翼型特性に対する風洞境界の干渉に関する研究

(その1　自由境界の場合)

花岡達郎・松下兼次・荒木基暁
木原治彦・福原　稔

(受理　昭和56年5月26日)

A Study about the Effects of Windtunnel Walls on Airfoil Characteristics

(Part I　Free Stream Boundary)

Tatsuro HANAOKA, Kenji MATSUSHITA, Motoaki ARAKI,
Haruhiko KIHARA, Minoru FUKUHARA

The purpose of this investigation is to reveal the interference of a windtunnel on an airfoil and to find the methods to correct the influence of the wall.

Model experiments and theoretical analyses are carried out for the pressure distribution of airfoils. The experimental results are compared with the theoretical calculations and the agreement is satisfactory.

内　　容

ま　え　が　き

現在までに得られている翼型特性に関する資料は膨大なもので，それらの資料を利用すれば，翼型特性に関する限り，おおよそのことは見当がつく．しかし，新たに問題が生じて，流体機械の性能調査を行なおうとするときなど，問題点探究の途上，それに適合する翼型特性試験の必要にせまられることは，現在でも，しばしばある．

翼型特性試験は，可能な範囲で，大きな模型を用いて，風洞または試験水槽で行なわれるのが一般である．高精度の資料を得ようとすると，必然こうなるのであるが，その場合，最も苦慮するのが，風洞境界干渉の数量的推定である．

模型試験用の風洞の測定部には，開放型と密閉型（閉路型ともいう）との二種類がある．この二つを組合せた中間のものもあるが，それは特殊な使い方である．開放型と密閉型の違いは，図1に示すように，前者の測定部では，空気は吹出口から吸込口に入るまでの区間，自由噴流となる．一方，後者の測定部は固体壁で囲まれ，外部との流通は完全に遮断されている．

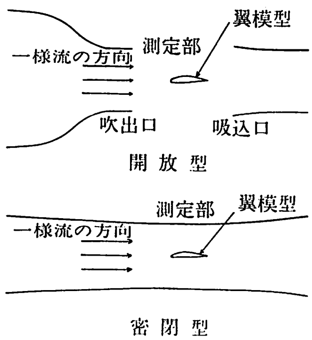

図　1

この二つは，一様流の境界の状態が異なるので，前者を自由境界，後者を固体壁境界と呼んで，区別している．そして，翼型特性に及ぼす影響のしかたも全く異なる．開放型は，模型試験を行うのに，便利な点が多く，第一次，第二次大戦の間では，飛行機模型の試験に，ほとんどこの形式が採用さた．しかし，第二次大戦後，遷音速風洞が多くなり，さらに試験技術も長足に進歩したため，密閉型が普及している．また，cavitation tunnel が密閉型回流水槽であることはよく知られている．けれども，現在開放型の風洞を使うことはしばしばあり，極超音速風洞は別格としても，吸込口の無い，噴流型（戦前，これを「吹きっぱなし」と呼んだ）の簡易風洞は手軽に使えるので，それを使った試験はよく見かける．

2次元流の風洞境界干渉の理論的研究は，1930年代に集中して行なわれ，特に佐々木[1)]，友近[2)3)]らによって厳密解が得られるなど，当時としては，ほぼ完成の域に達したと云える．しかし，それらの研究は，揚力などの流体合力に焦点が置かれていて，佐々木，友近の厳密解にしても，平板の揚力が計算されただけで，任意翼型の圧力の実用計算までには程遠いものがあった．当時の技術的要求がその範囲のものであったろうし，また計算技術の水準からみても，それが限界であった，と推定される．

しかし，現在では，流体機械の最適設計の条件の中に，振動，騒音の防止といった環境保護の問題が重要項目として加えられるので，翼型特性として，流体合力だけでなく，翼表面の圧力，流速のような局所的なものまで，要求されることが多くなって来ている．このような状況を念頭に置いて，風洞境界干渉の問題をみると，理論，実験何れの面でも，実用に役立つようにまとめられた研究は無いと云っても差支えないだろう．計算なら容易にできそうに思われるが，現代の計算技術でも，佐々木，友近らの厳密解を一般の翼型に拡張する計算は，実用上繁雑過ぎる．また現代流行の有限要素法でも，計算はできるが，実際問題に適用するとなると，解の収束性の検証，結果の整理法など，ここでも繁雑な問題に遭遇する．結局，実験研究者は，翼模型をなるべく小さくし，境界干渉の小さい状態で実験を行って，その影響を無視する，というのが実状である．この問題に対し，一つの回答を提供しようというのが，本研究の目指す処である．

本報告書は，境界干渉の特に著しい自由境界に関するもので，模型試験を記述した第1章と，理論解析を主とした第2章，さらに両者を比較的検討した第3章より成る．模型試験には，角型吹出口の噴流式小型風洞を使用した．供試翼型模型は，翼厚比，矢高比がそれぞれ3通りの9種類である．風洞境界の幅を変えるため，吹出口の幅を3通りに変えたが，そこで特に問題となるのは境界幅および一様流の方向の定義のしかたである．本実験では，この点を特に重視して，精密な予備試験を行っている．上述のように，本研究の主題が，翼周囲の流場に及ぼす風洞境界の影響に関する問題であるから，翼型性能試験の中心を翼表面圧力分布の計測におき，揚力は，それを積分して求めるという方法をとった．理論解析には，線型薄翼理論に準拠するものを採用した．翼の流場の問題に，線型理論は，使いようによって，優れた能力を発揮することは知えれているが，それにしてもここで得られた成果には目を見張るものがある．特に，積分方程式の解析解が得られたため，表示式全般が簡潔な形となったのは幸であった．

記　　号

x, y	直交直線座標（風洞中心線上，下流方向に x 軸をとる）
t	風洞境界幅
$p_{\pm}$	翼表面の圧力（脚符の＋は上面，－は下面のものであることを示す）
p_0	大気圧
ρ	空気密度
U	風洞内の一様流の速度
Φ	速度ポテンシャル
c	半翼弦長
$h=2c/t$	翼弦長と境界幅の比
$\Delta p=p_{-}-p_{+}$	圧力差

$\gamma=\dfrac{\Delta p}{\rho U}$	循環密度
σ	翼厚を表わす吹出し分布の強さ
$u_{\pm}$	翼上下面の x 方向攪乱流速（+は上面，−は下面のものであることを示す）
$\hat{y}$	平均矢高線の縦座標
$\bar{y}$	翼厚分布の1/2
α	迎角
α_0	零揚力角
L	揚力
C_l	揚力係数 $L/(\rho U^2 c)$
C_p	圧力係数 $(p_{\pm}-p_0)/(\frac{1}{2}\rho U^2)$
$\Delta C_p=\dfrac{2\gamma}{U}$	$\Delta p/(\frac{1}{2}\rho U^2)$
K_0	揚力傾斜の干渉係数
C_0	零揚力角の干渉係数
T_0	翼厚の干渉係数

1　翼型模型の風洞試験

1.1　試験装置および試験方法

翼型模型試験に使用した風洞は，角型吹出口（500 mm×500 mm）の噴流式（風速範囲，10〜30 m/s）である．この風洞測定部の流れを2次元的にするため，吹出口より下流に向って，両側に平板を平行に固定し，翼型模型は，その間の上下境界の中点を含む水平面上に設置した（図2-1，2-2参照）．吹出口から325mm の位置で，側壁平板を円形に切り抜き，そこで迎角を変える．翼型模型の迎角設定は，図3に示すように，翼型模型の上に迎角設定用ゲージを置き，その上にすえた傾斜測定水準器により行った．

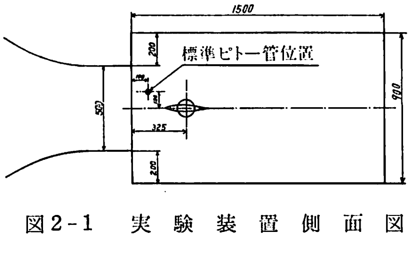

図2-1　実験装置側面図

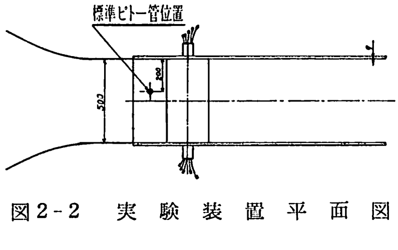

図2-2　実験装置平面図

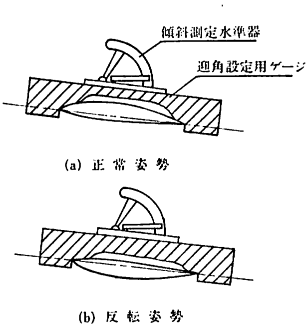

図3　迎角の測定法

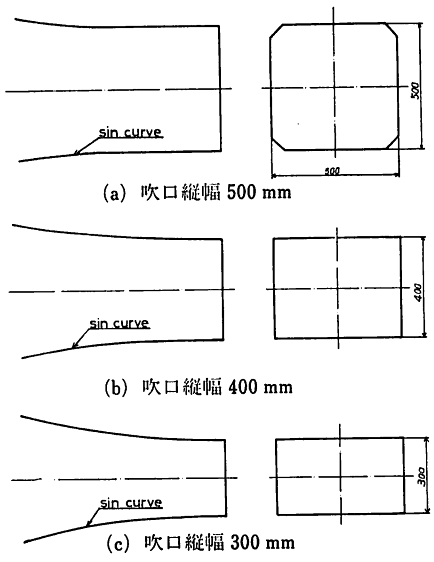

図4　風洞吹口内の形状断面図

翼型特性に及ぼす風洞境界幅の影響を調べる目的で，風洞吹出口内部に案内板を設けて，その幅を500mm，400mm，300mm に変えた試験を行ったが，その際の風洞吹出口内部の形状は図4に示す通りである．

