与えられる。

$$Q_1(r) = Z \frac{dw_{B1}}{dr} \dots\dots\dots(2)$$

一方、前報で導いたように、せん断力に関する基礎式は均質板に対するものと同じであり、以下のように与えられる。

$$Q_1(r) = -D_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} \right) \dots\dots\dots(3)$$

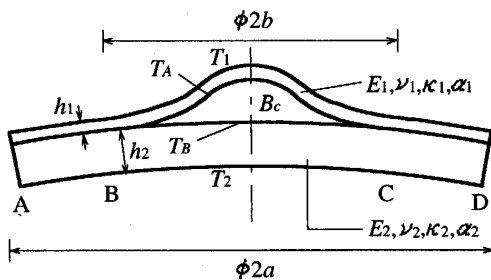


Fig.1 Bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped crack

ここで、 D_1 は上の板の曲げ剛性である。(付録 A、式(37)) したがって次式の関係式を得る。

$$-D_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} \right) = Z \frac{dw_{B1}}{dr} \dots\dots\dots(4)$$

同様に下の板に対し

$$-D_2 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_{B2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B2}}{dr} \right) = -Z \frac{dw_{B2}}{dr} \dots\dots\dots(5)$$

を得る。式(4)と(5)を積分することにより以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} + \frac{Z}{D_1} w_{B1} = K_{B1} \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{d^2 w_{B2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B2}}{dr} - \frac{Z}{D_2} w_{B2} = K_{B2} \dots\dots\dots(7)$$

K_{B1} 、 K_{B2} は未定定数である。 $r = 0$ で変位は有界であるという条件を考慮すると、それぞれの完全解は以下のように書ける。

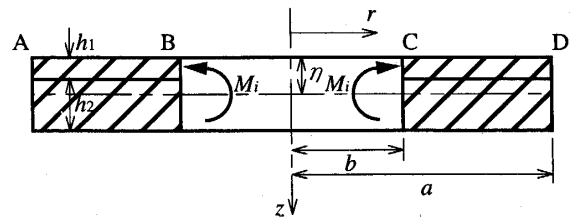
$$w_{B1} = B_1 J_0(k_1 r) + K_{B1} / k_1^2, \quad k_1 = \sqrt{Z/D_1} \dots\dots(8)$$

$$w_{B2} = B_2 I_0(k_2 r) - K_{B2} / k_2^2, \quad k_2 = \sqrt{Z/D_2} \dots\dots(9)$$

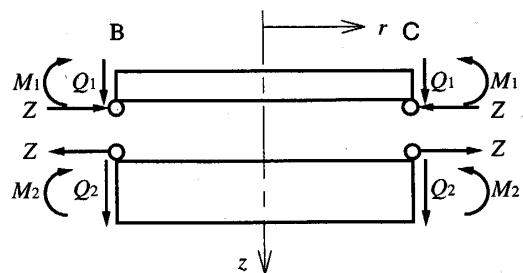
ここで B_1 、 B_2 は未定定数、 J_0 、 I_0 はそれぞれ零次の第一種ベッセル関数および第一種変形ベッセル関数である。

次に各板の曲げモーメントを求める。温度こう配のもとにおかれているとき、板の中立面に関する曲げモーメントは、上の板に対しては以下のように与えられる⁽¹⁾。

$$M_{r1} = -D_1 \left[\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} - \frac{\nu_1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} + \frac{(1+\nu_1)}{h_1} \alpha_1 (T_A - T_1) \right] \dots\dots\dots(10)$$



(a) Free-body diagram of the bonded part



(b) Free-body diagram of the delaminated part

Fig.2 Two elements of the disc

一方、図2(b)より明らかなように、 $r=b$ に作用しているモーメントは上の板に対しては、 $M_1 - h_1 Z/2$ である。したがって、式(8)、(10)より次式を得る。

$$M_1 = \frac{h_1}{2} Z - ZB_1 \left[\frac{1-\nu_1}{bk_1} J_1(k_1 b) - J_0(k_1 b) \right] - (1+\nu_1) D_1 \alpha_1 (T_A - T_1) / h_1 \dots\dots\dots (11)$$

