

回転翼列の数学モデルについて

花 岡 達 郎
(受理 昭和57年 5 月 31 日)

On the Mathematical Model of Rotating Blade Row

Tatsuro HANAOKA

A mathematical model of rotating blade rows which is analogous to a two-dimensional cascade is presented. The fluid fields of the models is analysed and the relations to the cascade theory and the propeller theory are shown.

内 容

まえがき

記号

- 1 二次元薄翼翼列の非線型理論
- 2 二次元翼列の線型理論
- 3 螺旋状回転翼列の数学モデル
- 4 回転翼列の誘導速度
- 5 境界条件と積分方程式
- 6 回転翼列と二次元翼列の関係
- 7 プロペラ理論との関係
- 8 非定常回転翼列

あとがき

参考文献

附録 A 螺旋渦による吹き下しの表示式

附録 B 軸心渦による吹き下しの表示式

ま え が き

本文は、運動学的には、回転翼と同じでありながら、二次元翼列同様、半径方向に循環分布が一定、したがって、縦渦（流れ方向を軸とする自由渦のこと）は随伴しない、という翼列の数学モデルと、その流場の表示式を示したものである。この数学モデルの工学的意義は、回転翼の流場解析における、二次元翼列の役割の誤差検定とその補足にある。

プロペラ揚力線理論、軸流送風機的设计理論等の原点が Prandtl の揚力線理論¹⁾にあることは論をまつ

までもないだろう。Prandtl 理論の「翼の各断面で、流れは二次元的である」という仮定が、そのまま回転翼に導入されて、二次元翼列の特性を利用する手法がとられているわけであるが、直進翼と回転翼との幾何学的、運動学的相違が等閑に付されて来た様に思う。通常の定常流の場合とはかく、super-cavitation、更には非定常翼にまで、同じ手法を拡張することには、誰も多少の抵抗を感じるはずである。だからと云って、本論文の数学モデルがどうしても必要か、3次元揚力面理論で完全な解を求める方が順当ではないか、という反論はあるだろう。そのときは、もう一度、Prandtl 理論の原点にもどって考えるとよい。「流れが二次元的」とは、直進翼では、「縦渦なし」の現象をわかりやすく云ったまでのことと理解すべきだろう。三次元揚力面理論は、二つの独立変数による二重積分の積分方程式を扱うものである。それを、縦渦と横渦（翼幅方向に軸をもつもの）に分離し、近似的に、一重積分の積分方程式に書き変えたのが、Prandtl のゆき方である。今では、過去のものになってしまったが、E. Reissner²⁾ の論文は、この手法を丹念に示したものであった。三次元揚力面理論万能の現代でも、この技法は、設計理論の中に生き続け、中にはすたれてしまったものもあるが、プロペラ的设计理論、軸流送風機的设计理論等の様に、健在するものも、幾つかある。

本文で提案する数学モデルは、仮想的流場を表わすものであるから、理論を現実と比較するための模型試験を行うことはできないが、それは気にしなくてよい。利用目的のためには、二次元翼列と、この回転翼列の数値的比較があれば充分である。従来の定常二次元翼

列理論が非線型理論であるのに対し、ここで扱う回転翼列の数学モデルは線型揚力面理論である。二つの理論結果を比較するのに、線型、非線型による精度の違いが混在したのでは、比較の目的が充分果たされない。そこで、先ず二次元翼列理論について、在来の非線型理論と線型揚力面理論の結果の比較の議論から始める。流体は非圧縮、非粘性とする。

記号

- x, y, z 任意点の座標
- x', y', z' 翼面上の点の座標
- ρ 流体密度
- p 流体圧力
- $-w$ 吹き下し
- Φ 速度ポテンシャル
- γ 循環密度
- Δp 揚力面上の圧力差 (揚力密度)

二次元翼列

- U 翼への流入速度
- c 半翼弦長
- t 翼間隔
- $\sigma = 2c/t$
- β 食い違い角
- α 迎角
- K 揚力の干渉係数

$$K^* = \frac{\pi\sigma}{2} K$$

回転翼列

- x, r, θ 任意点の座標 (円柱座標)
- x', r', θ' 渦面上の点の座標
- V 羽根車への流入速度
- Ω 羽根車の回転角速度
- dn 揚力面への法線素片 (揚力の働く方向を正とする)
- l 翼数
- r_0 羽根車の半径
- r_b ハブの半径
- s 螺線に沿って測った長さ

$$h = V/\Omega$$

$$W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2}$$

$$\sigma = \theta - x/h, \tau = \theta + x/h, \mu = r/h$$

$$\sigma' = \theta' - x'/h, \tau' = \theta' + x'/h, \mu' = r'/h$$

$$\tan \varepsilon = 1/\mu, \sin \varepsilon = 1/\sqrt{1+\mu^2}, \cos \varepsilon = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$$

ν 非定常流場の振動率

$$p = \nu/\Omega$$

- $-w_0$ 吹き下しの complex amplitude
- γ_0 循環密度の complex amplitude

1 二次元薄翼翼列の非線型理論

多くの参考書に掲載されている平面翼翼列の理論は、Kármán と Burger³⁾ の書いたものが、その親本になっていると思われる。Kármán & Burger には参考文献が記されていないが、理論の原典は河田^{4),5),6)} のものだろう。河田の論文には、無限遠の条件が三つあげてあって、河田は、その中の「無限前方で、翼の誘導速度は0になる」^{註)} の条件をとっているが、この条件は、それ以前にも、それ以後にも、翼列理論では使われていない。Kármán & Burger では、今日一般に採用される条件に改められている。それによると、流速 U の一様流の中に、 β の食い違い角をもった翼列が、平均迎角 α_m で置かれている場合の理論の結果は次の様である。

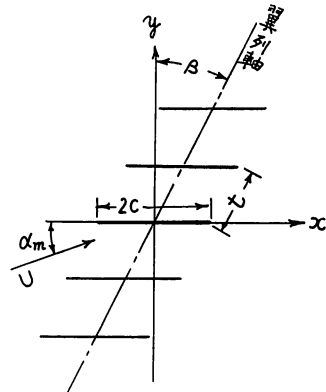


図1

無限翼列では、単独翼の場合と異なり、翼の誘導速度のため、無限前方と無限後方では、流れの方向が異なる。 α_m は、その二つの流れの方向の平均である。翼弦長を $2c$ 、翼列軸方向に測った翼間隔を t とし、 $2c/t = \sigma$ と書く。翼列の一つの翼に働く揚力を L 、迎角が α_m の単独翼の揚力を L_0 としたとき、

$$L/L_0 = K \tag{1.1}$$

によって定義される K を、翼列の揚力干渉係数という。記述を簡単にするため、 K の代りに、それと

$$K^* = (\pi\sigma/2) \cdot K \tag{1.2}$$

の関係にある K^* を使うことにする。

註) 自由境界風洞中の翼に対しては、この条件を使う (文献7参照)。

等角写像による、平面翼列の解析解では

$$K^* = \frac{2m}{\sqrt{1+2m^2 \cos 2\beta + m^4}} = \frac{2m}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2 \cos^2 \beta}} \quad (1.3)$$

である。\$m\$ は翼間隔によって定まるパラメタであつて、\$\varpi\$ と \$\beta\$ を与えれば、

$$\frac{\pi\varpi}{2} = \cos \beta \sinh^{-1} \frac{2m \cos \beta}{1-m^2} + \sin \beta \sin^{-1} \frac{2m \sin \beta}{1+m^2} \quad (1.4)$$

によって、その値が定まる。ただし、\$m < 1\$ とする。

これらの式を、\$K^*\$, \$\varpi\$ の側から見ると、\$m\$ による媒介変数表示になっているから、もし (1.3) (1.4) より、\$m\$ が消去できれば、\$K^*\$ は \$\varpi\$ の関数として表わされることになる。それを行ってみる。

$$\tan A = \frac{2m \sin \beta}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2 \cos^2 \beta}} = K^* \sin \beta \quad (1.5)$$

$$\tanh B = \frac{2m \cos \beta}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2 \cos^2 \beta}} = K^* \cos \beta \quad (1.6)$$

と置くと

$$K^* = \cos \beta \tanh B + \sin \beta \tan A \quad (1.7)$$

である。(1.5), (1.6) より、恒等的に

$$\sin \beta \tanh B - \cos \beta \tan A = 0 \quad (1.8)$$

であるから、

$$K^* = e^{i\theta} (\tanh B - i \tan A) \quad (1.9)$$

のように表わされる。

次に、\$\varpi\$ を \$A, B\$ で表わすことを考えてみる。(1.5)

(1.6) より

$$\sin A = \frac{2m \sin \beta}{1+m^2}, \quad \sinh B = \frac{2m \cos \beta}{1-m^2} \quad (1.10)$$