実験に用いた翼型模型は，マホガニーの積層材製で，その平面形は，図5に示す通り，翼弦長250mm，翼幅500mm に統一されている．翼型は NACA 16，a＝0.8のシリーズである[4)5)6)]．その矢高曲線および翼厚分布の要目を表2，表3に示す．模型の断面形は，翼厚比（thickness ratio）が3％，7％，11％の3種類，

矢高比 (camber ratio) が，それぞれ1％，3％，5％の3通りの計9種類である（表1参照）．その断面形状を図6に示す．これら9個の翼模型には，それぞれ径 0.5mm の圧力測定孔が，翼幅中央，翼弦に沿って，上下面に各8個と前縁に1個，合わせて17個，設けてある．その位置は，図5に黒丸印で記入してある．この孔は，銅パイプにより，翼の内部を通り，両翼端から外部に誘導されている．

実験状態は，噴流の速度が 30m/s 附近で，風速の安定したところを選び，各模型で，迎角を−6°～15°の範囲に変化させた．翼表面圧力の計測には，多管マノメータを使用した．

1.2 予備試験

前にも述べたように，本研究の目的は，自由境界をもつ一様流中の翼型周囲の流れを，実験と理論によって調べることである．したがって，風洞境界幅を幾通りかに変えた実験を行うことになるが，測定部の流れ

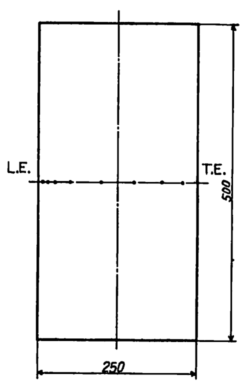

図5　翼型模型平面図
・は測定孔（上下面同位置）

表 1　MODELS OF WING SECTION

Model No.	Thickness ratio	Camber ratio
No. 1	0.03	0.01
No. 2	0.03	0.03
No. 3	0.03	0.05
No. 4	0.07	0.01
No. 5	0.07	0.03
No. 6	0.07	0.05
No. 7	0.11	0.01
No. 8	0.11	0.03
No. 9	0.11	0.05

FOR NACA 16, a=0.8 ORIGINALS

表 2　CAMBER-LINE ORDINATES FOR NACA 16-AIRFOILS WITH $C_L=1.0$

Station	Ordinate	Slope
0	0	
.5	.287	.48535
.75	.404	.44925
1.25	.616	.40359
2.5	1.077	.34104
5.0	1.841	.27718
7.5	2.483	.23868
10	3.043	.21050
15	3.985	.16892
20	4.748	.13734
25	5.367	.11101
30	5.863	.08775
35	6.248	.06634
40	6.528	.04601
45	6.709	.02613
50	6.790	.00620
55	6.770	−.01433
60	6.644	−.03611
65	6.405	−.06010
70	6.037	−.08790
75	5.514	−.12311
80	4.771	−.18412
85	3.683	−.23921
90	2.435	−.25583
95	1.163	−.24904
100	0	−.20305

表 3　THICKNESS ORDINATES FOR AIRFOILS WITH THICKNESS 9 PERCENT OF CHORD

Station	Ordinate
0	0
1.25	.969
2.5	1.354
5	1.882
7.5	2.274
10	2.593
15	3.101
20	3.498
30	4.063
40	4.391
50	4.500
60	4.376
70	3.952
80	3.149
90	1.888
95	1.061
100	.090

L.E. radius of NACA 16-series airfoils $=0.396\times(t/0.09)^2$

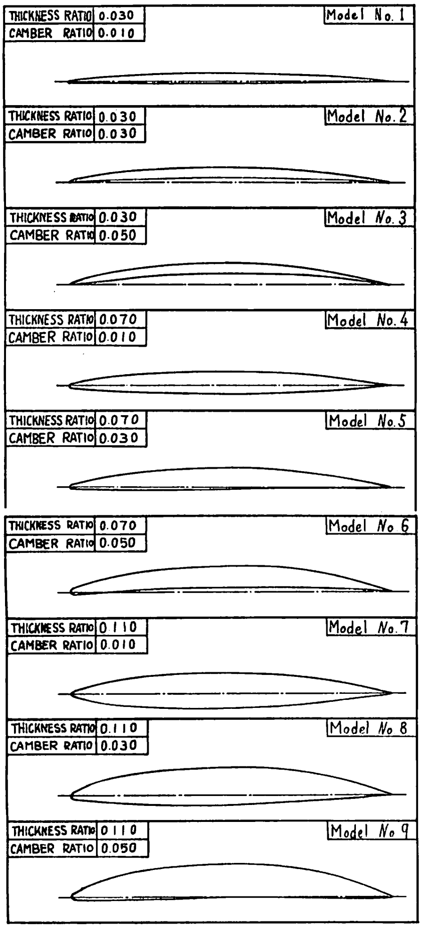

図6　翼　型　模　型　断　面　図

の一様性，流れの方向，自由境界附近の状況などを事前によく調査し，実験，理論相互の適合性を調べておく必要がある．予備試験はそのために行ったものである．

i　自由境界附近の流れ

自由境界附近の流速分布を，総圧管15本，静圧管1本よりなる櫛型ピトー管で計測した．このピトー管の外観は，図7に示す通りで，各管の外径は3mm，間隔は10mm である．測定結果の一部が図8-1，8-2に示してあるが，下側境界でも，また境界幅を変えたときも，その分布形はほぼ同じである．速度が0から一様流速 U になるまでの層の厚さ δ(mm) を示したのが図9である．また，図10には，δ の中間で，流速が $U/2$ になる点の風洞中心からの距離が示してある．

これの，上側より下側までの値を，差し当たり，t で表わすことにする．図9を見ると，翼弦中点に対応

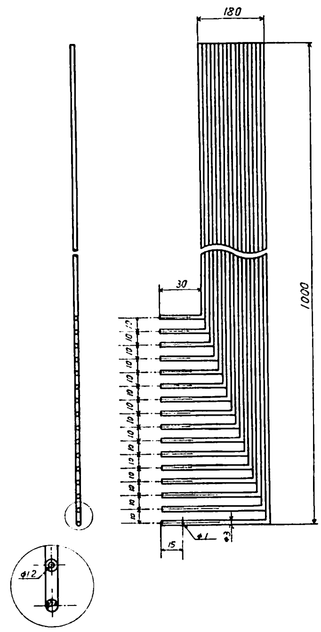

図7　く　し　形　ピ　ト　ー　管

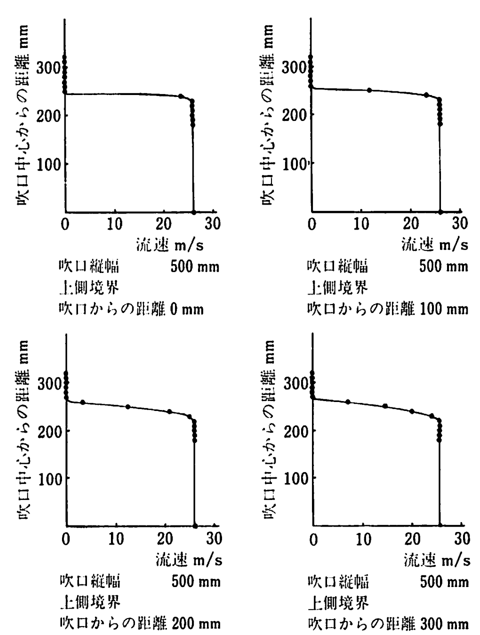

図8－1　自　由　境　界　附　近　の　流　速

する処では，δ はかなり大きく，65mm である．しかし，図8-1，8-2の速度の分布形は平板の層流境界層内のそれに似ているので，層流境界層の厚さに対する，

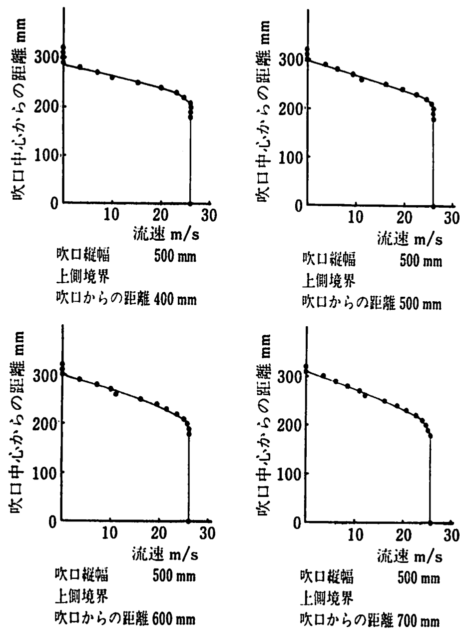

図8-2　自由境界附近の流速

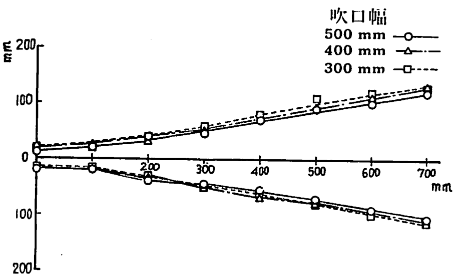

図9　自由境界の厚さ

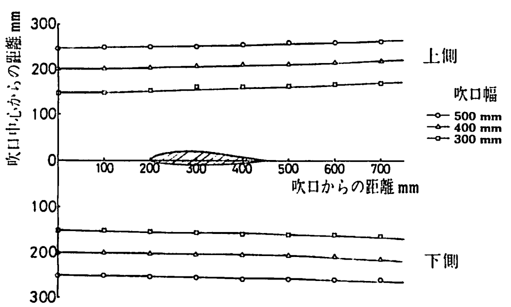

図10　風洞の自由境界位置

排除厚，運動量厚の比率が約1/2.9，1/7.5であることを利用し，上記 δ に対応する排除厚 δ^*，運動量厚 θ を考えると，翼弦中点附近では $\delta^*/t \ll 1$，$\theta/t \ll 1$，つまり自由境界の厚さは，t に対し，無視しても差支えない量であることがわかる．また図10に示す自由境界の傾斜は0.02である．したがって，この流場は，$\delta/t=0$，$dt/dx=0$ とするポテンシャル流の線型理論に対応させることができる．さらに，風洞中心線に沿って，下流方向に静圧を測定したが，大気圧との差は認められなかった．したがって，流速も一様とみなすことができる．実験，理論を比較する際は，翼弦中点位置（吹出口より 325mm）における t の値をもって，理論における風洞境界幅とした．