同様に下の板に対して

$$M_2 = \frac{h_2}{2} Z + ZB_2 \left[\frac{1-\nu_2}{bk_2} I_1(k_2 b) - I_0(k_2 b) \right] - (1+\nu_2) D_2 \alpha_2 (T_2 - T_B) / h_2 \dots\dots\dots (12)$$

ここで J_1 , I_1 はそれぞれ一次の第一種ベッセル関数および第一種変形ベッセル関数である。

次に $r=b$ におけるたわみ、およびたわみ角の連続条件から

$$\begin{aligned} K_{B1} &= \frac{Z}{D_1} \left[-B_1 J_0(k_1 b) + C_{2A} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - (a^2 - b^2) C_{3A} \right] \\ K_{B2} &= \frac{Z}{D_2} \left[B_2 I_0(k_2 b) - C_{2A} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + (a^2 - b^2) C_{3A} \right] \\ B_1 &= -\frac{C_{2A} + 2b^2 C_{3A}}{k_1 b J_1(k_1 b)}, \quad B_2 = \frac{C_{2A} + 2b^2 C_{3A}}{k_2 b I_1(k_2 b)} \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。 C_{2A} , C_{3A} は円環部分のたわみ式に出てくる未定数であり、付録A、式(33)、(34)で与えられる。

M_1 , M_2 を式(1)に代入し、さらに B_1 , B_2 に対する式(13)を用いると、 M_i は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{1+Z(2b^2 S_1 + S_3)(S_4 + S_5)} \left\{ \left[\frac{h}{2} - 2b^2 S_2 (S_4 + S_5) \right] Z \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\nu_1) D_1 \alpha_1 (T_1 - T_A)}{h_1} + \frac{(1+\nu_2) D_2 \alpha_2 (T_B - T_2)}{h_2} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{B' + B'_{12}}{2(\lambda - 1) \left[(B' + B'_{12})(D + D_{12}) - B_{12}^2 \right]} \\ S_2 &= \frac{S_1 (\lambda - 1) \left[B_{12} P_t - (B' + B'_{12}) Q_t \right]}{B' + B'_{12}} \\ S_3 &= \frac{a^2 (B' - B'_{12})}{(\lambda - 1) \left[(B' - B'_{12})(D - D_{12}) - B_{12}^2 \right]} \\ S_4 &= J_0(k_1 b) / k_1 b J_1(k_1 b) - (1 - \nu_1) / (k_1 b)^2 \\ S_5 &= I_0(k_2 b) / k_2 b I_1(k_2 b) - (1 - \nu_2) / (k_2 b)^2 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

B' , B'_{12} , D , D_{12} , B_{12} , λ はそれぞれ付録A式(43)、(44)、(35)、(36)、(38)、(34)に与えられている。付録A、式(33)、(34)に式(14)を代入して C_{2A} , C_{3A} が決定される。以下順次付録A、式(32)の C_{1b} , および B_1 , B_2 等が決定され、未定数はすべて面内力 Z で表される。

最後に面内力 Z を決定する。ヒンジ止めされた部分の縁は、座屈後もはく離部分の上下の円板の各々の中立面と直角を保つという条件により、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_{B1}}{dr} \right)^2 dr - \frac{1-\nu_1}{E_1 h_1} bZ + \frac{\alpha_1}{2} (T_1 + T_A) b \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_{B2}}{dr} \right)^2 dr + \frac{1-\nu_2}{E_2 h_2} bZ \\ & \quad + \frac{\alpha_2}{2} (T_2 + T_B) b + \frac{1}{2} h \left(\frac{dw_{B2}}{dr} \right)_{r=b} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

式(16)は Z に対する非線形方程式であり、数値的に解く必要がある。

3. 数値解析

ここで例として、上層に厚さ $h_1=1\text{mm}$ のアクリル材 ($E_1=2.94\text{ GPa}$, $\nu_1=0.34$, $\kappa_1=0.21\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $\alpha_1=70.0\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)、下層に $h_2=10\text{mm}$ の SUS304 材 ($E_2=196.13\text{ GPa}$, $\nu_2=0.29$, $\kappa_2=16.0\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $\alpha_2=17.1\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) を適用したモデル材を用いる。(この材料の組み合わせは、解析の妥当性を調べるためのものであり、実際の応用は念頭に入れていない。なお、上層の曲げ剛性は、下層のそれより十分小さいので、この組み合わせは剛体床に接着された板のモデルに類似していることに注意する。) 円板の半径は $a=100\text{ mm}$ 、はく離半径は $b=50\text{ mm}$ とする。このようなモデル材が一般的な温度変化を受ける場合と、より一般的な温度こう配下におかれる場合にわけて、以下に面内力 Z および変形挙動を解析する。