であるから、これを (1.4) に適用すると

$$\pi\varpi/2 = \cos \beta \cdot B + \sin \beta \cdot A \quad (1.11)$$

が得られる。この方程式を満足する \$A, B\$ は

$$B = (\pi\varpi/2) \cos \beta, \quad A = (\pi\varpi/2) \sin \beta \quad (1.12)$$

である。この二つの式により、恒等式

$$B \sin \beta - A \cos \beta = 0 \quad (1.13)$$

が成立つから、(1.11) は

$$\pi\varpi/2 = (B - iA)e^{i\theta} \equiv a \quad (1.14)$$

と書かれる。

(1.9) より

$$K^* = e^{i\theta} \left\{ \frac{e^B - e^{-B}}{e^B + e^{-B}} - \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{e^{iA} + e^{-iA}} \right\} = \frac{2e^{i\theta}(e^{B-iA} - e^{-B+iA})}{e^{B+iA} + e^{-B+iA} + e^{B-iA} + e^{-B-iA}} \quad (1.15)$$

である。(1.14) をこの式に適用して、\$A, B\$ を消去す

ると

$$K^* = \frac{e^{i\theta} \{\exp(ae^{-i\theta}) - \exp(-ae^{-i\theta})\}}{\operatorname{Re} \{\exp(ae^{-i\theta}) + \exp(-ae^{-i\theta})\}} \quad (1.16)$$

が得られる。これが、\$K^*\$ を \$\varpi\$ と \$\beta\$ の関数として表わした式である。これまでの解析から明らかなように、(1.16) の右辺は実数、したがって、その分子は実数である。このことを念頭に置いて、(1.16) の逆数をとると、

$$\frac{1}{K^*} = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\theta} \{\exp(ae^{-i\theta}) + \exp(-ae^{-i\theta})\}}{\exp(ae^{-i\theta}) - \exp(-ae^{-i\theta})} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \frac{\exp(\pi\varpi e^{-i\theta}) + 1}{\exp(\pi\varpi e^{-i\theta}) - 1} \right] \quad (1.17)$$

と書かれる。

翼列理論は Kutta⁹⁾ から始まるわけであるが、彼は「食い違いなし」の場合を解いている。河田理論以前では、Grammel⁹⁾ の理論が有名で、それは Kutta の理論を「食い違いあり」の場合に拡張したものである。そこでは、複素速度を

$$v = v_x - iv_y = A + B \sqrt{\sin \frac{\pi(c-z)}{a_1 + ia_2} / \sin \frac{\pi(c+z)}{a_1 + ia_2}} \quad (1.18)$$

の様に書いている。\$a_2, a_1/a_2\$ は、それぞれ翼間隔、食い違いに対応する(図2参照)。この流場の特徴は、

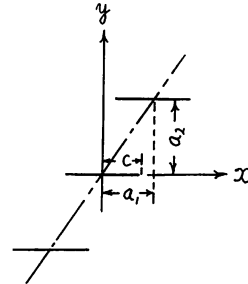


図 2

Grammel も原文に書いている様に、翼は平面でなく、camber をもっていることである。沼知¹⁰⁾ は、この理論を使って、揚力の干渉係数を求めている。それを (1.2) で定義される \$K^*\$ の表示式として書くと

$$K^* = \frac{\cosh^2(a \cos \beta)}{\sin \beta \sin(a \sin \beta) \cos(a \sin \beta)} * \frac{-\cos^2(a \sin \beta)}{+\cos \beta \sinh(a \cos \beta) \cosh(a \cos \beta)} \quad (1.19)$$

である。ただし、この式の場合の迎角は、零揚力から測り、また、\$a\$ は (1.14) で定義した量とする。

(1.19) を変形してみる。

$$\begin{aligned}
 K^* &= \frac{\cosh(2a \cos \beta) - \cos(2a \sin \beta)}{\sin \beta \sin(2a \sin \beta) + \cos \beta \sinh(2a \cos \beta)} \\
 &= \frac{(e^{2a \cos \beta} + e^{-2a \cos \beta})/2 - \cos(2a \sin \beta)}{\operatorname{Re}[e^{-i\beta} \{\sinh(2a \cos \beta) + i \sin(2a \sin \beta)\}]} \\
 &= \frac{e^{2a \cos \beta} - 2 \cos(2a \sin \beta) + e^{-2a \cos \beta}}{\operatorname{Re}[e^{-i\beta} \{e^{2a \cos \beta} + i2 \sin(2a \sin \beta) - e^{-2a \cos \beta}\}]} \\
 &= \frac{\{\exp(ae^{i\beta}) - \exp(-ae^{i\beta})\}}{\operatorname{Re}[e^{-i\beta} \{\exp(ae^{i\beta}) + \exp(-ae^{i\beta})\}]} * \\
 &\quad * \frac{\{\exp(ae^{-i\beta}) - \exp(-ae^{-i\beta})\}}{\operatorname{Re}[e^{i\beta} \{\exp(ae^{-i\beta}) + \exp(-ae^{-i\beta})\}]} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

と書かれる。さきに述べた様に、(1.16)の分子は実数であるから、その共役複素数

$$e^{-i\beta} \{\exp(ae^{i\beta}) - \exp(-ae^{i\beta})\}$$

も実数である。したがって、これを(1.20)の分母の Re の括弧の外に出すことができる。そうしておいて、約分をすると、(1.20)は(1.16)と全く同じ式になる。

単独薄翼の場合、「翼面上の速度分布は、矢高線形状と、迎角のそれぞれに依存するものに分離することができる」という、線型、非線型の両理論に共通する近似定理があるが⁽¹¹⁾、上記の解析結果は、それが、非線型翼列理論にも通用しそうなことを示唆している。

2 二次元翼列の線型理論

二次元翼列の流場を、特異点法の線型理論によって解析する。

一様流に平行に x 軸をとる。翼は渦分布で表わすことにし、これを、翼弦中点を通り、 x 軸に平行な直線上への、翼の投影上に置く(図3参照)。したがって、図1と図3の場合では、翼を表わす特異点の位置に関し、食い違い角に、迎角 α だけの差があるが、線型理論、特に三次元流の場合には、こうするのが一

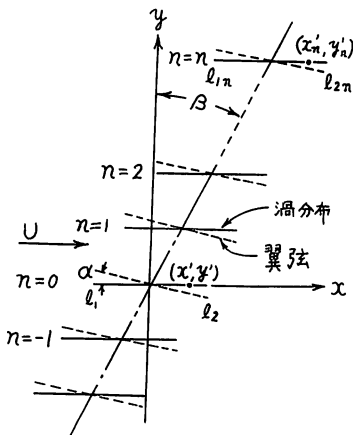


図3

般であり、結果に対する誤差は、 α の2次以下の量である。線型理論では、迎角が正でも、負でも、また翼の平均矢高線の形が変わっても、流体モデルの基本形を変える必要はなく、その形を定めるのは、翼間隔比 $2c/t$ と食い違い角 β の絶対値だけである。図1の流体モデルでは、 $\beta > 0$ (翼列軸は、 y 軸より右回転したところにある) が減速翼列、 $\beta < 0$ (翼列軸は、 y 軸より左回転したところにある) が増速翼列であるのに対し、線型理論では、 α の正負がそれらに対応する。また、翼型の違いは、境界条件を与えるところに現われるだけで、基本の式はいつも変りない。

渦分布の列が、図3の配置であるときの速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{l_{1n}}^{l_{2n}} \gamma(x'_n) \tan^{-1} \frac{x-x'_n}{y-y'_n} dx'_n \quad (2.1)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 x'_n &= x' + nt \sin \beta \\
 y'_n &= y' + nt \cos \beta \\
 l_{1n} &= l_1 + nt \sin \beta \\
 l_{2n} &= l_2 + nt \sin \beta
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

である(図3参照)。 x', y' は x'_0, y'_0 と書くべきものを、簡略して書いたものである。 $l_1 + l_2 = 0$ 、即ち、 $n=0$ の翼の中点を x 軸の原点にとると、(2.2)より

$$(l_{1n} + l_{2n})/2 = nt \sin \beta \quad (2.3)$$

である。(2.1)の変数 x'_n, y'_n を、(2.2)によって、 x', y' に変え、 $y' = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \gamma(x') \\
 &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tan^{-1} \frac{x-x'-nt \sin \beta}{y-nt \cos \beta} dx' \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

のように表わされる。

吹き下し $-w$ は

$$-w = -\partial\phi/\partial y|_{y=0} \quad (2.5)$$

で定義される流速である。翼中心線(翼厚中点を結んだ線)の y 座標を y' で表わすと、線形理論における翼面境界条件は

$$d\hat{y}/dx = w/U \quad (2.6)$$

であるから、翼形状と一様流速が与えられれば、 $-w$ は定まる。 $-w$ を(2.4)、(2.5)より求めると

$$\begin{aligned}
 -w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \gamma(x') \\
 &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x-x'-nt \sin \beta}{(x-x'-nt \sin \beta)^2 + (nt \cos \beta)^2} dx' \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