ii　一様流の方向

翼模型の迎角は，一様流の方向を基準にして測るものであるから，翼型試験の前に，風洞内の一様流の方向を求めておかねばならない．翼型特性としての性格上，その測定精度は，少くとも，0.5度以下におさえる必要がある．風向の局所的計測法は各種考えられるが，ここでは風洞内に置かれた翼に働く揚力から求める方法を採用した．これは翼型特性試験に適した精密測定法である．この実験には，対称翼模型があると好都合であるが，手元にないので，一つの非対称翼模型を用いた．それの正常姿勢（図3で右回転が迎角正の方向）と反転姿勢（図3で左回転が迎角正の方向）との二通りの場合で，圧力分布測定試験を行い，それを積分して，揚力を求めた．その結果は，図11-1, 11-2, 11-3に示す通りで，揚力係数はほぼ同一直線上にある．この場合，翼弦が水平面と一致するときを迎角0とし

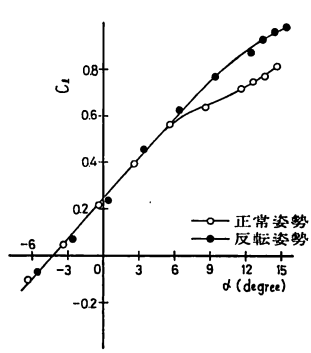

図11-1　Model No. 5 の揚力係数
（吹口幅500mm）

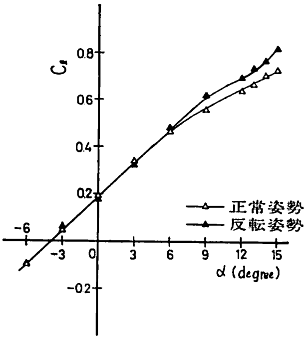

図11-2　Model No. 5 の揚力係数
(吹口幅 400mm)

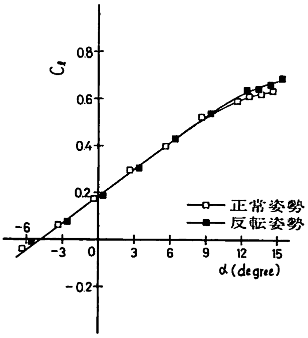

図11-3　Model No. 5 の揚力係数
(吹口幅 300mm)

たので，吹出口幅 500mm，400mm，300mm 何れの場合も，一様流は水平面と平行に流れるとみなすことができる．よって，以下の実験では，迎角の原点を，翼弦が水平面と一致した処にとる．迎角が大きいところで，揚力係数が，正常と反転とで異なっているが，ここは失速領域であるから，問題とするには当らない．

1.3 翼型模型の試験結果

各翼模型のそれぞれの状態における翼表面の圧力計測値 $p_{\pm}$ より，圧力係数 C_p を算出し，それの分布形を図に描いた．結果の一例を図12-1，12-2に示す．計測結果の全体は文献 7）に掲載されている．それらより求めた揚力係数 C_l を，迎角に対して置点したものが，図13-1～13-8と図11-1～11-3に示してある．これらの C_l は，C_p の図より，上下面の圧力差を求めて図に描き，それをプラニメータで積分するという方法で算出したものである．したがって，力の直接測定法に比べると，誤差は混入しやすい．しかし，それに

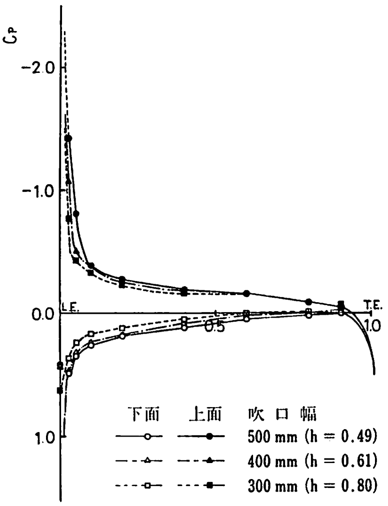

図12-1　Model No. 1 の圧力分布
(α=6°)

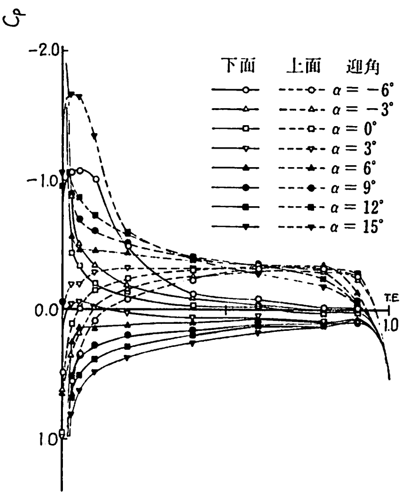

図12-2　Model No. 5 の圧力分布
(吹口幅 400mm)

しては，系統試験として見たときの全般は，よい精度が保たれているように見受けられる．実験点に多少のバラツキがあるのは，試験法と解析法の弱点に由来するもので，止むを得ないだろう．全般を見ると，迎角の小さい処では，C_l が α に比例すること，境界幅が狭くなるに従って，揚力が減少すること，矢高比が大きくなる程，零揚力角が小さくなることなどの従来知

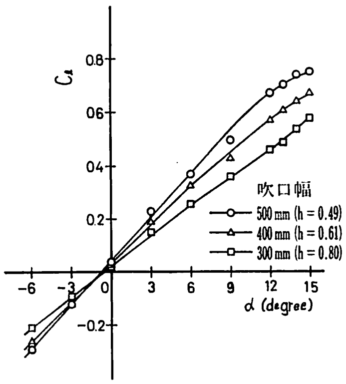

図13-1 Model No. 1 の揚力係数

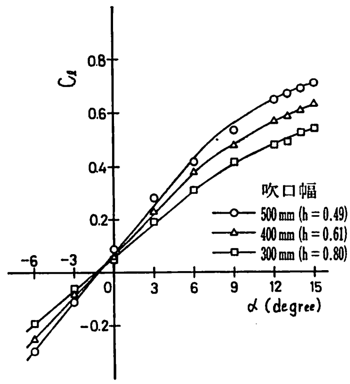

図13-4 Model No. 4 の揚力係数

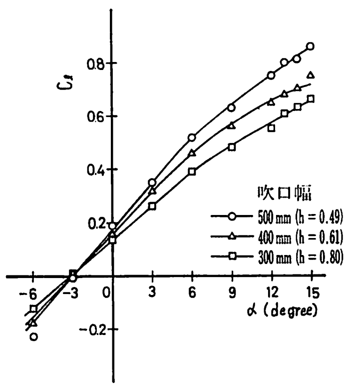

図13-2 Model No. 2 の揚力係数

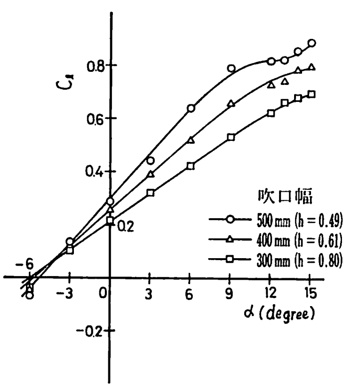

図13-5 Model No. 6 の揚力係数

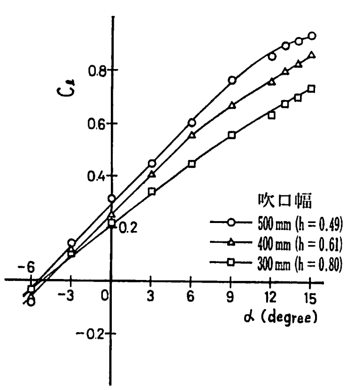

図13-3 Model No. 3 の揚力係数

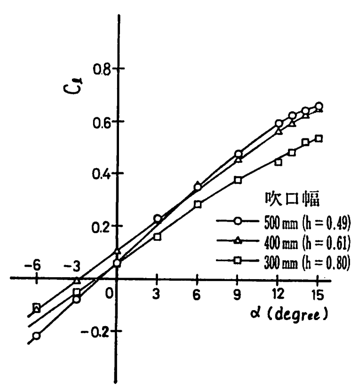

図13-6 Model No. 7 の揚力係数

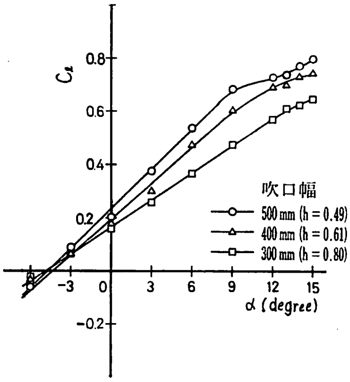

図13-7　Model No. 8 の揚力係数

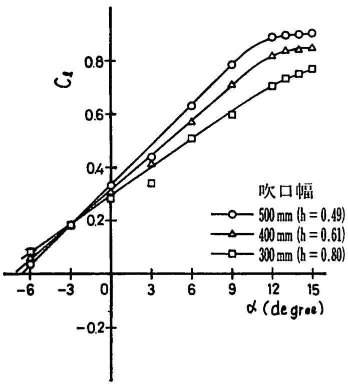

図13-8　Model No. 9 の揚力係数

られた性質は明瞭に現われている．しかし，これらの図だけから，自由境界が翼型特性に及ぼす影響の系統的性質を見分けることはむつかしく，理論解析の助けを必要とする処である．