3.1 一般的な温度変化を受ける場合 最初に 0°C におかれていた板が、一般的な温度変化 T を受ける場合を考える。 $T_1=T_2=T$, $B_c=\infty$ (すなわち $T_A=T_B=T$ となる。実際の計算では $B_c=10000$ を用いた。) とおく。始めに面内力 Z を得るために、解くべき方程式(16)の右辺を左辺に移項した式を $F(Z)$ とおく。

$$\begin{aligned} F(Z) &= -\frac{1}{2} \left[\int_0^b \left(\frac{dw_{B1}}{dr} \right)^2 dr - \int_0^b \left(\frac{dw_{B2}}{dr} \right)^2 dr \right] \\ & \quad - \left(\frac{1-\nu_1}{E_1 h_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2 h_2} \right) bZ + (\alpha_1 - \alpha_2) T b - \frac{h}{2} \left(\frac{dw_{B2}}{dr} \right)_{r=b} \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

解の挙動を調べるために $F(Z)$ を Z に対してプロットする。図3に T が 10°C の場合に対する $F(Z)$ のプロット例を示す。この例では三つの解 $Z_{(1)}$, $Z_{(2)}$, $Z_{(3)}$ が存在する。各解に対応するはく離上下の円板のたわみ曲線を計算した結果を、それぞれ図4(a)~(c)に示す。図4(b), (c)では上層と下層の位置関係が逆転しており、解 $Z_{(2)}$, $Z_{(3)}$ は不適であることがわかる。一方、図4(a)のたわみ曲線は矛盾を含まない。従って $Z_{(1)}$, すな

わち $F(Z)=0$ の最小の解が我々の求めているたわみ曲線に対応する解であることがわかる. このようにして得られる面内力 Z , およびこれから計算された上板と下板の中心におけるたわみの差 dw と温度変化 T の関係を図5に示す.

なお, 厳密には, 接着部分とはく離部分の $r=b$ における半径方向変位の適合条件を満足させるために, 接着部分とはく離部分の基準面内 $r=b$ なる位置に未知の面内力 F_r が作用すると仮定して解析を行うべきであろう. 実際, 著者らは当初この取扱いを行った. 面内力 F_r を考慮した解析自体は前節のそれと比較して特に複雑になるわけではないが, たわみ解析は結局二つの未知数, Z と F_r に対する連立非線形方程式の解を求めることに帰着され, 数値計算の手順は面倒になる. しかし, 結果的には, F_r を仮定して得られた Z およびエネルギー解放率は, $F_r=0$ として得られた結果とほとんど変わらなかった. そこで, 本論文ではこのアプローチの詳細の記述は省略し, 結果のみを図示する. F_r を考慮して求めた Z を Z_{Fr} , dw を dw_{Fr} としして図5に重ねて示してある.

この図より温度変化が小さい場合は面内力 Z は増加していくが, ある程度温度変化が大きくなると ($T \cong 7^\circ\text{C}$), Z はほぼ一定の値となることがわかる. また, 温度変化が小さい時はたわみの差も小さいが, Z と同様, $T=7^\circ\text{C}$ 付近でその挙動は変化し急激にたわみの差が増大する. すなわち, 上層のアクリル板は, はく離部分で座屈に似た挙動(変形モードは連続しているので厳密な意味では座屈とはいえない)を呈する. この座屈挙動が生じる面内力 ($\cong 1.6 \text{ kN/m}$) は, 一様な中心方向面内圧縮力を受ける周辺固定の円板の座屈荷重⁽³⁾ 1.63 kN/m と良く対応している. 一方, F_r は座屈前は小さいが座屈後は増大し, Z と比較して無視できない大きさになる. しかし, 座屈前, 座屈後共に Z および dw は F_r を考慮した場合と無視した場合でほとんど差はない.

