様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 30 日現在

機関番号：17701
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008 ～ 2010
課題番号：20540151
研究課題名（和文）擬微分作用素と幾何解析

研究課題名（英文）Pseudodifferential Operators and Geometric Analysis

研究代表者
千原　浩之（CHIHARA　HIROYUKI）
鹿児島大学・理工学研究科（理学系）・教授
研究者番号：70273068

研究成果の概要（和文）：本研究では，曲がった空間上の解析学の手法を構築することを目的とする．主な成果を２つ述べる．１つは，ある種の複素相関数をもつフーリエ積分作用素の像として特徴付けられる関数空間上の Berezin-Toeplitz 作用素の既知の事実を大幅に改善したことである．もう１つは，リーマン多様体から概エルミート多様体へのシュレーディンガー写像流の初期値問題を研究して従来の像空間のケーラー性の仮定の意味を解明し，誘導束の断面に作用する擬微分作用素論を構築して，この仮定がなくても初期値問題を解く方法を構築したことである．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this project is to present sophisticated methods of analysis on curved spaces. Two of our main results are the following. First, we significantly improved the known facts on Berezin-Toeplitz operators acting on the image of a certain Fourier integral operators with a complex phase. Secondly, we studied the initial value problem for the Schrödinger map flow of a Riemannian manifold to an almost Kähler manifold. We clarified the meaning of the assumption of the Kähler property of the target space in all the preceding results, and succeeded in dropping this assumption by introducing pseudodifferential calculus on induced bundle associated with a map between Riemannian manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度			
２００７年度			
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：擬微分作用素，Bargmann 変換，Berezin-Toeplitz 作用素，Schrödinger 写像，分散型偏微分方程式，初期値問題

１．研究開始当初の背景
本研究は以下の事実を出発点としている．
(1) ユークリッド空間上の Bargmann 変換とよばれるフーリエ積分作用素と擬微分作用素を用いた超局所解析の大域的手法が強力な道具になりつつあった．

(2) (1)は相空間から同じ実次元の複素ユークリッド空間への正準変換に付随したフーリエ積分作用素による（超）関数の変換により，変換前の擬微分作用素と変換後の擬微分作用素の間に Egorov 型のある種の対称性が成立すること，および，変換後の I-ラグランジュ部分多様体上の Weyl 量子化が複素ユークリッド空間上の Berezin-Toeplitz 量子化と等価であることが本質的である．Berezin-Toeplitz 量子化それ自身も関数解析学の基本的な研究対象であるが，(1)で用いられている高度な手法が全く取り入れられておらず，大いに改善の余地があった．

(3) リーマン対称空間上では Helgason のフーリエ変換の理論が整備されており，Bargmann 変換の対応物が近年盛んに研究されていた．一方，擬微分作用素論については，最も基本的な双曲平面上ですら整備されていない．そこで，整備されていないものを整備して，これらをまとめて利用することにより，リーマン対称空間上の超局所解析の利用しやすい大域的手法が構築できる可能性が大いに感じられた．

(4) 閉リーマン多様体上のシュレーディンガー型発展方程式の初期値問題の適切性を特徴づける研究は何とか解決できそうに見えるが，現実には筆者の平坦トーラス上の結果（2002）以後全く進展がなかったが，筆者の方法は対称空間ならば発展させられる余地があるように思われた．

(5) シュレーディンガー写像流の初期値問題の研究は，値域と定義域の両方を本格的な多様体とした研究が存在せず，先行研究で仮定されている値域のケーラー性の意味が不明で，偏微分作用素の視点でよく理解すべきであった．

２．研究の目的

研究開始当初の背景から，従来の解析学の比較的高度な技術と微分幾何学とを積極的に用いた解析学の研究を行うという目的が誕生した．より具体的な目的は以下の通りである．

(1) ユークリッド空間の場合に習って，比較的扱いやすい曲がった空間であるリーマン対称空間上などで，Helgason のフーリエ変換を基盤にした擬微分作用素論を構築し，一方で盛んに研究されている Bargmann 変換の対応物である Segal-Bargmann 変換の基礎研究を取り入れて，超局所解析の大域的手法を構築することを目指す．

(2) コンパクトなリーマン対称空間上でシュレーディンガー型発展方程式の初期値問題の適切性を考察する．特に筆者の平坦トーラスにおける手法を，群を操作するという視点で見直しを図り，適切性を特徴づけることを目指す．

(3) リーマン多様体から概エルミート多様体へのシュレーディンガー写像流に代表される分散型とよばれる偏微分方程式系にしたがう多様体の間の写像流の初期値問題を考察する．線型偏微分作用素の理論と微分幾何学とを徹底的に用いて，方程式系の構造をよく理解し，初期値問題の解法に関して本来あるべき事実を解明する．