である。\$dy/dx\$ と一樣流速が与えられれば、\$-c < x < c\$ の区間で、\$-w\$ が決まるので、(2.7) は \$\gamma(x')\$ を求める積分方程式となる。ここで

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^{n=m} \frac{1}{x+n} = \pi \cot \pi x \quad (2.8)$$

の公式を使う。\$i \cot ix = \coth x\$ であるから、(2.7) は

$$\begin{aligned} -w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \gamma(x') \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'+inte^{i\theta}} dx' \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\theta}}{2t} \int_{-c}^c \gamma(x') \right. \\ &\quad \left. \times \coth \left\{ \frac{\pi(x-x')e^{-i\theta}}{t} \right\} dx' \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

と書かれる。

$$2c/t = \sigma, \quad x/c = \xi, \quad x'/c = \xi', \quad -w/U = g(\xi) \quad (2.10)$$

の無次元量を使うと、(2.9) は

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \operatorname{Re} \frac{\sigma e^{-i\theta}}{4U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi') \\ &\quad \times \coth \left\{ \frac{\pi \sigma (\xi - \xi') e^{-i\theta}}{2} \right\} d\xi' \quad (2.11) \end{aligned}$$

となる。

$$X = \exp(\pi \sigma \xi e^{-i\theta}), \quad X' = \exp(\pi \sigma \xi' e^{-i\theta})$$

と置くと

$$\coth \left\{ \frac{\pi \sigma (\xi - \xi') e^{-i\theta}}{2} \right\} = 1 + \frac{2X'}{X - X'}$$

である。

また、線型理論の枠内では、翼上下面の圧力差 \$\Delta p\$ は、

$$\Delta P = \rho U \gamma \quad (2.12)$$

と置いてよいから、揚力係数 \$C_l\$ は

$$C_l = \frac{1}{\rho U^2 c} \int_{-c}^c \Delta p dx = \frac{1}{U} \int_{-1}^1 \gamma d\xi \quad (2.13)$$

である。

以上を参考にして、(2.11) の変数 \$\xi, \xi'\$ を

$$\xi = \frac{\exp(\pi \sigma \xi e^{-i\theta}) - \cosh(\pi \sigma e^{-i\theta})}{\sinh(\pi \sigma e^{-i\theta})} \quad (2.14)$$

によって、\$E, E'\$ に変えると、

$$\left. \begin{aligned} \exp(\pi \sigma \xi e^{-i\theta}) &= (E' + k) \sinh(\pi \sigma e^{-i\theta}) \\ d\xi &= \frac{e^{i\theta}}{\pi \sigma} \frac{dE'}{E' + k} \\ k &= \coth(\pi \sigma e^{-i\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

であるから、(2.11) は

$$\begin{aligned} g(E) &= \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma e^{-i\theta}}{4} \right] C_l \\ &\quad + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E - E'} dE' \quad (2.16) \end{aligned}$$

のように書き変えられる。以下では、左辺も複素数の

実数部と考える。この式では、\$\xi, \xi'\$ の関数 \$g(\xi), \gamma(\xi')\$ を、\$E, E'\$ の関数として表わすのに、簡単のため

$$g\{\xi(E)\} \equiv g(E), \quad \gamma\{\xi'(E')\} \equiv \gamma(E')$$

と書いている。(2.16) は \$g(E)\$ を与えて、\$\gamma(E)\$ を求める積分方程式であるが、その解を求めることは、本文の目的ではない。ここでは、平面翼の場合の解が得られればよい。

平面翼の場合、左辺が迎角 \$\alpha\$ で、右辺第1項と共に常数であるから、第2項も常数でなければならない。単独翼の場合から類推して

$$\gamma(E) = \bar{\gamma} \sqrt{\frac{1-E'}{1+E'}} \quad (2.17)$$

と置く。\$\bar{\gamma}\$ は常数であるが、この場合は複素数である。

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E'}{1+E'}} \frac{dE'}{E - E'} \quad (2.18)$$

の積分式は、積分変数が複素数になっているが、いわゆる複素積分ではない。\$-1\$ から \$1\$ に到る、ある定まった滑らかな曲線に沿うもので、(2.11) は、その線積分の形と理解すればわかりやすい。積分変数 \$E'\$ は、\$E' = E\$ を通るとき、この点を飛び越えて、先に移る。(2.18) の積分記号に、実積分の Cauchy の主値をとるときと同じものが使われているのは、このことを表わしている。

$$E' = \cos \varphi', \quad E = \cos \varphi$$

と置くと、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi' = 1 \\ &\quad + \frac{1 - \cos \varphi}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \end{aligned}$$

と書かれる。この式の変数 \$\varphi, \varphi'\$ は複素数である。右辺第2項は、実数の場合と同様の運算法で、0 になることが示される。よって

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E'}{1+E'}} \frac{dE'}{E - E'} = 1 \quad (注) \quad (2.19)$$

である。これを、(2.16) に適用すると

$$\alpha = \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma e^{-i\theta}}{4} \right] C_l + \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\gamma}}{2U} \right] \quad (2.20)$$

が得られる。右辺第2項が求められればよいわけで、それは次の様にする。

(2.20) の \$C_l\$ は実数であるから、両辺に \$2\pi/C_l\$ を乗じると

注) 後記。この説明は、(2.19) の証明にはならない。Muskhelishvili; Singular Integral Equations, Chap II を使うと、厳密な証明ができる。(2.22) についても同様。

$$\frac{2\pi\alpha}{C_l} = \text{Re} \left[\frac{\pi\sigma e^{-i\beta}}{2} \right] + \text{Re} \left[\frac{\pi\bar{\sigma}}{UC_l} \right] \quad (2.21)$$

となる。\$\bar{\sigma}\$ が与えられれば、(2.13) により、\$C_l\$ を求めることができる。(2.13) の積分変数を \$\xi'\$ より \$\mathcal{E}'\$ に変え、(2.17) を代入すると

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{e^{i\beta}}{\pi\sigma} \frac{\bar{\sigma}}{U} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}'}{1+\mathcal{E}'}} \frac{d\mathcal{E}'}{\mathcal{E}'+k} \\ &= \frac{e^{i\beta}\bar{\sigma}}{\sigma U} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-\cos\phi'}{\cos\phi'+k} d\phi' \\ &= \frac{e^{i\beta}\bar{\sigma}}{\sigma U} \left\{ \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right\} = \frac{e^{i\beta}\bar{\sigma}}{\sigma U} \\ &\quad \times \{ \exp(\pi\sigma e^{-i\beta}) - 1 \} \quad (2.22) \end{aligned}$$

となる。(2.22) を (2.21) の右辺第2項の分母に代入して、\$\bar{\sigma}\$ を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\alpha}{C_l} &= \text{Re} \left[\frac{\pi\sigma e^{-i\beta}}{2} + \frac{\pi\sigma e^{-i\beta}}{\exp(\pi\sigma e^{-i\beta}) - 1} \right] \\ &= \frac{\pi\sigma}{2} \text{Re} \left[e^{-i\beta} \frac{\exp(\pi\sigma e^{-i\beta}) + 1}{\exp(\pi\sigma e^{-i\beta}) - 1} \right] \quad (2.23) \end{aligned}$$

が得られる。左辺は \$L_0/L\$、つまり \$1/K\$ である。この式より、\$K\$ と (1.2) の関係にある \$K^*\$ の逆数、つまり \$1/K^*\$ の表示式を求めると、それは (1.17) と完全に一致する。

以上を総合すると、迎角 \$\alpha\$ に比例する揚力の係数は、線型、非線型の両理論とも同じ式になる、という結論が得られたことになる。

ところで、\$x \to \infty\$ における吹き上げを \$w_{\infty}\$ と書くことにすると、(2.9) より

$$w_{\infty} = \pm \frac{\Gamma \cos \beta}{2t} \quad (2.24)$$

が得られる。ただし、\$\Gamma\$ は一つの翼の全循環で、

$$\Gamma = \int_{-c}^c \gamma dx' \quad (2.25)$$

である。また、(2.4) より、\$x\$ 軸方向流速 \$u\$ を求めると、

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \text{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \gamma(x') \\ &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'-nt \sin\beta - i(y-nt \cos\beta)} dx' \\ &= \text{Im} \left[\frac{e^{-i\beta}}{2t} \int_{-c}^c \gamma(x') \right. \\ &\quad \left. \times \coth \left\{ \frac{\pi(x-x'-iy)e^{-i\beta}}{t} \right\} dx' \right] \quad (2.26) \end{aligned}$$

