

631 円形界面はく離を有する積層円板の集中力によるたわみ

The Deflection of a Laminated Circular Plate Containing a Disc-Shaped Delamination Due To a Normal Concentrated Force

○学 上之菌 剛 (鹿大) 正 小田美紀男 (鹿大)
 正 有富 正男 (鹿大) 正 戸谷 眞之 (鹿大)

Takeshi KAMINOSONO, Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima
 Mikio ODA, Masao ARITOMI, Masayuki TOYA, Kagoshima University

Key words: Laminated Plate, Disc-Shaped Delamination, Normal Concentrated Force

1. 緒 言

本報告では、内部に円形はく離をもつ2層からなる積層円板の中心に集中力を負荷したときのはく離進展について、はく離部分の上下の円板が異なったたわみ曲線を有すると考えた解析を行う。

2. たわみの解析

図1に示すような中央部に円形はく離(界面き裂)を有する2枚の異種材の円板を接着して作られた積層円板を考える。等方弾性体を仮定し、ヤング率、ポアソン比、板厚を上板についてはそれぞれ E_1, ν_1, h_1 、下板については E_2, ν_2, h_2 とする。また円板の半径を a 、円形はく離の半径を b とする。境界条件は全周辺単純支持とし、円板の中心に垂直に加えられた集中力 P による曲げを考える。変形は軸対称であり、円板のたわみは中心からの距離 r のみの関数となる。図1の円板を $r=b$ で仮想的に分離し、図2に示す円環状の接着部分と図3に示す円周でヒンジ止めされた重ね板の部分に分けて考える。まず、図2の円環部分(接着部分)のたわみ曲線を考える。図2に示すように $r=b$ の円周上には矢印の向きに今のところ未知の単位長さあたりのモーメント M_i が作用している。積層板のある基準面を仮定し、この基準面に関して、半径方向変位、モーメントを定義する。この基準面の位置 η は、

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu_2^2)E_1h_1^2 + (1-\nu_1^2)E_2h_2^2(h+h_1)}{(1-\nu_2^2)E_1h_1 + (1-\nu_1^2)E_2h_2} \quad (1)$$

(ここで、 $h=h_1+h_2$) で与えられる。付録式(A1)に示されているようにたわみ w_A の微分方程式は、均質な板に対するものと同じになり、その一般解は次式で与えられる。

$$w_A(r) = C_{1A} + C_{2A} \ln \frac{r}{a} + C_{3A} r^2 + C_{4A} r^2 \ln r \quad (2)$$

ここで、 $C_{1A} \sim C_{4A}$ は積分定数である。

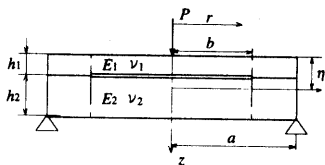


Fig.1 Model of the circular laminated plate containing a disc-shaped crack.

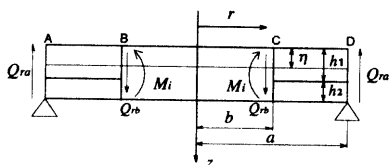


Fig.2 Free-body diagram of the bonded part.

全周辺単純支持の境界条件より $w_A(a)=0$ であるから

$$w_A(a) = C_{1A} + C_{3A} a^2 + C_{4A} a^2 \ln a = 0 \quad (3)$$

円環の外周 ($r=a$) にはモーメントを作用していない。すなわち $M_i(a)=0$ である。また、円環内縁部 ($r=b$) では $M_i(b)=M_i$ (今のところ未知) が成り立つ。

板の単位長さあたりのせん断力を Q_r とする。任意の半径 r の円板を切り出して垂直方向の力のつりあいを考えると、

$$Q_r(r) = -P/(2\pi r) \quad (4)$$

したがって、式(4)と付録式(A2)より

$$C_{4A} = P/(8\pi D_A) \quad (5)$$

が得られる。したがって M_i が決定されると未知定数 $C_{1A} \sim C_{3A}$ が決定されることになる。

次に図3に示す円周縁でヒンジ止めされた重ね板の部分のたわみを解析する。ヒンジの作用は上の円板に対しては円板の下縁部に中心に向かって水平方向に作用する圧縮力(単位縁長さあたり Z とする)、下の円板に対しては円板上縁部に作用する引張力に置き換えることができる。上の板に対しては集中力 αP が作用し、下の板に対しては集中力 βP が作用する。(ただし $\alpha + \beta = 1$) 上下の円板は $r=b$ と $r=0$ でのみ接しているものとする。図3に示すように上下の円板の縁に作用するモーメントを M_1, M_2 とすると連続条件 $M_1 = M_2$ が成り立つ。