2　理　論　解　析

ここに述べる理論は，線型理論であるが，単純薄翼理論ではなく，特異点法により，翼厚が考慮されている．

2.1　風洞境界の条件

風洞の測定部が自由境界の場合，境界上では，圧力は大気圧に等しく，一定である．U を測定部における一様流の速度とし，翼の無限前方では，この流れだけが存在するものと仮定する．u，v を翼による攪乱流速の x，y 成分，p_0 を大気圧とし，Bernoulli の定理を翼の無限前方と任意点に適用すると

$$p_0+\frac{1}{2}\rho U^2=p+\frac{1}{2}\rho\{(U+u)^2+v^2\} \qquad (2.1.1)$$

である．任意点を自由境界上にとり，u，v について2次以上の項を省略すると，$Uu=0$ となる．実際の流れでは，翼の近くの自由境界は，翼による攪乱流の影響を受けて変形するが，線型理論の枠内では，それを無視しても，結果に影響しない．したがって，自由境界の幅を t とすると，線型理論における自由境界の条件は

$$u=0 \text{ または } \Phi=\text{const.},\quad y=t/2 \qquad (2.1.2)$$

である．ただし，x 軸は，境界の中心線上，下流方向にとるものとする（図14参照）．

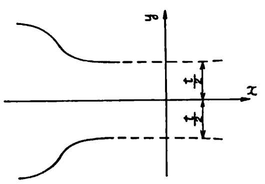

図　14

2.2　速度ポテンシャル

理論の複雑化を避けるため，翼が風路の中心，つまり x 軸上にある場合に限定して，理論を展開する．

x 軸方向に一様に，速度 U で流れる無限流体中の，x 軸上に一つの無限幅の翼が固定されているときの攪乱流は，2次元的で，その速度ポテンシャルは

$$\Phi_1(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\tan^{-1}\frac{x-x'}{y}dx' +\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\ln\{(x-x')^2+y^2\}dx' \qquad (2.2.1)$$

で与えられる．ただし，c は半翼弦長，γ は翼の上下面の圧力差を表わす渦層の循環密度，σ は翼厚を表わす吹出し分布の強さとする．

自由境界の間隔が t の風路の中心線上に翼があるときの流場は，(2.2.1) の第1項の渦分布については，同じ強さの渦が，間隔 t で y 軸方向に並ぶ鏡像により，また第2項の吹出し分布では，y 軸方向，渦と同じ位置に並ぶ正負交互の鏡像によって表わすことができる．

すなわち，その速度ポテンシャルは

$$\Phi(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tan^{-1}\frac{x-x'}{y-nt}dx'+\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\ln\{(x-x')^2+(y-nt)^2\}dx' \tag{2.2.2}$$

で与えられる.

この式から $\partial\Phi/\partial x$ を求めると

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{y-nt}{(x-x')^2+(y-nt)^2}dx'+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-x')}{(x-x')^2+(y-nt)^2}dx' \tag{2.2.3}$$

である. ここで, $y=t/2$ と置くと

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{y=t/2}=-\frac{t}{4\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2n-1}{(x-x')^2+t^2(2n-1)^2/4}dx'$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')(x-x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-x')^2+t^2(2n-1)^2/4}dx' \tag{2.2.4}$$

である. この式の中の級数

$$\left.\begin{aligned}f_1&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2n-1}{(x-x')^2+t^2(2n-1)^2/4}\\ f_2&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-x')^2+t^2(2n-1)^2/4}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}$$

では, 総和が, $n=-\infty$ より $n=\infty$ までであるから, n の代りに $n+1$ と置いても, また n の代りに $-n$ と置いても, その値は変りないはずである. したがって

$$\left.\begin{aligned}f_1&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2n+1}{(x-x')^2+t^2(2n+1)^2/4}\\ f_1&=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2n+1}{(x-x)^2+t^2(2n+1)^2/4}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}f_2&=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-x')^2+t^2(2n+1)^2/4}\\ f_2&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-x')^2+t^2(2n+1)^2/4}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

である. (2.2.6), (2.2.7) の中の二つの式は全く同形で, 符号だけが逆であるから, $f_1=0$, $f_2=0$ である. よって

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{y=t/2}=0 \tag{2.2.8}$$

となる. $y=-t/2$ の場合は, 総和の項が (2.2.6), (2.2.7) の第2式と同形になるので, (2.2.8) と同様の結果となる. これで (2.2.2) が風洞境界の条件を満たすことはは明らかである.

2.3 無限遠の流れの条件

2.1 節でも述べたが, 翼の無限前方では, 流れは速度 U の, x 軸方向の一様流であるとする. ところで, (2.2.2) の速度ポテンシャルで与えられる流場は, 無限遠方で流速が0にならないので, このままでは無限前方の条件は満たされない. それで, 上記条件を満たすように, 形を改めねばならない.

(2.2.3) で, 形式的に $y=0$ と置くと, 第1項は明らかに0になる. 第2項に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{\pi}{x}\operatorname{cosech}\pi x \tag{2.3.1}$$

の公式を使うと, 結局

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{y=0}=\frac{1}{t}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\operatorname{cosech}\frac{\pi(x-x')}{t}dx' \tag{2.3.2}$$

と書かれる. $|x-x'|\to\infty$ とすると, この式は0になるので, $\partial\Phi/\partial x|_{y=0}$ は無限遠方では0になる. (2.2.2) による流れは, 無限遠方では一様と考えてよいから, $y=0$ で $\partial\Phi/\partial x=0$ ならば, その他の y の位置でも $\partial\Phi/\partial x$ は0のはずである. つまり, (2.2.2) では, $\lim_{|x-x'|\to\infty}\partial\Phi/\partial x=0$ である.

次に, (2.2.2) を y で微分して, v を求めると

$$v(x,\ y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{(x-x')^2+(y-nt)^2}dx'+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(y-nt)}{(x-x')^2+(y-nt)^2}dx' \tag{2.3.3}$$

である．この式で，形式的に $y=0$ と置くと，第２項は０である．第１項に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}=\frac{\pi}{x}\coth\pi x \tag{2.3.4}$$

を適用すると

$$v(x,\ 0)=-\frac{1}{2t}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\coth\frac{\pi(x-x')}{t}dx' \tag{2.3.5}$$

と書かれる．x が大きくなると $\coth x$ は１に近付くので，翼の全循環 Γ が

$$\Gamma=\int_{-c}^{c}\gamma(x')dx' \tag{2.3.6}$$

であることを使うと，(2.3.5) で，$x-x'\to\pm\infty$ としたものは

$$\lim_{x-x'\to\pm\infty}v(x,\ 0)=v_{\pm\infty}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{\Gamma}{2t}\operatorname{sgn}x\cdot\coth\frac{|x|}{t}=\mp\frac{\Gamma}{2t} \tag{2.3.7}$$

となる．すなわち，(2.2.2) の流場の v は無限前方および後方で有限で，その絶対値は等しく，符号は，前後で逆になる．したがって，無限前方の条件を満たすようにするには，一様流の方向を

$$\delta=\tan^{-1}\frac{\Gamma}{2tU} \tag{2.3.8}$$

の角度だけ，変える必要がある。それには，速度ポテンシャル (2.2.2) に $-\Gamma y/(2t)$ を加えたものを採用すればよい．すなわち，自由境界の中央に翼が置かれたときの流場の速度ポテンシャルは

$$\Phi(x,\ y)=-\frac{y}{2t}\int_{-c}^{c}\gamma(x')dx'+\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tan^{-1}\frac{x-x'}{y-nt}dx'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\sigma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\ln\{(x-x')^2+(y-nt)^2\}dx' \tag{2.3.9}$$

で与えられる．第１項が加わっても，(2.2.8) が満足されることは，ことわるまでもないだろう．

2.4　翼面境界条件と積分方程式

翼表面の境界条件を考えるときは，翼の前後縁を結ぶ線を x 軸としたもので，翼表面の座標を表わす方が具合がよい（図15参照）．したがって，ここでは流れについても，この座標を使って表わすことにする．この座標系は，前節の一様流の方向を x 軸としたものに対し，迎角 α だけ右に回転したものである．