であるから、無限遠における \$u\$ は

$$u_{\infty} = \pm \frac{\Gamma \sin \beta}{2t} \quad (2.27)$$

である。(2.24)、(2.27) より、無限遠方の誘導速度

は、翼列軸に平行、その絶対値は \$\Gamma/(2t)\$ で、前方と後方では逆向きとなることがわかる。これは非線型理論と同じである。

翼列軸方向の流速を \$w_t\$、それに直交する流速を \$w_n\$ の記号で表わすと、\$w_n\$ には誘導速度の成分が入らないから、無限前方、後方とも等しく、

$$w_n = U \sin(\pi/2 - \beta - \alpha) \quad (2.28)$$

である。一方、\$w_t\$ は、(2.24)、(2.27) より、無限遠方では、

$$\left. \begin{aligned} (w_t)_{-\infty} &= U \cos(\pi/2 - \beta - \alpha) + \Gamma/(2t) \\ (w_t)_{\infty} &= U \cos(\pi/2 - \beta - \alpha) - \Gamma/(2t) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

となる (図4参照)。

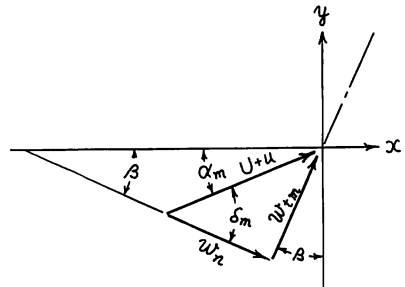


図4

非線型理論では、流入角 \$\alpha\$ の平均値 \$\alpha_m\$ を

$$\left. \begin{aligned} \delta_m &= \tan^{-1}(w_{tm}/w_n) \\ w_{tm} &= \{(w_t)_{-\infty} + (w_t)_{\infty}\} / 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

$$\alpha_m = \delta_m - \beta \quad (2.31)$$

で与えている。(2.30) に (2.28)、(2.29) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta_m &= \cot(\pi/2 - \beta - \alpha) = \tan(\beta + \alpha) \\ \text{即ち、} \alpha &= \delta_m - \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

となって、線型理論における流入角 \$\alpha\$ は、非線型理論の平均迎角と同等のものであることが示される。

本節の初めで、線型理論では、平面翼の場合、\$\beta\$ の正負は結果に影響しないことを述べたが、このことは、(2.23) の結果に現われている。そして、それが、非線型理論でも成立つことは記憶に止めておく必要がある。矢高や、翼厚による流体攪乱は、迎角によるものより小さいのが一般であるから、結局、翼断面が普通形状の翼列の場合、線型理論による誤差は小さいと云える。云い換えると、次節以下の回転翼列と、二次元翼列の計算結果を比較する際、線型、非線型の区別による違いを、特に気にかける必要はない。

3 螺旋状回転翼列の数学モデル

前節の線型二次元翼列理論と、運動学的、幾何学的に異なるだけで、物理的、また数学的条件は同じとみなせる、回転翼列の数学モデルについて考えてみる。

回転翼列の回転角速度を Ω 、軸方向流入速度を V とする。翼を表す束縛渦は、ピッチが $2\pi V/\Omega$ の常螺旋面への、翼の投影面上に分布させ、二次元翼列の場合と、物理的条件を同じにするため、自由渦を伴わないもの、つまり半径方向に循環が一定なものを想定する。螺旋線の素片 ds 間の渦の強さを $\hat{\Gamma}$ 、その位置の圧力差を Δp とすると、Kutta-Joukowski の定理により

$$\Delta p ds = \rho W \hat{\Gamma} \quad (3.1)$$

$$W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2} \quad (3.2)$$

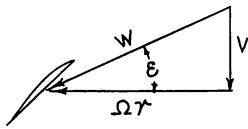


図 5

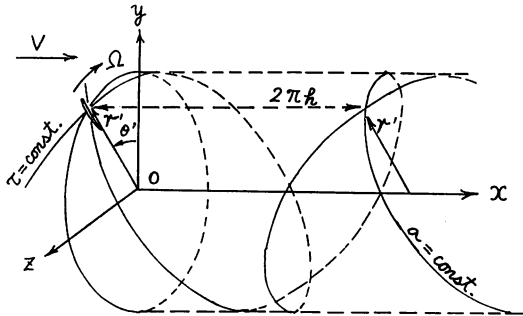


図 6 螺旋座標

である。

ここで、円柱座標 x, r, θ と

$$\tau = \theta + x/h, \sigma = \theta - x/h, \mu = r/h \quad (3.3)$$

の関係にある螺旋座標¹²⁾を導入する。 h は常数であって、ここでは、 $h = V/\Omega$ である。螺旋線の素片 ds は

$$ds = \frac{h}{2} \sqrt{1 + \mu^2} d\tau \quad (3.4)$$

のように表わされるから、それを (3.1) に適用し、 W に (3.2) を使うと

$$\frac{h}{2} \Delta p d\tau = \rho V \hat{\Gamma} \quad (3.5)$$

となる。また、翼素の全循環を Γ 、翼素の前後縁の s

座標および τ 座標を、それぞれ s_1, s_2 および τ_1, τ_2 とすると

$$\rho W \Gamma = \int_{s_1}^{s_2} \Delta p ds = \frac{h}{2} \sqrt{1 + \mu^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau$$

であるから、

$$\rho V \Gamma = \frac{h}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau \quad (3.6)$$

である。(3.5) より、半径方向の各翼素の循環の分布 $\hat{\Gamma}$ を一定にするには、圧力差 Δp を一定にすればよいこと、また (3.6) より、半径方向の各翼素の全循環を一定に保つには、前後縁の τ 座標を半径方向に一定にする必要のあることがわかる。この様な翼の形の正面投影輪郭は、回転軸をかなめとする扇形である。その螺旋面上投影輪郭を平面に展開した形状は、文献 12) に示す方法で求めることができる (図 7 参照)。

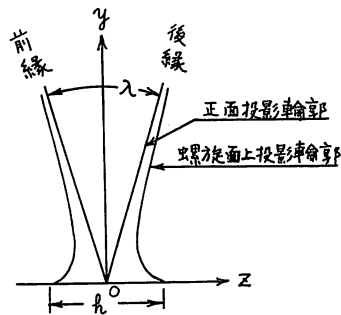


図 7 (x 軸の負の側から正に向って見る)

扇形の開き角を λ としたときの、 $\sigma = 0$ の螺旋面上、半径 r 位置の翼素について考える。 $\sigma = 0$ のとき

$$\theta = x/h \quad (3.7)$$

であるから、 τ 座標の前後縁の差は

$$\begin{aligned} \tau_2 - \tau_1 &= (\theta_2 + x_2/h) - (\theta_1 + x_1/h) \\ &= 2(\theta_2 - \theta_1) = 2\lambda \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。これと、(3.4) を使って、翼弦長 $2c$ と λ の関係を求めると

$$2c = s_2 - s_1 = \lambda h \sqrt{1 + \mu^2} = \lambda r \sec \epsilon \quad (3.9)$$

である。ただし、 ϵ は yz 面と螺旋線のなす角である。(3.9) より、 $r = 0$ のとき、 $2c = \lambda h$ 、 r が大きくなるに従って、 $2c \rightarrow \lambda r$ となることがわかる。これを螺旋面上投影輪郭の平面展開で見ると、回転軸上では、翼弦長が λh であり、半径が大きくなるに従って、前縁および後縁の輪郭は、正面投影輪郭のそれらに漸近する。螺旋面投影輪郭の平面展開は、螺旋面上のものを、平面に引き延ばしたものであるから、展開面では前後縁

は曲線の形をとるが、実際の空間では、それらは直線である。この様な螺旋面状の翼が、軸対称に、 l 枚配列されたものを回転翼列の数学モデルとし、次節以下で、その流場の解析を行う。

図3の t に対応する翼間隔は

$$t = 2\pi r / l \tag{3.10}$$

であるから、翼間隔比 $\sigma = 2c/t$ は、(3.9) を使うと、

$$\sigma = \frac{2cl}{2\pi r} = \frac{l\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} = \frac{l\lambda}{2\pi} \sec \varepsilon \tag{3.11}$$

となる。この σ を翼素剛率 (solidity) と云う。また、翼面への法線と、 $-r\theta$ のなす角 β は二次元翼列の食い違い角に対応するもので、それと ε の関係は

$$\beta = \pi/2 - \varepsilon \tag{3.12}$$

である (図8参照)。

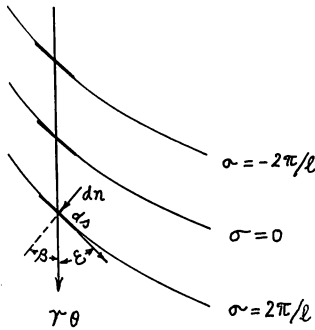


図8

4 回転翼列の誘導速度

一つの動径上、区間 $[r_b, r_0]$ に、強さ $\hat{\Gamma}$ の渦糸があるときの誘導速度の、円柱座標成分を、Biot-Savartの法則により求めると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{\hat{\Gamma}}{4\pi} \int_{r_b}^{r_0} \frac{r \sin(\theta - \theta')}{R^3} dr' \\ \Delta v_i &= -\frac{\hat{\Gamma}}{4\pi} \int_{r_b}^{r_0} \frac{(x-x') \cos(\theta - \theta')}{R^3} dr' \\ \Delta v_r &= -\frac{\hat{\Gamma}}{4\pi} \int_{r_b}^{r_0} \frac{(x-x') \sin(\theta - \theta')}{R^3} dr' \end{aligned} \right\} \tag{4.1}$$