３．研究の方法

本研究は，研究代表者とその研究室所属の大学院生による研究活動の主要部分である．研究の進め方を箇条書きにする．

(1) 基本的には，線型偏微分方程式の理論やそれを扱うための擬微分作用素やフーリエ積分作用素の理論を基盤とした解析学の研究であるが，調和写像熱流の幾何解析などに用いられる微分幾何学の手法や，Helgason のリーマン対称空間上のフーリエ変換の理論を用いて研究活動を行った．技術的に足りない部分はその都度，個人的な勉強かあるいは研究協力者や周辺の興味を持つ大学教員らとの輪読により補強した．

(2) 通常の偏微分方程式を扱う研究においては，線型偏微分作用素の理論の視点で偏微分作用素としての構造を捉えるようにした．一方，無限次元空間値の常微分方程式という視点やあるいは可積分系理論の視点から時間大域的挙動を捉えようとした．しかし，可積分系理論は集中講義での耳学問レベルの知識しかなく補強する余裕がなくて実行できなかった．これは今後の課題である．

(3) 多様体の間の写像の研究では，対象を局所座標系を用いて局所的には通常の微分方程式系として捉えることにより，線型偏微分作用素の理論の視点から構造を理解することが基本的ではある．しかし，それでは不十分であり，微分幾何学に現れる諸概念と線型偏微分作用素の理論との対応を徹底的に解明するように努めた．

(4) Berezin-Toeplitz 量子化などの関数解析の研究では，素朴な作用素論で培われてきた従来の手法と，超局所解析で培われてきた手法のそれぞれの長所と短所を十分に比較し十分に整理した上で研究を進めた．特に問題を捉える基盤となる研究分野が異なると，一方の分野での常識は必ずしもベストな手法や見方でないことも少なくなかった．

４．研究成果

(1) 相空間から同じ実次元の複素ユークリッド空間への正準変換に付随した Bargmann 変換とよばれるある種の複素相関数をもつフーリエ積分作用素の像として特徴付けられる関数空間上の Berezin-Toeplitz 作用素の有界性や変形量子化の評価について，ある種の I-ラグランジュ部分多様体上の Weyl 量子化やもとの相空間上の Weyl 量子化との関係を積極的に利用して考察し，従来の結果を大幅に改善した（雑誌論文 [3]）.

(2) 閉リーマン多様体からコンパクトな概エルミート多様体へのシュレーディンガー写像流の初期値問題の解法を考察した．まず，すべての先行研究で仮定されていた値域のケーラー性の意味を線型偏微分作用素の理論の視点で考察し，ケーラー性は複素数値のシュレーディンガー型発展方程式で知られた低階項のポテンシャル条件であることがわかった．この条件は複素数値の単独方程式の初期値問題が一意可解であるための必要十分条件であろうと予想されている条件（平坦トーラスでは実際にそのようになっている）に対応する．しかし，多様体の間の写像は微分方程式系なので，さらに適切性のための見かけ上の弱い障害を許すと思われる．そこで，誘導束の断面に作用する擬微分作用素を導入して必要な程度には実用化して用いることにより，線型偏微分作用素の方法が有効に働いて，ケーラー性を仮定しなくても初期値問題が短時間階を持つことを証明した．これは，投稿中であり，レフェリーの助言にしたがって序文を大幅に加筆後に再提出する．

(3) 研究協力者 小野寺栄治氏と共同で，渦糸運動に関連したコンパクトな概エルミート多様体上の閉曲線運動を記述する 3 階分散型写像流の初期値問題を考察した．定義域がコンパクトなので，解の平滑化効果は期待できないが，ケーラー性を仮定しないことによる概複素構造の共変微分による障害は，(2) で開発した誘導束の断面に作用する擬微分作用素を用いて解消することができて，初期値問題が一意可解であることを証明した（雑誌論文[4]）.

(4) 階数が真に 1 より大きい定数係数楕円型フーリエ掛け算作用素のレゾルベント評価を考察し，それを主部にもち低階項のない分散型擬微分方程式の解の時間変数について大域的で空間変数について重みつき（ある意味で局所的）な解の平滑化評価を考察した．研究代表者の研究 (2002) において主部は一般の実主要型であっても期待通りの平滑化評価が得られることが証明されていたが，証明方法は主表象のレベル集合のなす超曲面の性質を丹念に細かく抽出する方法であり，一部の関連する研究者からは難解であると批判されていた．本研究では，楕円性により主表象のレベル集合が閉曲面になることを十分に利用して，レベル集合へのフーリエ制限定理を構築するなどして，研究代表者の既知の結果の一部に対して極めて単純明快な証明を与えた．さらに，少し異なる型のレゾルベント評価式も得ることができた．これには低周波数帯のある種の評価を構築することによる．結果として，従来のラプラス作用素に対する結果を，作用素の階数とレベル集合の形状の 2 つの点で完全に一般化して最終結果を得ることができた．特に平滑化評価にはレベル集合のなす超曲面の曲率は全く関係ないこともわかった（雑誌論文 [1]）.