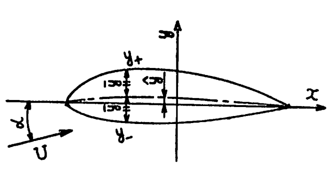

図　　15

翼上下面の y 座標を y_+，y_- で，また，翼上下面の u，v を u_+，u_-，および v_+，v_- の記号で表わすことにすると，翼面の境界条件は

$$\frac{dy_+}{dx}=\frac{U\sin\alpha+v_+}{U\cos\alpha+u_+},\quad \frac{dy_-}{dx}=\frac{U\sin\alpha+v_-}{U\cos\alpha+u_-} \tag{2.4.1}$$

である．翼の厚さ，そり，迎角が小さい場合は，それらの２次以上の項は省略しても大差ない．そのとき，(2.4.1) は

$$U\left(\frac{dy_\pm}{dx}-\alpha\right)=v_\pm(x,\ 0) \tag{2.4.2}$$

のように簡略化される．(2.4.1) の u，v は図15の座標系に関するもの，(2.4.2) の $v(x,\ 0)$ についても同様であるが，後者を，流れの方向を x 軸とする座標に関するもので置き変えても，それによる誤差は２次の微小量である．

$$\hat{y}=\frac{1}{2}(y_++y_-),\quad \bar{y}=\frac{1}{2}(y_+-y_-) \tag{2.4.3}$$

$$\hat{v}=\frac{1}{2}(v_++v_-),\quad \bar{v}=\frac{1}{2}(v_+-v_-) \tag{2.4.4}$$

と書くと，(2.4.2) は

$$U\left(\frac{d\hat{y}}{dx}-\alpha\right)=\hat{v}(x,\ 0) \tag{2.4.5}$$

$$U\frac{d\bar{y}}{dx}=\bar{v}(x,\ 0) \tag{2.4.6}$$

のように表わされる．$\hat{y}$ は平均矢高線の y 座標，$\bar{v}$ は翼厚の1/2に該当する．

(2.3.3) で, $y\to 0$ にすると, 第2項では, $n=0$ の $x'=x$ の近傍の積分だけが残り, ほかはすべて0になる. その残る部分を計算すると

$$\lim_{y\to\pm 0}\frac{1}{\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\sigma(x')\frac{y}{(x-x)^2+y^2}dx'=\lim_{y\to\pm 0}\frac{\sigma(x)}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{y}{t^2+y^2}dt=\frac{\sigma(x)}{\pi}\mathrm{sgn}\ y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta}{1+\beta^2}=\mathrm{sgn}\ y\cdot\sigma(x) \tag{2.4.7}$$

となる. (2.3.3) に (2.3.9) の第1項に対応するものを加えると, 結局

$$v(x,\ \pm 0)=-\frac{1}{2t}\int_{-c}^{c}\gamma(x')dx'-\frac{1}{2\pi}\oint_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{(x-x')^2+n^2t^2}dx'\pm\sigma(x) \tag{2.4.8}$$

となる. よって

$$\hat{v}=-\frac{1}{2t}\int_{-c}^{c}\gamma(x')dx'-\frac{1}{2\pi}\oint_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{(x-x')^2+n^2t^2}dx' \tag{2.4.9}$$

$$\bar{v}=\sigma(x) \tag{2.4.10}$$

である. (2.4.5), (2.4.6) に示すように, $\hat{v}$, $\bar{v}$ は翼の形状, 姿勢が定まれば, 直ちに計算できる. それを (2.4.10) に代入すれば, $\sigma(x)$ は直ちに定まる. しかし, $\gamma(x)$ は, (2.4.9) を積分方程式とみなして, それを解かないと, 値が得られない.

(2.3.4) の公式を用い, また

$$\xi=x/c,\quad h=2c/t,\quad g(\xi)=-\hat{v}/U \tag{2.4.11}$$

の無次元量を導入して, (2.4.9) を書き改めると

$$g(\xi)=\frac{h}{4U}\int_{-1}^{1}\gamma(\xi')d\xi' +\frac{h}{4U}\oint_{-1}^{1}\gamma(\xi')\coth\frac{\pi h(\xi-\xi')}{2}d\xi' \tag{2.4.12}$$

となる. これが, $\gamma(\xi)$ に関する積分方程式である.

2.5 積分方程式の解析解

積分方程式 (2.4.12) は, 文献8) の (3.9) 式の積分方程式と比べると, 第1項が余分に加わったことのほかは, 全く同形である. そこで, 文献8) と同様に, 変数を

$$\left.\begin{aligned} e^{\pi h\xi'}&=\sinh\pi h(\Xi'+k),\quad k=\coth\pi h>1\\ d\xi'&=\frac{1}{\pi h}\frac{d\Xi'}{\Xi'+k}\end{aligned}\right\} \tag{2.5.1}$$

によって, ξ' より Ξ' に変える. その結果, 積分方程式 (2.4.12) は

$$g(\Xi)=\frac{1}{2\pi U}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(\Xi')}{\Xi'+k}d\Xi' +\frac{1}{2\pi U}\oint_{-1}^{1}\frac{\gamma(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \tag{2.5.2}$$

のように書き改められる. ただし, この式では, ξ', ξ の関数 $\gamma(\xi')$, $g(\xi)$ を, Ξ', Ξ の関数として表わすのに, 簡単のため

$$\gamma\{\xi'(\Xi)\}\equiv\gamma(\Xi'),\quad g\{\xi(\Xi)\}\equiv g(\Xi)$$

と書いている.

(2.5.2) と文献8) の (4.7) 式とを比べると, 第1項の常数項が, 前者では, 後者の2倍になっているが, そのほかは全く同形である. したがって, 積分方程式 (2.5.2) を解く際, 文献8) の運算を, ほとんどそのまま流用することができる. 途中の運算は似たことになるが, 結果がかなり違った形になるので, 省略しないで記載する.

(2.5.2) の第1項の常数を A の記号で表わすことにし,

$$A=\frac{1}{2\pi U}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(\Xi')}{\Xi'+k}d\Xi'=\frac{h}{2U}\int_{-1}^{1}\gamma(\xi')d\xi' \tag{2.5.3}$$

と置くと, (2.5.2) は

$$g(\Xi)-A=\frac{1}{2\pi U}\oint_{-1}^{1}\frac{\gamma(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \tag{2.5.4}$$

と書かれる. 左辺が既知のときの, この積分方程式の解は知られていて, Kutta の流出条件を満たすものは

$$\frac{\gamma(\Xi)}{U}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{g(\Xi')-A}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \tag{2.5.5}$$

である[9]. この式の積分を行うため

$$\frac{1}{\pi}\oint_{0}^{\pi}\frac{\cos n\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi' =-\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi},\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{2.5.6}$$

の公式を利用する．

$$\Xi'=\cos\varphi',\quad \Xi=\cos\varphi \tag{2.5.7}$$

と置くと

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{1}{\Xi-\Xi'}d\Xi'=\frac{1}{\pi}\oint_{0}^{\pi}\frac{1+\cos\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'=-1 \tag{2.5.8}$$

であるから，(2.5.5) は

$$\frac{\gamma(\Xi)}{U}=-2A\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{g(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \tag{2.5.9}$$

と書かれる．

(2.5.9) の右辺を (2.5.3) の γ/U に代入すると

$$A=-\frac{A}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\frac{1}{\Xi+k}d\Xi-\frac{1}{\pi^2}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\frac{1}{\Xi+k}\frac{1}{\Xi-\Xi'}d\Xi\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1+\Xi'}}g(\Xi')d\Xi' \tag{2.5.10}$$

となる．(2.5.7) の変数変換を行い

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{\cos\varphi+k}d\varphi=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}},\quad k>1 \tag{2.5.11}$$

の公式を使い，$k=\coth\pi h$ を代入すると

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\frac{1}{\Xi+k}d\Xi=-1+e^{\pi h} \tag{2.5.12}$$

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\frac{1}{\Xi+k}\frac{1}{\Xi-\Xi'}d\Xi=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\Xi'+k}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\left(\frac{1}{\Xi-\Xi'}-\frac{1}{\Xi+k}\right)d\Xi=-\frac{e^{\pi h}}{\Xi'+k} \tag{2.5.13}$$

が得られる．(2.5.12)，(2.5.13) を (2.5.10) に適用して，A を求めると

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{g(\Xi')}{\Xi'+k}d\Xi' \tag{2.5.14}$$

となる．これを (2.5.9) の A に代入すると

$$\frac{\gamma(\Xi)}{U}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\left\{\frac{1}{\Xi'+k}+\frac{1}{\Xi-\Xi'}\right\}g(\Xi')d\Xi' \tag{2.5.15}$$

が得られる．右辺は，$g(\Xi)$ を含む既知関数だけで表わされている．これが，積分方程式 (2.4.12) の解析解である．

$h\to 0$，つまり無限流体の場合の循環密度 $\gamma^{(0)}$ を (2.5.15) より求めてみる．(2.5.1) により，$h\to 0$ に対し，$\Xi\to\xi'$ であり，また $k\to\infty$ であるから，

$$\frac{\gamma^{(0)}(\xi)}{U}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{g(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \tag{2.5.16}$$

となる．これは従来得られている結果である．

2.6 揚力傾斜の干渉係数

Kutta-Joukowski の定理を近似的に使うと，翼上下面の圧力差 Δp と循環密度 γ とを

$$\Delta p=\rho U\gamma \tag{2.6.1}$$

のように関係づけることができる．圧力差を (1/2) $\times\rho U^2$ で割って，係数を作ると

$$\frac{\Delta p}{(1/2)\rho U^2}=\frac{2\gamma}{U} \tag{2.6.2}$$

である．したがって，(2.5.15) の右辺を 2 倍したものが，翼面上の圧力差の係数である．

揚力 L は

$$L=\int_{-c}^{c}\Delta p dx=\rho Uc\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)d\xi$$