である。ただし、 (x, r, θ) は任意点の座標、 (x', r', θ') は渦の位置の座標、 R はその間の距離で

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$$

とする。 v_r は θ 方向の接線流速を意味し、また、渦は放射方向に向かって、右回転しているものとする。この渦糸が、螺旋面上、 τ_1 より τ_2 まで分布し、更に、それが、 x 軸に関して対称に、 l 個ある場合の誘導速

度を、(3.5) を使って、表わすと

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{h}{8\pi\rho V} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau' \\ &\quad \times \int_{r_b}^{r_0} \frac{r \sin(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \\ v_i &= -\frac{h}{8\pi\rho V} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau' \\ &\quad \times \int_{r_b}^{r_0} \frac{(x-x') \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \\ v_r &= -\frac{h}{8\pi\rho V} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau' \\ &\quad \times \int_{r_b}^{r_0} \frac{(x-x') \sin(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \\ R &= \sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)} \end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

となる。この回転翼列は、右回転 (x 軸の負の向き) する減速翼 (プロペラ等) の場合に対応する。

吹き下し $-w$ は

$$\begin{aligned} -w &= -v_i \sin \varepsilon + v_x \cos \varepsilon \\ &= (-v_i + \mu v_x) / \sqrt{1 + \mu^2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

であるから、(4.2) を代入して、束縛渦の吹き下し $-w_b$ を求めると

$$\begin{aligned} -w_b &= \frac{1}{8\pi\rho V \sqrt{1 + \mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau' \\ &\quad \times \int_{r_b}^{r_0} \frac{1}{R^3} \{ r^2 \sin(\theta - \theta' - 2m\pi/l) \\ &\quad + h(x-x') \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l) \} dr' \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。

翼面境界条件に使われる吹き下しは、翼面上のものであるが、線型理論では、それを、螺旋面上の値、即ち $\sigma = \sigma'$ におけるもので代用する。

$$v = (\tau - \tau')/2, v_m = v - 2m\pi/l \tag{4.5}$$

と書くと、 $\sigma = \sigma'$ では

$$\left. \begin{aligned} x - x' &= h(\tau - \tau' - \sigma + \sigma')/2 = h v \\ \theta - \theta' &= (\tau - \tau' + \sigma - \sigma')/2 = v \end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

であるから、 $\sigma = \sigma'$ における $-w_b$ は、(4.4) より

$$\begin{aligned} -w_b &= \frac{1}{8\pi\rho V \sqrt{1 + \mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p d\tau' \\ &\quad \times \int_{\mu_b}^{\mu_0} \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{(v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v_m)^{3/2}} d\mu' \end{aligned} \tag{4.7}$$

と書かれる。ただし、 $\mu_0 = r_0/h$, $\mu_b = r_b/h$, また v, v_m は流速を表わす記号とは別種の、(4.5) で定めた変数である。

前節に提示した回転翼列の数学モデルでは、 $\Delta p, \tau_1, \tau_2$ は半径方向に一定であるから、(4.7) の r' の積分は直ちに行うことができる。 $\mu_b = 0, \mu_0 \rightarrow \infty$ とし、

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2bx + a)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}}$$

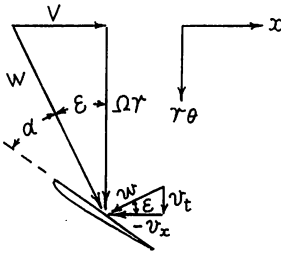
の公式を使うと

$$-w_b = \frac{1}{8\pi\rho V\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p \times \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{\sqrt{v^2 + \mu^2(\sqrt{v^2 + \mu^2} - \mu \cos v_m)}} d\tau' \quad (4.8)$$

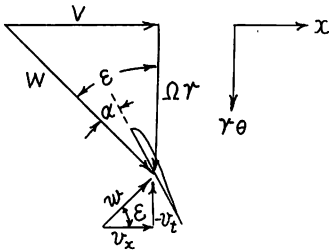
が得られる。

5 境界条件と積分方程式

前節で求めた吹き下し $-w_b$ は、プロペラ、送風機等に対応する減速翼列に関するものであるが(図9(a)参照)、2節で説明した様に、これはまた、風車、タービン等の場合の、増速翼列に対しても使うことができる。それには先づ、束縛渦の正負の定義を明確に定めておく必要がある。



(a) プロペラ (減速翼)



(b) 風車 (増速翼)

図9

(4.1) は減速翼に対応する誘導速度で、渦は、放射方向に向って、右回転するものを正としている。増速翼では、渦の回転方向がそれと逆であるから、減速翼の正に対し、負の値をとることになる。循環の密度を γ とすると、3節の \hat{f} は γds である。それを(3.1)に適用すると

$$\Delta p = \rho W \gamma \quad (5.1)$$

となるから、 $\Delta p/(\rho W)$ の代りに γ を使うことができる。ただし、この式の γ は、 Δp と同一符号とする。

いま、 Δp を揚力密度とすると、減速、増速の別なく、正常作動状態では正であるのに対し、循環密度の方は、減速、増速で符号が変ってくる。仮に、減速翼のものを $\gamma^{(+)}$ 、増速翼のものを $\gamma^{(-)}$ と書くことにすると、(4.1) で、 $\hat{f} = \gamma ds$ と置いたときの循環密度に対しては

$$\gamma^{(\pm)} = \pm \Delta p / (\rho W) \quad (5.2)$$

であるから、増速翼では、(4.2) は逆符号となる。

ところで、(4.3) は減速翼の吹き下しであるが、増速翼では、吹き下しの向きが逆であるから、

$$-w_b^{(-)} = v, \sin \varepsilon - v_x \cos \varepsilon = (v_t - \mu v_x) / \sqrt{1 + \mu^2} \quad (5.3)$$

の様に、右辺は、(4.3) と逆符号になる。結局、(4.2) を逆符号にしたものを、(5.3) に代入して求めた、増速翼の吹き下し $-w_b^{(-)}$ の表示式そのものは、流れの向きは別として、(4.7)、(4.8) と全く同じになる。減速翼、増速翼の違いは、翼面境界条件の与え方に依存するわけで、それは、減速翼では

$$-w/W = \varepsilon_0 - \varepsilon = \alpha - d\xi/d\eta \quad (5.4)$$

増速翼では

$$-w/W = \varepsilon - \varepsilon_0 = \alpha - d\xi/d\eta \quad (5.5)$$

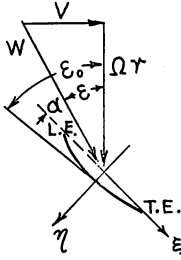
である。ただし、 η は正常作動状態の揚力の働く方向を正にとる(図10参照)。

(3.8) で示した様に、螺旋面上では、 $\tau = 2\theta$ であるから、 $m=0$ の翼の翼弦中点を結ぶ線を、 $x=0, \theta=0$ の動径に一致させると、(4.8) の積分の上下限は、 $\tau_1 = -\lambda, \tau_2 = \lambda$ となる。また、 Δp を、(5.1) によって、 γ に変えると、(4.8) は

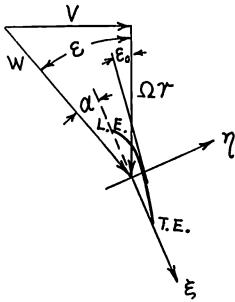
$$-\frac{w_b}{W} = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{W} \times \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{\sqrt{v^2 + \mu^2(\sqrt{v^2 + \mu^2} - \mu \cos v_m)}} d\tau' \quad (5.6)$$

と書かれる。翼形状と作動状態が与えられているとき、この式の左辺は、(5.4) または (5.5) で定まるから、(5.6) は γ/W に関する積分方程式となる。この式の核関数には、 $\tau = \tau'$ に、一位の極があるから、その特異性を分離して

$$-\frac{w_b}{W} = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\tau')}{W} \frac{K\{(\tau - \tau')/2; \mu\}}{\tau - \tau'} d\tau' \quad (5.7)$$



(a) 減速翼



(b) 増速翼

図 10

$$K(v; \mu) = 2 \sum_{m=0}^{l-1} \frac{v(\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m)}{\sqrt{v^2 + \mu^2}(\sqrt{v^2 + \mu^2} - \mu \cos v_m)} \quad (5.8)$$