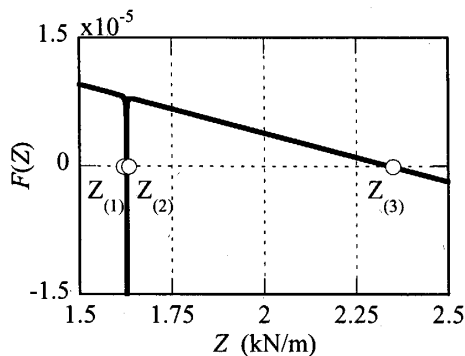
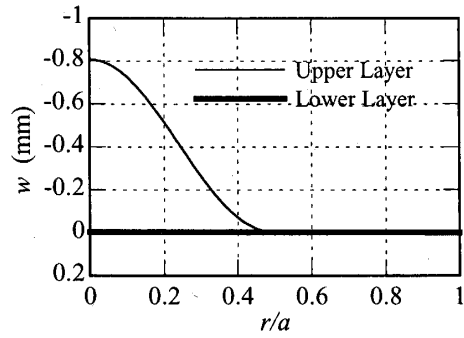
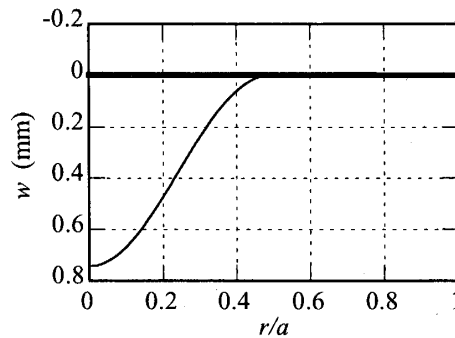


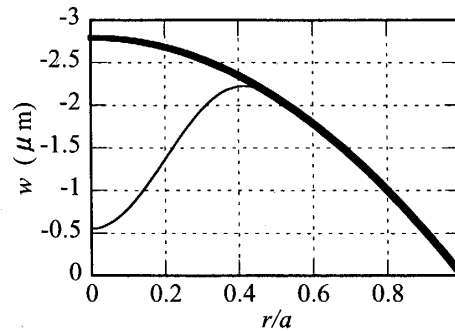
Fig.3 Plot of the function $F(Z)$
($B_c=10\,000, T_1=T_2=T=10^\circ\text{C}$)



(a) Deflection curves corresponding to $Z_{(1)}$



(b) Deflection curves corresponding to $Z_{(2)}$



(c) Deflection curves corresponding to $Z_{(3)}$

Fig.4 Deflection curves corresponding to the solutions of $F(Z)=0$
($B_c=10\,000, T_1=T_2=T=10^\circ\text{C}$)

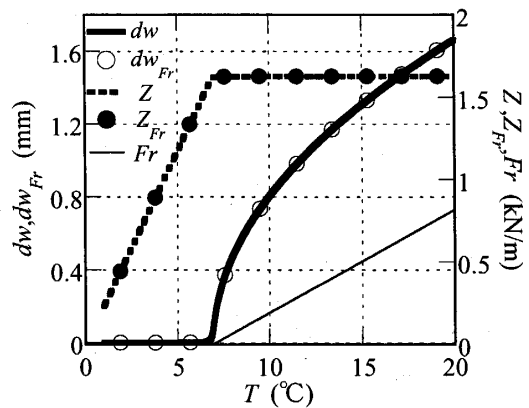


Fig.5 Variations of Z and dw with T
($B_c=10\,000, T_1=T_2=T=10^\circ\text{C}$)

3.2 温度こう配下にある場合 次に温度こう配下にある場合を考える。条件としてビオ数 $B_c=0$, $T_2=0^\circ\text{C}$ として前節と同様な解析を行った。面内力 Z および上板と下板の中心におけるたわみの差 dw それぞれと上面と下面の温度差 $T_1 - T_2$ (T_1 を変化させる) の関係を図6に示す。 Z , dw とも一樣な温度変化を受ける場合と同様な挙動を示し、温度差 $T_1 \approx 5^\circ\text{C}$ で座屈が生じていることがわかる。ただし、座屈時の面内力は共に $\approx 1.6\text{ kN/m}$ でほぼ等しくなっている。

次に B_c の影響を調べるため、 $B_c = 1, 2, 4$ に対応する dw を図7に示す。この図からいずれの場合にも座屈が生じるが、臨界温度差は B_c が大きいほど大きくなっていることがわかる。言い換えると同一温度差に対し B_c が小さくなるほど上層と下層の温度ギャップが大きくなり、これに伴って面内力 Z も増大し座屈しやすくなる。