であるから，揚力係数 C_l は

$$C_l=\frac{L}{\rho U^2 c}=\frac{1}{U}\int_{-1}^{1}\gamma d\xi \tag{2.6.3}$$

によって計算することができる．この積分変数を Ξ に変えると

$$C_l=\frac{1}{\pi h}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{U}\ \frac{1}{\Xi+k}d\Xi \tag{2.6.4}$$

である．

(2.6.4) の γ/U に (2.5.15) を代入し，(2.5.12)，(2.5.13) の結果を使って，Ξ の積分を行うと

$$C_l=\frac{2}{\pi h}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\ \frac{g(\Xi')}{\Xi'+k}d\Xi' \tag{2.6.5}$$

となる．C_l がこのように表わされることは，すでに求められている．(2.5.3) と (2.6.3) をくらべてみると，

$$A=C_l h/2 \tag{2.6,6}$$

であることがわかるが，A はまた，(2.5.14) でも与えられるからである．(2.5.1) によって，(2.6.5) の積分変数を，Ξ' より ξ' にもどすと

$$C_l=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')}-1}}\ g(\xi')d\xi' \tag{2.6.7}$$

となる．境界幅が無限大のときは，$h\to 0$ とすればよいが，形式的に，$h=0$ と置くと，被積分関数が不定となるので，極限値をとる．結局，従来の結果と同じで，

$$C_l^{(0)}=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\ g(\xi')d\xi' \tag{2.6.8}$$

となる．

(2.6.7) の C_l を，矢高線形状と迎角のそれぞれに依存するものに分けておくと好都合である．(2.4.5) により

$$g_1=\alpha,\ g_2(\xi)=-\frac{d\hat{y}}{dx},\ g(\xi)=g_1+g_2(\xi) \tag{2.6.9}$$

と書くことができる．g_1，g_2 のそれぞれに対応する揚力係数を C_{l1}，C_{l2} の記号で表わすと

$$C_{l1}=2\alpha\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')}-1}}d\xi'$$

$$=\frac{2\alpha}{\pi h}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\ \frac{1}{\Xi'+k}d\Xi'$$

$$=\frac{2\alpha}{h}\ \frac{e^{\pi h}-1}{e^{\pi h}}=\frac{4\alpha}{h}\ \frac{1}{1+\coth\dfrac{\pi h}{2}} \tag{2.6.10}$$

$$C_{l2}=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')}-1}}g_2(\xi')d\xi' \tag{2.6.11}$$

となる．(2.6.8) の $C_l^{(0)}$ についても，g を g_1 と g_2 に分け，それに対応する揚力係数を $C_{l1}^{(0)}$，$C_{l2}^{(0)}$ の記号で示すことにすると

$$C_{l1}^{(0)}=2\pi\alpha \tag{2.6.12}$$

$$C_{l2}^{(0)}=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}g_2(\xi')d\xi' \tag{2.6.13}$$

である．

(2.6.10) と (2.6.12) の比を作ると，揚力の干渉係数として

$$K_0=\frac{C_{l1}}{C_{l1}^{(0)}}=\frac{2}{\pi h}\ \frac{1}{1+\coth\dfrac{\pi h}{2}} \tag{2.6.14}$$

が得られる．これは，Pistolesi[10] の式と同じで，友近はそれが平板翼の厳密解に非常に近い値となることを図示している[3]．この K_0 を使うと，(2.6.10) は

$$C_{l1}=2\pi K_0\alpha \tag{2.6.15}$$

と書かれる．つまり，K_0 は揚力傾斜に対する，自由境界の干渉係数を意味する．

(2.6.10) により，K_0 は，また

$$K_0=\frac{1}{\pi h}\ \frac{e^{\pi h}-1}{e^{\pi h}}=\frac{1}{\pi h}(1-e^{-\pi h})$$

のように表わされる．これの $e^{-\pi h}$ に，べき級数展開式を使うと

$$K_0=1-\frac{\pi h}{2!}+\frac{\pi^2 h^2}{3!}-\frac{\pi^3 h^3}{4!}+\cdots\cdots \tag{2.6.16}$$

が得られる．一方，友近[3] によると，迎角が α の平板に対する厳密解では

$$K_0=1-\frac{\pi h}{2}\cos\alpha+\frac{\pi^2 h^2}{24}(4-11\sin^2\alpha)\cdots\cdots \tag{2.6.17}$$

である．(2.6.16) は，この式で α の2次以上の項を省略したものに一致する．(2.6.14) の精度のよさを

保証する結果である．

自由境界の場合には，翼の位置に一様な吹下しが生じ，そのため，翼に対する有効の迎角が減少する．このことは，(2.3.9) を導く際，無限前方の攪乱流を零にするため，右辺に第1項を加えたところで説明した．その結果，(2.6.16) に見られるように，揚力傾斜の干渉係数に，πh の1次の項が含まれ，境界の，翼特性に及ぼす影響が著しいことになる．このように，自由境界は，その影響が強いため，実験の作業が容易という利点があるにもかかわらず，大きい翼型模型の風洞試験では，それを採用しない．

自由境界の影響を軽減する一つの方法として，得られた翼特性に対し，前記一様吹下しに相当する迎角を補正したらどうなるか．それを調べてみる．(2.3.8) より

$$\delta=\frac{\Gamma}{2tU}=\frac{1}{2tU}\int_{-c}^{c}\gamma\,dx=\frac{h}{4}C_l \qquad (2.6.18)$$

である．この C_l に (2.6.15) を使うと

$$\delta=\frac{\pi h}{2}K_0\alpha \qquad (2.6.19)$$

である．揚力は，有効迎角 $\alpha-\delta$ に比例すると考えてよいから，その比例常数を $2\pi K_0'$ の記号で表わすと

$$C_l=2\pi K_0'(\alpha-\delta) \qquad (2.6.20)$$

と書くことができる．(2.6.15) と (2.6.20) を等置すると

$$K_0\alpha=K_0'(\alpha-\delta)$$

となるから，

$$K_0'=\frac{K_0\alpha}{\alpha-\delta}=\frac{K_0}{1-\delta/\alpha}=\frac{K_0}{1-K_0\pi h/2}$$

$$=\frac{1}{1/K_0-\pi h/2} \qquad (2.6.21)$$

である．右辺の K_0 に (2.6.14) を代入すると

$$K_0'=\frac{2}{\pi h}\tanh\frac{\pi h}{2} \qquad (2.6.22)$$

が得られる．これは，幾何学的迎角に，δ だけの補正をして，有効迎角を $\alpha-\delta$ としたときの揚力傾斜の干渉係数である．(2.6.22) の右辺は，翼列の干渉係数と同じ式であるが[8]，これは当然の帰結である．何故ならば，(2.3.9) で，右辺第1項を除き，第2項だけを考えると，それは薄翼翼列の速度ポテンシャルになるからである。(2.6.22) を級数展開すると

$$K_0'=1-\frac{\pi^2h^2}{12}+\frac{\pi^4h^4}{120}\cdots\cdots h<1 \qquad (2.6.23)$$

となる．このべき級数の係数は固体壁の場合[2]のそれより大きいが，πh の1次の項は消失している．図16は干渉係数 K_0' を固体壁の干渉係数と比較して示したものである．干渉係数の値が1よりそれていく有様を見ると，K_0' では，K_0 に比べて，格段に改善されているが，それでもなお，固体壁のもののほぼ2倍になっている．

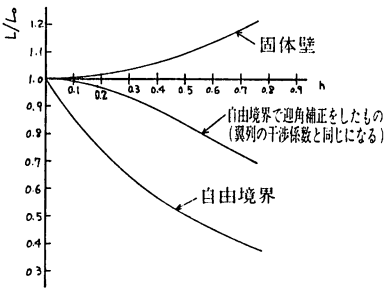

図16　揚力の干渉係数

結局，境界影響の軽減法としては，自由境界における δ の補正では，固体壁境界には及ばないことがわかる．しかし，固体壁境界としての風洞試験ができないときは，自由境界で試験を行い，得られた結果に対し，迎角を δ だけ補正する．つまり，幾何学的迎角が α のときの揚力，圧力などを，迎角が $\alpha-\delta$ の姿勢におけるものとみなす．こうすれば，h が小さいときは，実験結果を，かなり無限流体中のそれに近付けることができる．

2.7　零揚力角の干渉係数

風洞内の翼は，境界の干渉により，零揚力角が変化する．それで，風洞内の翼の零揚力角と無限流体中のそれとの比をとって，それを零揚力角の干渉係数と呼ぶことにする．

零揚力角は，揚力が零になる迎角であるから

$$C_{l1}+C_{l2}=2\pi K_0\alpha+C_{l2}=0 \qquad (2.7.1)$$

を満足する α で与えられる．それを α_0 の記号で表わすことにすると，(2.6.11) により

$$\alpha_0=-\frac{1}{\pi K_0}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')}-1}}g_2(\xi')d\xi' \quad (2.7.2)$$

のように表わされる．$h\to 0$ のときは

$$C_{l1}^{(0)}+C_{l2}^{(0)}=2\pi\alpha+C_{l2}^{(0)}=0$$

を満足する α が零揚力角 $\alpha_0^{(0)}$ であるから

$$\alpha_0^{(0)}=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}g_2(\xi')\mathrm{d}\xi' \quad (2.7.3)$$