と書いておくと、数値計算に都合である。変数を正規化するため、 τ, τ' を、 $\tau/\lambda = \xi, \tau'/\lambda = \xi'$ によって、 ξ, ξ' に変えると

$$-\frac{w_b}{W} = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{W} \frac{K\{\lambda(\xi - \xi')/2; \mu\}}{\xi - \xi'} d\xi' \quad (5.9)$$

と書かれる。

(5.4) と (5.5) の右辺が等しいとき、つまり、作動螺旋面に対して、翼素の幾何学的形状および姿勢が対称のときは、減速翼と増速翼で、 γ/W の分布形は同じになる。

6 回転翼列と二次元翼列の関係

翼数が多く、且つ半径の大きいところでは、 $m=0$ の翼に影響を与える翼は、その近傍の数枚と考えてよ

いだろう。着目する必要がある翼を、その範囲にとり、

$$|v|/\mu \ll 1, |v_m| \ll 1 \quad (6.1)$$

として、 $\sqrt{v^2/\mu^2 + 1}, \sin v_m, \cos v_m$ を $|v|/\mu, v_m$ のべき級数展開式の3次以上の項を省略したもので置き換えると、(5.6) より

$$-\frac{w_b}{W} \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-n}^n \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{W} \times \frac{v(1+1/\mu^2) - 2m\pi/l}{v^2/\mu^2 + v_m^2} d\tau' \quad (6.2)$$

が得られる。(3.4) を使って、変数 τ を s に変えると、(3.9) により、積分の上下限は $c, -c$ となるから、

$$-\frac{w_b}{W} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n \int_{-c}^c \frac{\gamma}{W} \frac{(s-s')/r^2}{(s-s')^2/r^2} * \frac{-(2m\pi/l)/(h\sqrt{1+\mu^2})}{-4(s-s')m\pi/l\{h\sqrt{1+\mu^2}\} + (2m\pi/l)^2} ds' \quad (6.3)$$

と書かれる。(3.10) により、 $2\pi r/l$ を t と書き、(3.12) によって、 ε を β に変えらると

$$-\frac{w_b}{W} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n \int_{-c}^c \frac{\gamma}{W} \times \frac{s-s'-mt \sin \beta}{(s-s'-mt \sin \beta)^2 + (mt \cos \beta)^2} ds' \quad (6.3)$$

が得られる。この式で、 $n \rightarrow \infty$ にすると、(2.7) と一致するから、翼数が多く、半径が大きくなるに従って、翼近傍の流れが、二次元翼列の流場に漸近することがわかる。しかし、(6.1) は、一般的軸流送風機等としては、かなり厳しい条件である。それに、(2.7) では、翼の無限前方および無限後方で、誘導速度が存在するのに対し、(6.3) では、 n が有限であるから、それが無い。これは大きな違いである。とにかく、回転翼の束縛渦の流場を、二次元翼列のそれで置き換えることには、かなり無理のあることは知っておくべきである。

(3.11), (3.12) より

$$\mu = \tan \beta \quad (6.4)$$

$$l\lambda/(2\pi) = \sigma \sin \beta = \sigma \mu / \sqrt{1+\mu^2} \quad (6.5)$$

である。積分方程式 (5.9) には、翼数 l 、扇形の開き角 λ 、螺旋のピッチ比 μ の三つの副変数がある。羽根車の翼数 l 、展開面形状 $2c=f(r)$ 、半径 r_0 、作動状態 μ_0 が与えられたとする。その束縛渦の誘導速度、または循環密度を計算するには、次の様にする。 r を与えると、 $2c$ が決まり、 $\mu = \mu_0 r/r_0$ より μ が、また (3.11) より λ が定まるので、(5.9) が計算できる。それを二次元翼列のものと比較する場合は、(6.4) (6.5) により定まる σ, β に対応するものを選べばよい。

7 プロペラ理論との関係

プロペラ理論では、自由渦による項をも含む吹き下し $-w$ の表示式が求められている。本節の目的は、それと (4.4) との関係进行明らかにすることであるが、その結果は、次節の非定常回転翼列の吹き下しを導くのに役立つことになる。

文献 13), 14) によると、線型プロペラ理論における吹き下し $-w$ は

$$-w = -\frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} dT \frac{Vh^2}{8\pi} \sum_{m=0}^{\tau-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} d\tau' \quad (7.1)$$

ただし

$$R = \sqrt{(X-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)} \\ = h \sqrt{\frac{(T-\tau' - \sigma + \sigma')^2 / 4 + \mu^2 + \mu'^2}{-2\mu\mu' \cos\{(T-\tau' + \sigma - \sigma')/2 - 2m\pi/l\}}} \quad (7.2)$$

である。 $\partial/\partial n'$ は螺旋面に対する法線微分で

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \quad (7.3)$$

のように、 μ', σ', τ' を通して微分を行う。また、 $\partial/\partial n$ は、(7.3) と同形の微分であるが、この方は、 μ, σ, T を通して演算する。したがって

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{h^3 \sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}} \\ \times \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu\mu' t + \sin t_m}{R^{*3}} + \frac{3\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}{h^3} \frac{t \sin t_m}{R^{*5}} \quad (7.4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} R^*(t) &= \sqrt{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t_m} \\ t &= (T - \tau')/2, t_m = t - 2m\pi/l \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

である。

$$I(v; \mu, \mu') = -h^3 \sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)} \\ \times \int_{-\infty}^v \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} dt \quad (7.6)$$

と書くことにすると、(7.4) により

$$I(v; \mu, \mu') = -\frac{\mu\mu'v + \sin v_m}{R^{*3}} \\ - 3(1+\mu^2)(1+\mu'^2) \int_{-\infty}^v \frac{t \sin t_m}{R^{*5}} dt \quad (7.7)$$

である。ここで定義した関数 I を、(7.1) に使うと

$$-w = \frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{\tau-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \\ \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} I\left(\frac{\tau-\tau'}{2}; \mu, \mu'\right) d\tau' \quad (7.8)$$

の様に書かれる。

(7.7) の I を変形する。

$$I = -\frac{\mu\mu'v + \sin v_m}{R^{*3}} \\ - 3 \int_{-\infty}^v \frac{(\mu\mu' t + \sin t_m)(t + \mu\mu' \sin t_m)}{R^{*5}} dt \\ - 3 \int_{-\infty}^v \frac{(\mu^2 + \mu'^2)t \sin t_m - \mu\mu'(\sin^2 t_m + t^2)}{R^{*5}} dt$$

と書き、右辺第 2 項で部分積分を行うと、積分されたものは、第 1 項と消し合うから、

$$I = - \int_{-\infty}^v \frac{\mu\mu' + \cos t_m}{R^{*3}} dt \\ - 3 \int_{-\infty}^v \frac{(\mu^2 + \mu'^2)t \sin t_m - \mu\mu'(\sin^2 t_m + t^2)}{R^{*5}} dt$$

である。更に書き変えたと

$$I = \int_{-\infty}^v \frac{1}{R^{*3}} \{ (\mu^2 \cos t_m + \cos t_m - t \sin t_m) \\ + (t \sin t_m + \cos t_m - \mu^2 \cos t_m + 2\mu\mu') \} dt \\ - \int_{-\infty}^v \frac{3}{R^{*5}} [(\mu^2 \sin t_m + t \cos t_m)(t + \mu\mu' \sin t_m) \\ + \{ \mu' t \sin t_m + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m - \mu(1-\mu'^2) \} \\ \times (\mu' - \mu \cos t_m)] dt$$

であるから、

$$I = \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{R^{*3}} + \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_{-\infty}^v \frac{1}{R^{*3}} \\ \times \{ \mu' t \sin t_m + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m - \mu(1-\mu'^2) \} dt \quad (7.9)$$

のように表わされる。

(7.9) を (7.8) に代入し、 $\Delta p, \tau_1, \tau_2$ が半径方向に一定として、(7.9) の第 2 項に対応する項の積分を行うと

$$-w = \frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{\tau-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \\ \times \int_{\mu_b}^{\mu_0} \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{R^*(v)^3} d\mu' \\ + \frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{\tau-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \int_{-\infty}^v \left[\frac{1}{R^*(t)^3} \right. \\ \left. \times \{ \mu' t \sin t_m + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m - \mu(1-\mu'^2) \} \right]_{\mu'=\mu_b}^{\mu_0} dt \quad (7.10)$$