4. エネルギー解放率

Suo と Hutchinson⁽⁴⁾ は図8に示すような一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。エネルギー解放率を G とすると、平面ひずみ条件に対し、彼等の式は以下ようになる。

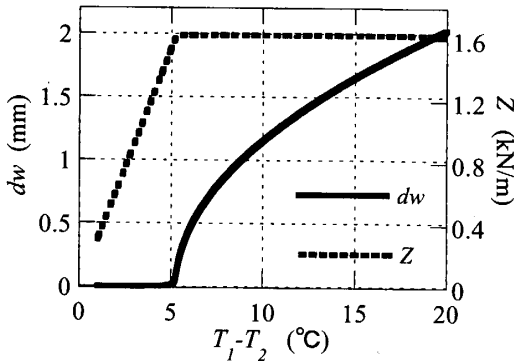


Fig.6 Variations of Z and dw with T_1-T_2 ($B_c=0, T_2=0^\circ\text{C}$)

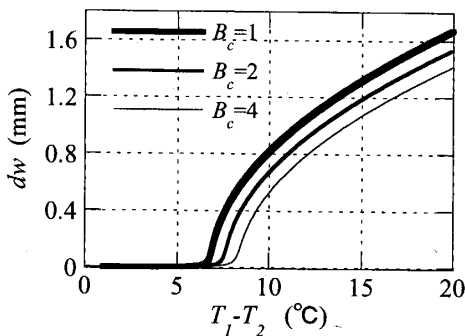


Fig.7 Variations of dw with T_1-T_2 corresponding to $B_c=1,2,4$ ($T_2=0^\circ\text{C}$)

$$G = \frac{c_0}{16} \left(\frac{P_0^2}{A_0 h_1} + \frac{M_0^{*2}}{I_0 h_1^3} + \frac{2P_0 M_0^*}{\sqrt{A_0} I_0 h_1^2} \sqrt{\frac{(D-\bar{D})D_1}{(D-D_1)\bar{D}}} \right) \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$P_0 = P_1 - C_1 P_3 - C_2 M_3 / h_1 \dots\dots\dots(19)$$

$$M_0^* = M_1^* - C_3 M_3 \dots\dots\dots(20)$$

定数 $A_0, I, c_0, \bar{D}, C_1, C_2, C_3$ は付録Bに与えられている。一方、容易に確かめることができるが、付録Aの式(30)で定義される円環部分で用いた基準面の位置は、平面ひずみ条件下で曲げを受ける積層はりの中立面と一致している。それゆえ彼らの結果を軸対称変形をする積層板に適用することができる。Hutchinson と Suo⁽⁶⁾ は式(18)を一樣な中心方向面内圧縮力により座屈している円形はく離に適用している。

ただし、接着部分は外部荷重が一切作用していなくても内部応力が発生していて、はく離端部近傍は特異応力場となっており、き裂進展によりエネルギーは解放されることを考慮する必要がある。そこで最初に外力が作用しない状態における接着部分を図8に示す力学系に置き換えておかななくてはならない。端部にはく離を有する積層はりが、本論文と同じ温度条件のもとにおかれるときの等価な力の系を求める手順(カットアンドペースト法⁽⁴⁾)は文献(6)に詳述されている。詳細は省略するが、同様な手順を内縁の界面に沿った界面はく離を有する円環状要素(図2(a)で $r=b$ に浅い界面はく離がある円環)に適用すると、等価な力の系は図8において、 $M_1^* = M_{c1}, M_2^* = M_{c2}, P_3 = 0, P_1 = P_2 = -F_c, M_3 = M_c$ とおくことにより与えられることがわかる。ここで、

$$M_{c1} = -(1+\nu_1)D_1\alpha_1(T_1-T_0)/h_1 \dots\dots\dots(21)$$

$$M_{c2} = -(1+\nu_2)D_2\alpha_2(T_0-T_2)/h_2 \dots\dots\dots(22)$$

$$F_c = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1(T_1+T_0) - \alpha_2(T_2+T_0)}{(1-\nu_1)/E_1 h_1 + (1-\nu_2)/E_2 h_2} \dots\dots\dots(23)$$