である．(2.7.2) と (2.7.3) の比を作り，それを C_0 の記号で表わすと

$$C_0=\frac{\alpha_0}{\alpha_0^{(0)}}=\frac{1}{K_0}\frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')}-1}}g_2(\xi')d\xi'}{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}g_2(\xi')d\xi'} \quad (2.7.4)$$

である．この C_0 が零揚力角の干渉係数である．この式を見れば明らかなように，矢高形状が同一関数形の翼型系列では，C_0 は矢高比には無関係で，h だけの関数となる．

2.8 循環密度

(2.5.16)の $g(\xi)$ を(2.6.9)に従って，α と $g_2(\xi)$ の二つに分けると

$$\frac{\gamma^{(0)}(\xi)}{U}=2\alpha\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{g_2(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \quad (2.8.1)$$

と書かれる．同様に，(2.5.9) の $g(\Xi)$ も α と $g_2(\Xi)$ に分けると，(2.8.1) と同形の式が得られることは容易に理解できるだろう．結果のみ記すと

$$\frac{\gamma(\Xi)}{U}=2(\alpha-A)\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{g_2(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \quad (2.8.2)$$

である．この式の A に (2.6.6) を代入すると

$$\frac{\gamma(\Xi)}{U}=2\left(\alpha-\frac{h}{2}C_l\right)\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\frac{g_2(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \quad (2.8.3)$$

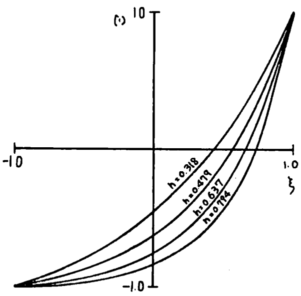

図17　Ξ と ξ との関係

となる．これを (2.8.1) と対比させてみると，自由境界があるときは，見掛上，迎角は，幾何学的迎角より 2δ だけ減少しているように受取れる．これは2.6節の解析とは矛盾するわけであるから，(2.8.1) と (2.8.3) とは，外見上，似ているというだけで，第1項，第2項の分け方は，数学的にも，物理的にも，相似のものではない．そのことは図17に示す ξ と Ξ の関係を見ると，多少理解できるだろう．ξ 座標で，前後対称の矢高曲線は，Ξ 座標では，矢高の最大位置が Ξ の負の側（前縁側）に移って，前後非対称な関数となる．このような場合，(2.8.2) の第2項には $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ のような前縁に特異点をもつ関数は含まれないが，(2.8.3) では，第1項だけでなく，第2項にも，$\sqrt{(1-\Xi)/(1+\Xi)}$ のような前縁に特異

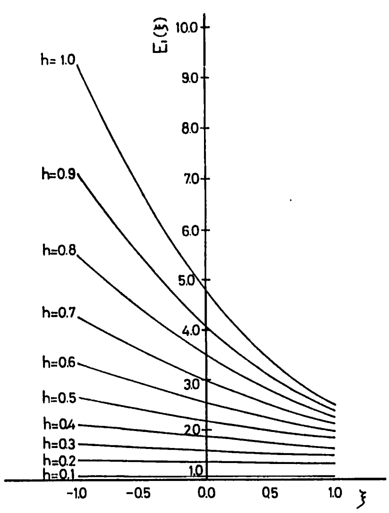

図18　$E_1(\xi)$

点をもつ関数が内在する．したがって，γ と $\gamma^{(0)}$ とで，前縁に特異点のある関数とそうでないもので，互いに対応するものに分ける操作は単純なことではすまされない．まして，実験結果を上記のように分類することは一層むつかしい．よって，循環密度については，干渉係数のような関数は考えないことにする．

γ に対する境界影響の様子を知る意味では

$$E_1(\xi)=\frac{\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}}{\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}}=\sqrt{\frac{e^{\pi h(1-\xi)}-1}{1-e^{-\pi h(1+\xi)}}}\cdot\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \tag{2.8.4}$$

の関数は多少役に立つ．この関数は，$\xi=\pm1$ で不定になるので，そこでは極限値をとる．すなわち

$$E_1(-1)=\sqrt{\frac{e^{2\pi h}-1}{2\pi h}},\quad E_1(1)=\sqrt{\frac{2\pi h}{1-e^{-2\pi h}}} \tag{2.8.5}$$

である．$E_1(\xi)$ の値を図18に示す．

2.9 速度関数

一様流の速度に対する，翼表面流速の比率を速度関数という．線型理論では，$y=0$ における x 軸方向の流速をもって，翼表面流速に当てることができる．それを w とすると，線型理論の速度関数は

$$\frac{w_\pm}{U}=1+\frac{u_\pm}{U} \tag{2.9.1}$$

である．ただし，$u_\pm$ は翼上下面の x 軸方向攪乱流速であって，(2.3.9) を x で微分すると得られる．すなわち

$$u_\pm=\lim_{y\to\pm0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\lim_{y\to\pm0}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{y-nt}{(x-x')^2+(y-nt)^2}dx'+\frac{1}{\pi}\oint_{-c}^{c}\sigma(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-x')}{(x-x')^2+n^2t^2}dx' \tag{2.9.2}$$

である．第1項の $n\neq0$ の部分は，互いに消し合って，0になる．$n=0$ では，$x'=x$ の近傍の積分が残るが，(2.4.7) の運算と同じで，$\pm\gamma(x)/2$ となる．また，第2項は (2.3.2) と同じになる．よって

$$u_\pm=\pm\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{t}\oint_{-c}^{c}\sigma(x')\operatorname{cosech}\frac{\pi(x-x')}{t}dx' \tag{2.9.3}$$

のように表わされる．(2.4.10) を使うと，$\sigma(x')$ は既知関数 $U\,d\bar{y}/dx$ で置き変えることができるから

$$\frac{w_\pm}{U}=1\pm\frac{1}{2}\frac{\gamma}{U}+\frac{h}{2}\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\operatorname{cosech}\frac{\pi h(\xi-\xi')}{2}d\xi' \tag{2.9.4}$$

と書かれる．

ここで，

$$\hat{u}=(u_+-u_-)/2,\quad \bar{u}=(u_++u_-)/2 \tag{2.9.5}$$

と書くと，(2.9.3) より

$$\hat{u}=\gamma/2 \tag{2.9.6}$$

$$\bar{u}=\frac{Uh}{2}\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\operatorname{cosech}\frac{\pi h(\xi-\xi')}{2}d\xi' \tag{2.9.7}$$

である．

$w_\pm$ に対する境界干渉のうち，翼のそりと迎角に由来する γ については，前節で述べたので，翼厚にかかわる第3項，つまり $\bar{u}$ だけを取上げる．$h\to0$ すなわち，$t\to\infty$ では，(2.9.2) の第2項において，$n=0$ 以外の項は消失するので，$n=0$ の項をもって，$h=0$ における $\bar{u}$ とすることができる．それを $\bar{u}^{(0)}$ とすると

$$\bar{u}^{(0)}=\frac{U}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\frac{1}{\xi-\xi'}d\xi' \tag{2.9.8}$$

である．$\bar{u}$ と $\bar{u}^{(0)}$ の比を $T_0(\xi)$ の記号で表わし，それを翼厚の干渉係数とすると

$$T_0(\xi)=\frac{\bar{u}}{\bar{u}^{(0)}}=\frac{\frac{h}{2}\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\operatorname{cosech}\frac{\pi h(\xi-\xi')}{2}d\xi'}{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\frac{1}{\xi-\xi'}d\xi'} \tag{2.9.9}$$

である．

$T_0(\xi)$ は翼厚の分布関数が同一の翼型系列ならば，最大翼厚の比率には関係しない．最近の翼型では，翼厚の分布形はほぼ定まっているので，代表的な二三種類のものについて，$T_0(\xi)$ を計算しておけば，実用上はそれですまされるだろう．ただ，$\bar{u}$，$\bar{u}^{(0)}$ ともに，翼後縁の近くで符号の変る処があり，しかも，その位置が $\bar{u}$ と $\bar{u}^{(0)}$ とで多少異なるので，その附近で，

$T_0(\xi)$ の値に大きな変動が現われる．したがって，この表現には不具合なところがあるが，$T_0(\xi)$ は，その他の処では翼弦方向にあまり変化しない関数であるから，$T_0(\xi)=\mathrm{const.}$ とみなして，$w_\pm$ の計算をしても，大きな誤差とはならないだろう．

速度 $w_\pm$ に Riegels & Wittich[11] の変換をほどこすと，翼厚に対し，さらに精度のよい速度関数が得られる．それを $q_\pm$ とすると，それによる速度関数は

$$\frac{q_\pm}{U}=\frac{w_\pm}{U\sqrt{1+(dy_\pm/dx)^2}} \tag{2.9.10}$$

である．

速度関数と圧力関数の関係は

$$C_p=1-q_\pm^2/U^2 \tag{2.9.11}$$

である．ここでは線型理論の範囲内を扱うので，$q_\pm^2$ の中の，u, v についての2次以上の項は省略しても大差ないが，ただ，前縁近傍だけは，これを計算するのがよいとされている．

2.10 数値計算法

前節までに導いた表示式の多くは，Cauchy の主値をとる特異積分で表わされているので，直接の数値積分では，値が求めにくい．よって，本節では，それらの数値計算式をまとめて示しておく．

i　零揚力角の干渉係数

(2.7.4) の C_0 の式を

$$C_0=\frac{1}{K_0}\frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{g_2(\xi')}{E_1(\xi')}d\xi'}{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}g_2(\xi')d\xi'} \tag{2.10.1}$$