が得られる。この式の第 1 項は、(4.7) と全く同じ式であるから、これは束縛渦による吹き下しであり、したがって、第 2 項は自由渦による吹き下しに該当する

はずである。第2項を $-w_f$ の記号で表わすことにし、 t の積分を、 $t=(\tau-T')/2$ によって T' の積分に変えると、 $v=(\tau-\tau')/2$ であるから

$$-w_f = \frac{1}{16\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma\sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \\ \times \int_{\tau'}^{\infty} \left[\frac{1}{R^{*3}} \{ \mu' t \sin t_m + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m \right. \\ \left. - \mu(1-\mu'^2) \right]_{\mu'=\mu_b}^{\mu_0} dT'$$

と書かれる。 τ' と T' の積分順序を交換すると

$$-w_f = \frac{1}{16\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\tau_1}^{\infty} \left[\frac{1}{R^{*3}} \{ \mu' t \sin t_m \right. \\ \left. + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m - \mu(1-\mu'^2) \right]_{\mu'=\mu_b}^{\mu_0} dT' \\ \times \int_{\tau_1}^{\tau'} \gamma\sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \quad (7.11)$$

となる。この式は、守屋¹⁵⁾ が、一定循環の螺線渦の誘導速度を、Biot-Savart の法則から求めたものと全く同じ形である (附録 A 参照)。したがって、 $\mu'=\mu_0$ のときは、螺線渦による吹き下し、また、 $\mu'=\mu_b=0$ では、被積分関数の $\sin t_m$, $\cos t_m$ を含む項が全て消失し、 l 本の直線状渦による吹き下しを表わすことになる (附録 B 参照)。以上によって、 $-w_f$ 、つまり (7.10) の第2項が、自由渦による吹き下しに該当するものであることが証明された。

4節で示した回転翼列の数学モデルでは、自由渦を一切除外したので、流場としては、不完全なものである。 $\mu_0 \rightarrow \infty$ では、(7.11) の被積分関数が0となり、無限遠の螺線渦は有限の空間に影響を及ぼさないから、これはよいが、 $\mu_b=0$ のところの自由渦の影響は残る。翼列理論を回転翼に適用する場合、回転軸の近傍では、精度を期待しない、というのが一般の認識である。この立場で考えると、 $\mu_b=0$ のところの自由渦は、 μ の大きい処に、あまり影響を及ぼさないから、回転翼列の数学モデルにおいて、それを除外するのは自然、と云うことになる。

8 非定常回転翼列

一般的に、横渦、縦渦二種類の自由渦を随伴する非定常翼の中で、二次元非定常翼理論の流体モデルには、後者は存在しない。物理的に、これと相似な回転翼列の数学モデルを考えるとすると、定常流の場合と同様、 τ_1 , τ_2 , Δp を、半径方向に、一定にしたものとなる。このモデルを取り扱うには、対称プロペラの対称振動の非定常理論^{16), 17)} を利用するのが好都合である。対

称プロペラの対称振動とは、プロペラを回転方向に移動して、一つの翼を他の翼の位置に移しても、各翼の振動の様子が、前と全く同じ形になるものを云う。各翼で、振動率と振幅と位相が同じなら、云うまでもなく対称振動であるが、位相差があってもよい場合がある。それは、相隣の翼の間の位相差が $\delta=2p\pi/l$ (p は整数) のときである。位相差が $2p\pi/l$ ということは、各翼は、1回転の間に、 p 回振動することになるから、振動率を ν とすると

$$\delta=2p\pi/l \quad \text{のとき, } p=\nu/\Omega \quad (8.1)$$

の関係がある。このことから、回転の周期より長い周期の振動は対称振動にならないことがわかる。対称振動の場合は、流場が対称螺旋となるから、各翼の圧力分布の amplitude は等しく、従って、一つの翼の上の圧力分布だけがわかればよい事になる。

流場が振動率 ν で調和振動しているときの、非定常プロペラの吹き下し $-w$ および揚力密度 Δp を

$$-w = \text{Re}[-w_0 e^{i\nu t}], \quad \Delta p = \text{Re}[\Delta p_0 e^{i\nu t}] \quad (8.2)$$

の様に、複素数の実数部で表わすことにする。対称プロペラの対称振動のときの吹き下しの complex amplitude は

$$-w_0 = -\frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-i\nu(\tau-\tau')/2} dT' \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2p\pi m/l} \\ \times \int_{\tau_b}^{\tau_0} d\tau' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta p_0 \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds' \quad (8.3)$$

で与えられる^{14), 16)}。この場合も、定常流のときと同じに、 $\partial/\partial n'$ の運算は (7.3) により、また、 $\partial/\partial n$ は同じことを μ , σ , T を通して行う。

(7.6) より

$$-\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{h^3 \sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}} \\ \times \frac{\partial}{\partial t} I(t; \mu, \mu') \quad (8.4)$$

である。 I として、(7.9) を使うと

$$-\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{h^3 \sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}} \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu^2 \sin t_m + t \cos t_m}{R^{*3}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \mu'} \left\{ \frac{\mu' t \sin t_m + \mu'(1-\mu^2) \cos t_m - \mu(1-\mu'^2)}{R^{*3}} \right\} \right] \quad (8.5)$$

のように表わされる。ただし、この式の記号 t は、時間を表わす記号 t とは別種の、一般変数である。

以下の記述では、 Δp_0 の代りに、それと

$$\Delta p_0 = \rho W \gamma_0 \quad (8.6)$$

の関係にある γ_0 を用いる。この γ_0 は、束縛渦の循環密度の complex amplitude に該当する¹⁶⁾。

(8.3) の積分変数 s' を, (3.4) により, τ' へ, T を (7.5) の t に変え, $\{\partial^2/(\partial n \partial n')\} (1/R)|_{s=s'}$ に (8.5) を使うと

$$\begin{aligned}
 -w_0 = & \frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_0 \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \\
 & \times \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-t)-i2pm\pi/l} \\
 & \times \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu^2 \sin t_m + t \cos t_m}{R^{*3}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(\frac{1}{R^{*3}} \right) \right. \\
 & \left. \times \{ \mu' t \sin t_m + \mu' (1-\mu'^2) \cos t_m - \mu (1-\mu'^2) \} \right] dt \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

と書かれる。この式の大括弧内の第2項が、螺旋状自由渦による吹き下しであることは、定常流の場合に指摘した通りである。

dp_0 が半径方向に一定として、 μ' の積分を行い、 $\mu_0 \rightarrow \infty, \mu_b = 0$ とすると、半径無限大の螺旋渦の影響は消失し、中心部の渦の誘導速度だけが残る。 p が整数のとき

$$\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} = l \quad (8.8)$$

であるから、対称振動の場合、回転軸位置にある自由渦は、同じものが l 本、重なったものとなる。定常流にならって、これを除外したものを、非定常回転翼列の数学モデルとし、その吹き下しの complex amplitude を $-w_{0b}$ で表わすことにする。その式を t で部分積分すると

$$\begin{aligned}
 -\frac{w_{0b}}{W} = & \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_{-l}^l \frac{\gamma_0}{W} \\
 & \times \frac{\mu^2 \sin v_m + v \cos v_m}{\sqrt{v^2 + \mu^2}(\sqrt{v^2 + \mu^2} - \mu \cos v_m)} d\tau' \\
 -\frac{ip}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_{-l}^l \frac{\gamma_0}{W} d\tau' \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-t)} \\
 & \times \frac{\mu^2 \sin t_m + t \cos t_m}{\sqrt{t^2 + \mu^2}(\sqrt{t^2 + \mu^2} - \mu \cos t_m)} dt \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

が得られる。これの第1項は (4.8) と同形で、束縛渦による吹き下し、第2項は、放射方向に軸をもつ自由渦 (横渦) の吹き下しである。この数学モデルが Prandtl の渦保存則¹⁸⁾ を満足することは証明できるが、筆者の別の論文¹⁶⁾ に記載されているので、ここでは省略する。第1項は、翼数が多く、半径が大きくなると、定常翼で示した様に、近似的に、(6.3) の形に表わされるが、第2項では、一般に $|t|/\mu \ll 1, |t_m| \ll 1$ とならないから、 t の被積分関数の中を同形に書くことができない。したがって、非定常回転翼に、非定常二

次元翼列を適用することには、かなり無理がある。

(8.9) の副変数は、定常流のときの三つ (l, λ, μ) に、更に p が加わる。第1項、第2項共、被積分関数には、1位の極があるから、(5.7) と同様、分離型に書いてから、数値計算に取りかかる方がやりやすい。

あとがき

最近、欧米諸国で、大型の水平軸風車が建造、または計画されているが、その中の一案に、24枚羽根というのがある¹⁹⁾。この翼数は、船用プロペラとタービン、それぞれの翼数の中間にあり、揚力線理論で性能計算を行う場合、翼間干渉を無視するわけにはいかない。といって、翼列理論を使うには、翼数が少な過ぎる。本文の理論は、その様な場合に適用されるもので、具体的には、数値計算だけに頼ることになるが、揚力傾斜の干渉係数、零揚力角の干渉係数⁷⁾ を算出して、それを利用する。