$$M_c = M_{c1} + M_{c2} - hF_c/2 \dots\dots\dots(24)$$

(ただし、この力の系はビオ数が無限大のときのみ正確であって、温度ギャップがある場合には近似的なものとなる⁽⁶⁾。)以上より、現モデルに対しては、図9に示される諸量は以下のように与えられる。

$$P_1 = Z - F_c, P_3 = 0$$

$$M_3 = M_i + M_c, M_1^* = M_1 - h_1 Z/2 + M_{c1} \dots\dots(25)$$

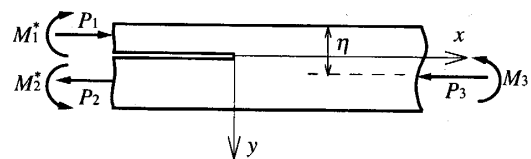


Fig.8 Split-beam element under general loading condition

2節で得られた Z , M_b , M_1 を式(25)に代入することにより, 一様な温度変化を受ける場合と温度こう配下にある場合のそれぞれについて G を計算した. 図9に一様な温度変化をうける場合の G および dw とはく離半径の関係を示す. 温度変化 T は 10°C としている. また3節と同様に面内力 F_r の影響を調べるため F_r を考慮した G を G_{Fr} として重ねてプロットしている. b/a が小さいとき G はほぼ0であるが, b/a の値がある値以上で G は急激に増大する. この増大は dw の挙動から座屈によって生じていることがわかる. はく離半径がこの値より小さい場合, はく離の挙動は剛体床に接着された板のそれと類似している. この場合は, はく離面間の変位差は小さいので, 上下層のひずみエネルギー密度は, はく離の存在によって影響されなく, したがってはく離進展により全ひずみエネルギーは変化しない, すなわちエネルギー解放率は0となるわけである.

次に温度こう配下における場合についての G および dw とはく離半径の関係を示す. 図10は $B_c = 1$, 上層上面と下層下面の温度差 $T_1 - T_2 = 10^\circ\text{C}$ ($T_2 = 0^\circ\text{C}$) を用いている. この図から一様な温度変化の場合と同様, 座屈後に G が急激に増大していることがわかる. また, b/a の値が小さい場合すなわち座屈が生じる前でも G は一定の値を持ち, 座屈が生じた時点で G の値が落ち込んでいることがわかる. これはピオ数をはく離半径 (ひいては開口変位) に無関係に一定と仮定したことによるものと考えられる. b/a が小さいときには開口変位は小さく, したがって温度ギャップも小さい (ピオ数は大きい) はずである. この場合は接触モデルが有効であり, 図10に見るように (また前報で一般的に示されたように) エネルギー解放率は小さい. 一方, 座屈が生じると開口変位は増大するからこの場合のピオ数は小さくなるであろう. したがって現実には座屈が生じることによりエネルギー解放率が減少す

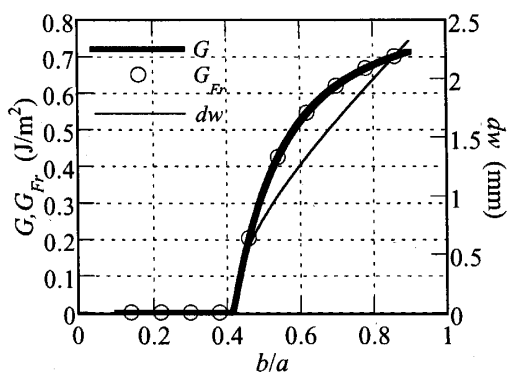


Fig.9 Variation of the energy release rate with crack radius ($B_c = 10\,000$, $T_1 = T_2 = T = 10^\circ\text{C}$)

ることは起きないと思われる.

次に B_c の影響を調べるため, $B_c = 1, 2, 4$ に対応する G を図11に示す. それぞれの B_c に対して座屈後に G が増大していることが確認できる. また B_c が大きくなるにつれ, 座屈が生じる b/a の値が大きくなっていることも確認できる. これは図7における現象と同様, 上層, 下層の温度ギャップが, B_c が大きくなるにつれ小さくなるからである. さらに座屈が生じている時点で比較すると, 座屈後の G の落ち込みが, B_c が大きくなるにつれ小さくなっていることがわかる. これは B_c が大きくなることにより, き裂端近傍の温度分布の不連続が解消されていくからである.