ここで上下の板のたわみをそれぞれ $w_{B1}(r), w_{B2}(r)$ とすると、任意の半径 r で切り出した円板の垂直方向の力のつりあいを考え、付録式(A2)と組み合わせると上下それぞれの板に対し、次式が得られる。

$$-D_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} \right) = -Z \frac{dw_{B1}}{dr} - \frac{\alpha P}{2\pi r} \quad (6)$$

$$-D_2 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_{B2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B2}}{dr} \right) = Z \frac{dw_{B2}}{dr} - \frac{\beta P}{2\pi r} \quad (7)$$

ここで、 $D_i (i=1,2)$ はそれぞれ上下の板の曲げ剛性である。式(6)、(7)をそれぞれ積分することにより次式が得られる。

$$w_{B1}(r) = B_1 I_0(k_1 r) + B_2 K_0(k_1 r) - \frac{\alpha P}{2\pi Z} \ln r - \frac{C_1 D_1}{Z} \quad (8)$$

$$w_{B2}(r) = \bar{B}_1 J_0(k_2 r) + \bar{B}_2 Y_0(k_2 r) + \frac{\beta P}{2\pi Z} \ln r + \frac{C_2 D_2}{Z} \quad (9)$$

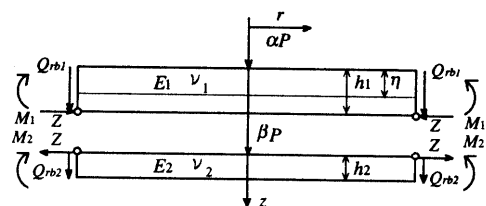


Fig.3 Free-body diagram of the delaminated part.

ここで $B_1, B_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ は未知定数で, $I_0(k_i r), K_0(k_i r)$ はそれぞれ 0 次の第 1 種と第 2 種変形ベッセル関数 $J_0(k_i r), Y_0(k_i r)$ はそれぞれ 0 次の第 1 種と第 2 種ベッセル関数で, $k_i = \sqrt{Z/D_i}$ ($i=1,2$) である. $r=b$ におけるモーメントの連続条件, 円環部分とはく離部分のたわみ, 傾き角が等しい, さらに $r=0$ でのたわみが等しいという条件よりすべての未知定数が Z の関数として決定される. 最後に上下の円板が互いに接している面の縁 ($r=b$) における半径方向の伸びは等しいという条件から面内力 Z に対する非線形方程式が導かれ, 問題はこの非線形方程式を解くことに帰される.

3. 数値解析

モデルの材料として, アクリルとアルミニウムの組み合わせからなる積層円板を想定し, 各材料のヤング率, 及びポアソン比はそれぞれ $E_1=2.94\text{GPa}, E_2=73.5\text{GPa}, \nu_1=0.345, \nu_2=0.35$ とした. 図 4 に, 上層を厚さ 10mm のアクリル, 下層を 1mm のアルミニウムとし円板の外径を $a=150\text{mm}$, はく離半径を $b=50\text{mm}$ または, 100mm として, 中央に 500N の力を負荷したときのたわみ曲線を示す. はく離部分からたわみが大きくなっていることがわかる. さらにはく離部分では, たわみ差が一度大きくなりまた零となるようなたわみ曲線がみられる. 図 5 は, $b=100\text{mm}$ とした図 4 のモデルでの着力点変位と負荷の関係を示したもので, 両者は比例していることがわかる. 詳細は省略するが, 円形はく離の上下の円板の縁におけるそれぞれのモーメント M_1, M_2 , 接着部の内縁におけるモーメント M_i , 面内力 Z が決定されるとエネルギー解放率を計算することができる⁽¹⁾. 図 6 に上層を 1mm のアルミニウム, 下層を 10mm のアクリルとし円板の外径を $a=150\text{mm}$ とし, はく離半径を変化させたときのエネルギー解放率を示す. エネルギー解放率ははく離半径によらずほぼ一定であり, またその値は上下の全面接触していると仮定したときの解⁽²⁾ とほぼ一致していることがわかる.