本論文の実用性としては、以上の様であるが、起草の真意は、ここ二三年の間に書き残した断片的草稿を使って、一編の論文を仕立てるといふ、一つの試みにあった。もう20年も前の事になるが、プロペラ揚力面の積分方程式の核関数を、半径方向に積分する一つの式を示した¹⁷⁾。以来、数値計算法に、その関数を使って来たが^{14), 20)}、無限積分で表わされる項の被積分関数の収束が悪いと聞く。ここで導いた、守屋の式に該当するものの収束のよしあしは、試してみないとわからないが、vortex-lattice 法と関連づけられるという意味からは、この式を使う方がよいだろう。また、非定常プロペラを vortex-lattice 法で解く場合の参考にもなると思う。いづれにせよ、なじみの多くなってしまった、プロペラ揚力面の核関数表示式を、守屋の式に変換する具体的運算を、記録に残すことができるのは幸である。

参考文献

- 1) Prandtl, L., "Tragflügeltheorie", I, II, Göttinger Nachrichten, Math-phys. Kl., 1918, p. 451, 1919, p. 107, または Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927
- 2) Reissner, E., "On the Theory of Oscillating Airfoils of Finite Span in Subsonic Compressible Flow", NACA, TR 1002, 1950

- 3) Kármán, Th. v. and Burgers, J. M., "General Aerodynamic Theory — Perfect Fluids", Durand's Aerodynamic Theory Vol. II (Berlin 1935), p. 91
- 4) 河田三治, "翼列の理論", 航空研究所彙報, 第64号, 1929
- 5) 河田三治 "「プロペラ」翼相互干渉の理論", 造船協会会報, 第46号, 1930
- 6) Kawada, S., "A Contribution to the Theory of Latticed Wing", Proceedings of the 3rd International Congress for Applied Mechanics, Vol. 1, 1930, p. 393
- 7) 花岡達郎外, "翼型特性に対する風洞境界の干渉に関する研究 (その1 自由境界の場合)", 鹿児島大学工学部研究報告 第23号, 1981
- 8) Kutta, W. M., "Über eine Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen," Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math-phys. Kl., München, 1911
- 9) Grammel, R., "Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges," Braunschweig, 1917
- 10) Numachi, F., "Aerofoil Theory of Propeller Turbines and Propeller Pumps with Special Reference to the Effects of Blade Interference upon the Lift and Cavitation," Tech. Rep. Tohoku Univ., Bd. 8, 1929
- 11) 文献3) p. 39
- 12) 花岡達郎, "高速水平軸風車の渦理論", 鹿児島大学工学部研究報告 第23号, 1981
- 13) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論", 船舶技術研究所報告 第5巻 第6号, 1968
- 14) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論—III", 船舶技術研究所報告 第14巻 第6号, 1977
- 15) 守屋富次郎, "プロペラ翼における Biot-Savart の法則の積分に就いて", 日本航空学会誌 第9巻 第89号, 1942または "空気力学序論" 培風館, 1959
- 16) 花岡達郎, "非定常プロペラ理論序説", 造船協会論文集 第109号, 1961
- 17) Hanaoka, T., "Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller", The 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, 1962
- 18) Prandtl, L., "Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflächentheorie und andere Aufgaben", Vorträge aus dem Gebiete der Hydro und Aerodynamik, Innsbruck, 1922
- 19) Mensforth, T., "Windpower Generation on a Large Scale", IEE Conf. Publ. (Inst. Electr. Eng.), 171, 1979

- 20) 花岡達郎, "揚力面の翼端条件と数値解法 (その5 非定常の翼およびプロペラの揚力面)", 船舶技術研究所報告 第15巻 第6号, 1978

附録 A 螺線渦による吹き下しの表示式

守屋¹⁵⁾によると, 強さ $d\Gamma$ の螺線渦の, 点 $P(x', y', z')$ における渦素片による, y 軸上の点 Q における誘導速度は (図 11 参照),

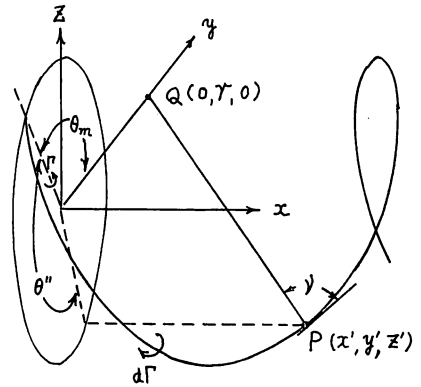


図 11

$$d^2v_x = \frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{d\theta''}{R^3} \{r'^2 - rr' \cos(\theta'' + \theta_m)\}$$

$$d^2v_z = \frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{hd\theta''}{R^3} \{-r' \sin(\theta'' + \theta_m) - r' \cos(\theta'' + \theta_m) + r\}$$

(A-1)

である。ただし

$$R = \sqrt{h^2 \theta'^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta'' + \theta_m)}$$

とする。この式は, $\theta = \theta_m$ のところに m 番目の翼があるとしたときの, $\theta = 0$, つまり y 軸上における誘導速度である。 $\theta_m = 2m\pi/l$ と書き, また θ'' は螺線に沿って変る変数であるから, $\theta'' = (T' - \tau)/2$ と置いて, 螺旋座標で表わすと

$$d^2v_x = \frac{d\Gamma}{8\pi} \frac{dT'}{R^3} \times [r'^2 - rr' \cos\{(\tau - T')/2 - 2m\pi/l\}]$$

$$d^2v_z = \frac{d\Gamma}{8\pi} \frac{hdT'}{R^3} \times [-r'(\tau - T')/2 \cdot \sin\{(\tau - T')/2 - 2m\pi/l\} - r \cos\{(\tau - T')/2 - 2m\pi/l\} + r]$$

(A-2)

ただし

$$R = h \sqrt{\frac{(\tau - T')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2}{-2\mu\mu' \cos\{(\tau - T')/2 - 2m\pi/l\}}}$$

となる。この式は、 $\theta=0$ だけでなく、 $\theta=0$ を通る螺旋面上の点における誘導速度を表わしている。(A-1) の d^2v_z は、(A-2) では接線方向流速になるので、 d^2v_t の記号に改めてある。以下では、簡単のため

$$t = (\tau - T')/2, \quad t_m = t - 2m\pi/l$$

と書くことにする。

螺旋渦の螺旋方向の循環密度を γ とすると、 s'' 点における循環は、 $\int_{s_1}^{s''} \gamma ds'$ である。これが、 $\theta = \theta''$ における $d\Gamma$ に対応するから、(A-2) の $d\Gamma$ をこれで置き換え、 T' について、前縁より $T' \rightarrow \infty$ まで積分する。更に、 m について、0 より $l-1$ まで加えると、 l 本の対称螺旋渦による誘導速度 dv_f の、ある半径上におけるものが得られる。即ち、

$$dv_{fx} = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{r'^2 - rr' \cos t_m}{R^3} dT' \int_{s_1}^{s''} \gamma ds'$$

$$dv_{ft} =$$

$$\frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{-r't \sin t_m - r' \cos t_m + r}{R^3} dT' \int_{s_1}^{s''} \gamma ds'$$

(A-3)

である。これより、吹き下し $-dw_f$ の表示式を求めると、

$$-dw_f = \frac{-dv_{ft} + \mu dv_{fx}}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1}{16\pi\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\times \sum_{m=0}^{l-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{R^{*3}} \{ \mu' t \sin t_m + \mu'(1 - \mu^2) \cos t_m - \mu(1 - \mu'^2) \} dT' \int_{s_1}^{T'} \gamma \sqrt{1 + \mu'^2} d\tau' \quad (A-4)$$

である。ただし、 γ の s' による積分は、螺旋座標の変数 τ' に変えてある。

附録 B 軸心渦による吹き下しの表示式

x 軸上に直線渦があるときの、渦素片による誘導速度は、Biot-Savart の法則より

$$d^2v_y = \frac{d\Gamma z}{4\pi R^3} dx', \quad d^2v_z = -\frac{d\Gamma y}{4\pi R^3} dx'$$

ただし、 $R = \sqrt{(x-x')^2 + r^2}$

である。これより接線流速を求めると

$$d^2v_t = -d^2v_y \sin \theta + d^2v_z \cos \theta = -\frac{d\Gamma r}{4\pi R^3} dx' \quad (B-1)$$

である。

渦が、 x_1 より ∞ まであり、その循環が $\int_{x_1}^{x'} \gamma dx''$ のときは

$$dv_t = -\frac{1}{4\pi} \int_{x_1}^{\infty} \frac{r}{\{(x-x')^2 + r^2\}^{3/2}} dx' \int_{x_1}^{x'} \gamma dx'' \quad (B-2)$$

となる。これを l 倍し、 $\sin \varepsilon$ を乗じたものが、軸心渦による吹き下しである。