図10, 11の結果は等価な力の系, 式(25)が近似的なものになるため定量的に正確なものではない. さらに, 座屈後の板の変形挙動は, 板の非線形曲げ理論に基づいて解析するのが正統的であろう. このような課題は残されるものの, 本研究により, 熱的負荷のもとにあるはく離の進展の全体像はかなり明らかになったと云えよう.

5. 結言

微小たわみの板曲げ理論を基礎に, 中心に円形層間

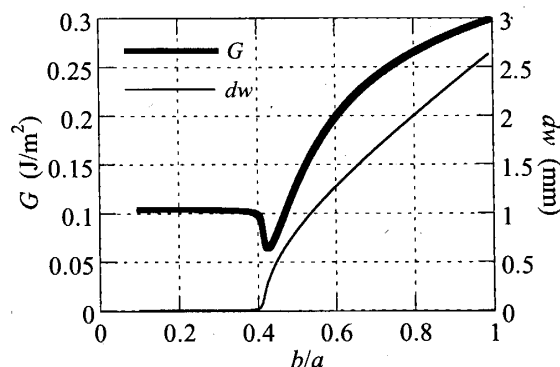


Fig.10 Variation of the energy release rate with crack radius ($B_c = 1$, $T_1 = 10^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$)

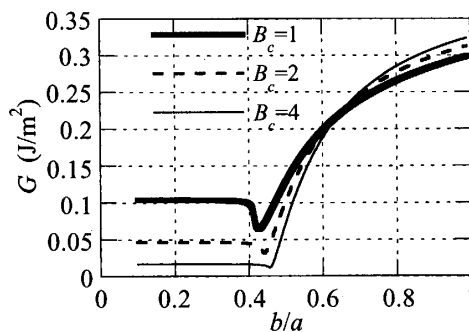


Fig.11 Variation of the energy release rate with crack radius corresponding to $B_c = 1, 2, 4$ ($T_1 = 10^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$)

はく離を有する積層円板の様な温度変化および温度こう配による変形の解析を行った。

このモデルの解析は未知の面内力に対する非線形方程式の解を求める問題に帰着される。たわみの解析により、温度変化が大きくなるとはく離部分は座屈に似た挙動を起こすことがわかった。ついで、はく離の進展挙動を調べるためにエネルギー解放率を計算した。曲げ剛性が大きく異なる二層を組み合わせた積層材料に対し、エネルギー解放率は、一定温度のもとでは、あるはく離半径まではほぼ一定であるが、それ以上の半径になると、はく離面は座屈を起こし、エネルギー解放率ははく離半径とともに増大する。したがって、一定温度条件のもとではく離が進展を開始するとき、界面の破壊じん性値が一定であれば、それは不安定的に進展するということが予想される。

最後に、本研究は文部科学省科学研究費補助金[基盤研究(C)2 14550083]の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。また、計算および図の作製を手伝っていただいた小田美紀男助手、前田義和技官に謝意を表す。

付録 A

最初に温度分布をまとめておく。はく離部分における温度分布は、方向がそれぞれz軸と同じで、上板の板厚中心を原点に取ったz₁軸、下板の板厚中心を原点に取ったz₂軸を考えると、上下の各板に対し次式となる。

$$T_{z1} = -(T_1 - T_A)z_1/h_1 + (T_1 + T_A)/2 \quad (26)$$

$$T_{z2} = -(T_B - T_2)z_2/h_2 + (T_2 + T_B)/2 \quad (27)$$

ここで

$$T_A = \frac{(1+\xi)T_1 + B_c(T_1 + \xi T_2)}{(1+\xi)(1+B_c)}, \quad B_c = \frac{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}{\kappa_1 \kappa_2} h_c$$

$$T_B = \frac{(1+\xi)T_2 + B_c(T_1 + \xi T_2)}{(1+\xi)(1+B_c)} \quad (28)$$

である。ξはξ = κ₂h₁/κ₁h₂で示され、h_cははく離面間の熱伝達率である。

また円環部分の界面における温度をT₀とすると

$$T_0 = (T_1 + \xi T_2)/(1+\xi) \quad (29)$$

円環部分の基礎式およびたわみの解析は前報⁽¹⁾と同じであるので、2節で用いられる式のみを前報から再掲しておく。

図2(a)に示されている円環部分の基準面の位置ηは次式で定義される。

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{E_1 h_1^2}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 (h_1 + h_2)}{1-\nu_2^2} \right) \right] / \left(\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \right) \quad (30)$$