(5) 古典的エネルギー法では解くことのできないユークリッド空間上の半線型シュレーディンガー方程式の初期値問題の解は，初期値がある意味で指数関数的に減衰するならば，解は空間変数と時間変数に関して減衰に応じた指数の Gevrey 級関数や実解析関数になることを証明した．この有限階版は研究代表者が擬微分作用素を用いた独自の手法で既に証明している (1999)．基本的には Gevrey 級あるいは解析的になるかどうかわからない関数のすべての導関数についてコーシーの評価式のようなものを導出して証明することになる．そこで微分階数に関する数学的帰納法が機能するようにすべく，いくつかの巧みな数え上げを見出した．それらを巧みに用いることにより，大規模系に対する擬微分作用素による解の変換によってエネルギー法が機能して，微分階数によらないある種の一様評価を得ることができて，目的が達成される（雑誌論文[2]）.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

[1] Hiroyuki Chihara and Eiji Onodera,
A third order dispersive flow for closed curves into almost Hermitian manifolds,
Journal of Functional Analysis., **257** (2009), pp.388-404. 査読有

[2] Hiroyuki Chihara,
Bounded Berezin-Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space,
Integral Equations and Operator Theory, **63** (2009), pp.321-335. 査読有

[3] Hiroyuki Chihara,
Gain of analyticity for semilinear Schrödinger equations,
Journal of Differential Equations, **246** (2009), pp.681-723. 査読有

[4] Hiroyuki Chihara,
Resolvent estimates related with a class of dispersive equations,
Journal of Fourier Analysis and Applications, **14** (2008), pp.301-325.査読有

〔学会発表〕（計 10 件）
[1] Hiroyuki Chihara,
Bounded Berezin-Toeplitz operators on the Segal –Bargmann space,
2010 年 9 月 16 日,
The 6th Symposium "Topics in Nonlinear Problems",
山口大学（山口）.

[2] Hiroyuki Chihara,
Schrödinger flow into almost Hermitian manifolds,
2010 年 1 月 26 日,
The 27th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations,
九州大学（福岡）.

[3] Hiroyuki Chihara,
Geometric Analysis of Schrödinger maps,
2009 年 1 月 28 日,
Nonlinear Wave and Dispersive Equations,
京都大学（京都）.

[4] Hiroyuki Chihara,
Geometric Analysis of Schrödinger maps,
2008 年 12 月 2 日,
Colluquium in Mathematics,
Fudan University (上海).

[5] Hiroyuki Chihara,
Bounded Berezin-Toeplitz operators on the Segal –Bargmann space,
2008 年 6 月 11 日,
Lectures on Semiclassical Analysis,
兵庫県立先端科学技術支援センター（赤穂）.

〔図書〕（計 1 件）
[1] エリアス・M・スタイン，ラミ・シャカルチ著
新井仁之，杉本充，高木啓行，千原浩之訳
プリンストン解析学講義 II「複素解析」,
日本評論社，2009. pp.32-70,pp.160-205

〔その他〕
(1) ホームページ
http://eniac.sci.kagoshima-u.ac.jp/~chihara/index.html

(2) 研究集会の組織
・2009 年 9 月 9 日～9 月 11 日
RIMS 共同研究「微分方程式に対する幾何解析の展開」,
京都大学（京都),
研究代表者：千原浩之.

・2010 年 11 月 16 日～18 日
International Conference “Partial Differential Equations and Mathematical Physics”,
芝蘭会館別館（京都),
組織委員会：
千原浩之（委員長，鹿児島大学),
片山聡一郎（和歌山大学),
多久和英樹（同志社大学),
砂川秀明（大阪大学).

６．研究組織
(1)研究代表者
千原　浩之（CHIHARA　HIROYUKI）
鹿児島大学・理工学研究科（理学系）・教授
研究者番号：70273068

(2)研究協力者
・小野寺栄治 (ONODERA EIJI)
高知大学・自然科学系・准教授
研究者番号：70532357
(2005 年 4 月～2008 年 9 月
東北大学大学院理学研究科博士後期課程在学,
2008 年 10 月～2010 年 3 月
九州大学数理学研究院・学術研究員,
2010 年 4 月～2011 年 3 月
高知大学・自然科学系・講師

・貝塚公一 (KAIZUKA KOICHI)
筑波大学数理物質科学研究科・研究生
(2008 年 4 月～2011 年 3 月
東北大学大学院博士後期課程在学,
日本学術振興会特別研究員 DC