4. 結 言

(1)集中荷重を受ける円形はく離を有する積層板に関して, はく離面上下の板のたわみが異なるモデルを解析した. このモデルの解は上下の円板内に生じる面内力 Z に関する非線形方程式の解に帰せられる. (2)負荷一定の場合, はく離半径の増加につれ, はく離部分のたわみは増大するが, 接着部分のたわみは変化しない. (3)エネルギー解放率ははく離半径によらずほぼ一定である.

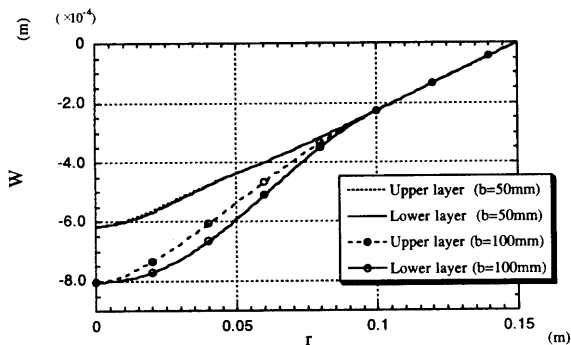


Fig.4 Variation of deflection curve with the crack radius (Acryl-Aluminum, $P=500\text{N}, a=150\text{mm}, h_1=10\text{mm}, h_2=1\text{mm}$).

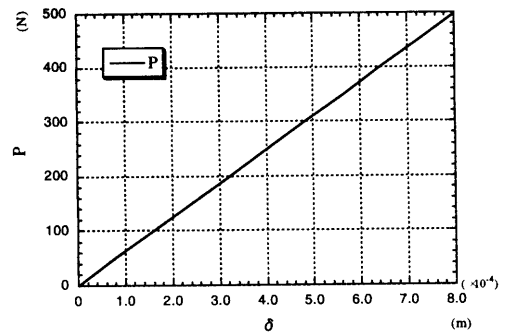


Fig.5 Relation between the applied load and the deflection at the point of load application (Acryl-Aluminum, $a=150\text{mm}, b=100\text{mm}, h_1=10\text{mm}, h_2=1\text{mm}$).

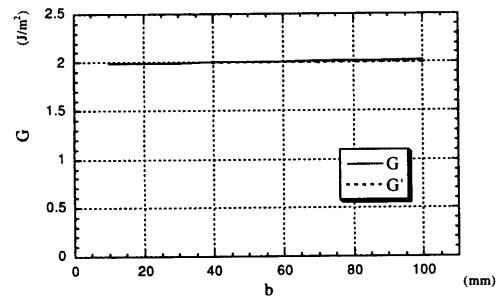


Fig.6 Relation between the energy release rate and the crack radius (Aluminum-Acryl, $P=500\text{N}, a=150\text{mm}, h_1=1\text{mm}, h_2=10\text{mm}$) G' denotes the result from reference⁽²⁾.

付録：積層板の基礎式

$$\text{たわみの微分方程式: } \nabla^2 \cdot \nabla^2 w_A = 0 \tag{A1}$$

$$\text{せん断力: } Q_r = -D_A d(d^2 w_A / dr^2 + r^{-1} dw_A / dr) / dr \tag{A2}$$

$$\text{モーメント: } M_r = -D_A d^2 w_A / dr^2 - D_{12} r^{-1} dw_A / dr \tag{A3}$$

$$\text{曲げ剛性: } D_1 = h_1^2 H_1 / 12, \quad D_2 = h_2^2 H_2 / 12 \tag{A4}$$

ここで

$$D_A = (E_1 S_1 + E_2 S_2) / 3 \tag{A5}$$

$$D_{12} = (\nu_1 E_1 S_1 + \nu_2 E_2 S_2) / 3 \tag{A6}$$

$$B_{12} = \nu_1 H_1 (-2\eta + h_1) / 2 + \nu_2 H_2 (-2\eta + 2h_1 + h_2) / 2 \tag{A7}$$

$$S_1 = \left\{ (h_1 - \eta)^3 + \eta^3 \right\} / (1 - \nu_1^2) \tag{A8}$$

$$S_2 = \left\{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \right\} / (1 - \nu_2^2) \tag{A8}$$

$$H_1 = E_1 h_1 / (1 - \nu_1^2), \quad H_2 = E_2 h_2 / (1 - \nu_2^2) \tag{A9}$$

文 献

- (1) Suo, Z. Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., 43, (1990), 1-18
- (2) 戸谷眞之・Lalak INDIYONO・有富正男・小田美紀男, 機論, 65-635, A (1999), 1593-1599.