ここで、h = h₁ + h₂である。円環部分のたわみw_Aは

$$w_A = C_{1A} + C_{2A} \ln \frac{r}{a} + C_{3A} r^2 \quad (31)$$

で与えられる。ここでC_{1A}~C_{3A}は円周r=bに作用しているモーメントM_iによって次式で与えられる。

$$C_{1A} = -C_{3A} a^2 \quad (32)$$

$$C_{2A} = \frac{-B_{12} A_2 + a^2 M_i / (\lambda - 1)}{D - D_{12}} \quad (33)$$

$$C_{3A} = \frac{(\lambda - 1)(A_1 B_{12} - Q_i) + M_i}{2(D + D_{12})(\lambda - 1)}, \quad \lambda = a^2/b^2 \quad (34)$$

式(32)は、w_A(a) = 0とおくことに由来している。ここで、

$$D = D_1 + D_2 + h^2 D'_0/4, \quad D'_0 = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 h_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2 h_2} \right)^{-1} \quad (35)$$

$$D_{12} = \nu_1 D_1 + \nu_2 D_2 + h^2 D'_0 \left(\frac{\nu_2 E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{\nu_1 E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \right) / 4 \left(\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \right) \quad (36)$$

$$D_j = \frac{E_j h_j^3}{12(1-\nu_j^2)}, \quad (j=1,2) \quad (37)$$

$$B_{12} = (\nu_2 - \nu_1) h D'_0/2 \quad (38)$$

$$Q_i = -\frac{(1+\nu_1) D_1 \alpha_1 (T_1 - T_0)}{h_1} - \frac{(1+\nu_2) D_2 \alpha_2 (T_0 - T_2)}{h_2} - \frac{1}{4} h D'_0 [(1+\nu_1) \alpha_1 (T_1 + T_0) - (1+\nu_2) \alpha_2 (T_0 + T_2)] \quad (39)$$

r=bで半径方向面内力が0であるとした場合、積層円板の基準面上の点の半径方向変位u₀は次式となる。

$$u_0 = A_1 r + A_2/r \quad (40)$$

ここで

$$A_1 = \frac{2B_{12} C_{3A} + P_i}{B' + B'_{12}}, \quad A_2 = -\frac{B_{12} C_{2A}}{B' - B'_{12}} \quad (41)$$

$$P_i = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_1 E_1 h_1}{1-\nu_1} (T_0 + T_1) + \frac{\alpha_2 E_2 h_2}{1-\nu_2} (T_0 + T_2) \right] \quad (42)$$

$$B' = \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \quad (43)$$

$$B'_{12} = \frac{\nu_1 E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{\nu_2 E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \quad (44)$$

である。

付録 B

式(18)~(20)に現れる定数は以下のように定義される。

$$c_0 = 8(1-\nu_1^2)/E_1 \quad (45)$$

$$A_0 = \frac{D'_0 D_2}{D_{11}(D - D_1)}, \quad I = \frac{D_2}{12D} \quad (46)$$

$$C_1 = \frac{D'_0}{D_{12}}, C_2 = \frac{hh_1 D'_0}{2D}, C_3 = \frac{D_1}{D} \quad (47)$$

$$\bar{D} = D_1 + D_2 \quad (48)$$

D'_0 は式(35)に与えられている。また

$$D_{11} = E_1 h_1 / (1 - \nu_1^2), \quad D_{12} = E_2 h_2 / (1 - \nu_2^2) \quad (49)$$

である。

文 献

- (1) 深川和良・他2名, 機論, 71-702, A(2005), 301-307.
- (2) 戸谷眞之・他3名, 機論, 65-638, A(1999), 2135-2142.
- (3) S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, McGraw-Hill Kogakusha, (1961), 389-392
- (4) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Fract.*, 43(1990), 1-18.
- (5) Hutchinson, J. W. and Suo, Z., *Advances in Applied Mechanics*, 29(1992), 63-191.
- (6) 戸谷眞之・他3名, 機論, 66-647, A(2000), 1362-1369.