のように書く．ただし，$E_1(\xi')$ は (2.8.4) に示す関数である．この式の積分変数を，$\xi'=\cos\theta'$ によって，θ' に変えると

$$C_0=\frac{1}{K_0}\frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta')\frac{g_2(\theta')}{E_1(\theta')}d\theta'}{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta')g_2(\theta')d\theta'} \tag{2.10.2}$$

となる．ただし，$g_2(\theta')\equiv g_2(\cos\theta')$, $E_1(\theta')\equiv E_1(\cos\theta')$ である．$E_1(\theta')$ は，$\theta=0$, π で不定になるが，(2.8.5) に示した極限値をとる．$g_2(\theta')$ には特異性がないものとすると，(2.10.2) の積分は，Simpson 法則，または台形法則によって，直接計算することができる．

ii　循環密度の計算法 ($h=0$ の場合)

(2.8.1) の第2項を $\gamma_2^{(0)}(\xi)$ の記号で表わすことにし

$$\frac{\gamma_2^{(0)}(\xi)}{U}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\,⨍_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{g_2(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \tag{2.10.3}$$

と置く．(2.8.1) の第1項はそのままで値が得られるから，循環密度の数値計算法としては，(2.10.3) の数値積分が精度よくできればよいわけである．このことは，$h\neq 0$ の場合の (2.8.3) についても同様である．(2.10.3) は特異積分であるから，少し工夫が必要である．

(2.10.3) で，変数 ξ', ξ を

$$\xi'=\cos\theta',\quad \xi=\cos\theta \tag{2.10.4}$$

と置いて，θ', θ に変えると

$$\frac{\gamma_2^{(0)}(\cos\theta)}{U}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\,⨍_0^{\pi}\frac{(1+\cos\theta')g_2(\cos\theta')}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta' \tag{2.10.5}$$

となる．以下では，簡単のため，$\gamma_2^{(0)}(\cos\theta)$, $g_2(\cos\theta)$ を単に，$\gamma_2^{(0)}(\theta)$, $g_2(\theta)$ と書くことにする．

$g_2(\theta)$ は翼の前後縁，つまり $\theta=\pi$, $\theta=0$ で有限値をとるので，これを Fourier 級数で表わすには，余弦級法がよい．それで，最小二乗法による近似式を用いて

$$\left.\begin{aligned}&g_2(\theta')=\frac{2}{m+1}\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu g_2(\theta_\mu)\sum_{k=0}^{m+1}\varepsilon_k\cos k\theta_\mu\cos k\theta'\\&\quad\text{ただし，}k,\ \mu=0,\ m+1\ \text{のとき，}\varepsilon_{k,\mu}=1/2\\&\qquad\qquad k,\ \mu\neq 0,\ m+1\ \text{のとき，}\varepsilon_{k,\mu}=1\end{aligned}\right\} \tag{2.10.6}$$

と置き，(2.10.5) に代入して，θ' の積分を行う．

(2.5.6) の公式を使うと

$$\frac{1}{\pi}\oint_0^\pi \frac{(1+\cos\theta')\cos k\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta' = \left\{\begin{array}{ll} -\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\sin k\theta, & k\fallingdotseq 0 \\ -1, & k=0 \end{array}\right\} \tag{2.10.7}$$

であるから，(2.10.5) は

$$\frac{\gamma_2^{(0)}(\theta)}{U} = \frac{4}{m+1}\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu g_2(\theta_\mu)\left\{\sum_{k=1}^{m+1}\varepsilon_k \cos k\theta_\mu \sin k\theta + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\} \tag{2.10.8}$$

となる．いま，θ_μ および θ を

$$\theta_\mu = \frac{\mu\pi}{m+1}, \quad \theta=\theta_\nu = \frac{\nu\pi}{m+1} \tag{2.10.9}$$

とすれば

$$\sum_{k=1}^{m}\cos k\theta_\mu \sin k\theta_\nu = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1-(-1)^{\mu\pm\nu}}{2}\,\dfrac{\sin\theta_\nu}{\cos\theta_\mu-\cos\theta_\nu}, & \nu\fallingdotseq\mu \\ 0, & \nu=\mu \end{array}\right. \tag{2.10.10}$$

の公式があるから，(2.10.8) は

$$\frac{\gamma_2^{(0)}(\theta_\nu)}{U} = \frac{4}{m+1}\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu g_2(\theta_\mu)\frac{1-(-1)^{\mu\pm\nu}}{2}\,\frac{\sin\theta_\nu}{\cos\theta_\mu-\cos\theta_\nu} + \frac{2}{m+1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_\nu}}\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu g_2(\theta_\mu) \tag{2.10.11}$$

と書かれる．$\gamma_2^{(0)}(\theta_\nu)/U$ の値は，この式を計算すれば得られる．これは使い易い式であるが，欠点もある．第1項の演算子が交互に0となるので，$g_2(\theta)$ の関数形によっては，収束の悪い場合が生じる．

iii　循環密度の計算法 ($h\fallingdotseq 0$ の場合)

ii でも述べたように，(2.8.3) の数値計算としては，第2項の数値積分法だけを考えればすむ．それを γ_2/U の記号で表わすと

$$\frac{\gamma_2(\Xi)}{U} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}\,\frac{g_2(\Xi')}{\Xi-\Xi'}d\Xi' \tag{2.10.12}$$

である．これは，(2.10.3) と全く同形で，変数が ξ より Ξ に変っているだけのものであるが，この式にもむつかしさがある．仮に $\Xi'=\cos\theta'$ と置いて，ii で行ったのと同じ計算法を用いたとすると，図17から明らかなように，θ' の $[0,\ \pi]$ 区間での等分割点は，ξ 軸上では，$\xi<0$ で非常に疎に，それに反して $\xi>0$ の側で非常に密になる．したがって，分割数をかなり多くとっても，h の大きいところでは，収束値が得にくいことになる．そこで，少し形が悪くなるけれども，任意標点法[12]を採用する．

(2.10.12) を

$$\frac{\gamma_2(\Xi)}{U} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\Xi}{1+\Xi}}\oint_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\dfrac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}}{\sqrt{\dfrac{1+\xi'}{1-\xi'}}}\,\frac{\xi-\xi'}{\Xi-\Xi'}\,\frac{d\Xi'}{d\xi'}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\,\frac{g_2(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \tag{2.10.13}$$

のように書く．ここで

$$L(\xi,\ \xi') = \frac{\sqrt{\dfrac{1+\Xi'}{1-\Xi'}}}{\sqrt{\dfrac{1+\xi'}{1-\xi'}}}\,\frac{\xi-\xi'}{\Xi-\Xi'}\,\frac{d\Xi'}{d\xi'} = \frac{\pi h}{E_1(\xi')}\,\frac{\xi'-\xi}{1-e^{\pi h(\xi-\xi')}} \tag{2.10.14}$$

で定義される関数を用いると，(2.10.13) の γ_2 は，ξ の関数として

$$\frac{\gamma_2(\xi)}{U} = -\frac{2}{\pi}E_1(\xi)\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\,\frac{L(\xi,\ \xi')'g_2(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \tag{2.10.15}$$

と書かれる．$\xi'\to\pm1$ で $E_1(\xi')$ が有限確定値となることは，(2.8.5) に示す通りである．また，$\xi'\to\xi$ では

$$\lim_{\xi'\to\xi}\frac{\xi-\xi'}{\Xi-\Xi'}=\frac{d\xi'}{d\Xi'}\Bigg|_{\xi'=\xi}=\frac{1}{\pi h}\frac{1}{\Xi+k}=\frac{\sinh\pi h}{\pi h}e^{-\pi h\xi} \tag{2.10.16}$$

であるから，

$$L(\xi,\ \xi)=\frac{1}{E_1(\xi)} \tag{2.10.17}$$

となり，ここにも特異性はない．したがって，$L(\xi,\ \xi')$ は，ξ' の $[-1,\ 1]$ の区間で特異点をもたない，連続関数である．

(2.10.15) を，(2.10.4) によって，θ' の積分に変えると

$$\frac{\gamma_2(\theta)}{U}=-\frac{2}{\pi}E_1(\theta)\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\oint_0^\pi\frac{(1+\cos\theta')L(\theta,\ \theta')g_2(\theta')}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta' \tag{2,10.18}$$

と書かれる．ここでも，(2.10.5) の場合にことわったように，$\gamma_2(\cos\theta)$ 等を θ の関数として，簡単に $\gamma_2(\theta)$ と書いている．以下でもこの記法を用いる．

$L(\theta,\ \theta')g_2(\theta')$ を θ' の関数として，(2.10.6) の近似式で置き変え，(2.10.18) に代入して，θ' の積分を行う．以下，(2.10.7)～(2.10.11) までの計算と同じことを行うと，結局

$$\frac{\gamma_2(\theta_\nu)}{U}=\frac{4}{m+1}E_1(\theta_\nu)\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu L(\theta_\nu,\ \theta_\mu)g_2(\theta_\mu)\frac{1-(-1)^{\mu\pm\nu}}{2}\ \frac{\sin\theta_\nu}{\cos\theta_\mu-\cos\theta_\nu}$$
$$+\frac{2}{m+1}E_1(\theta_\nu)\sqrt{\frac{1-\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_\nu}}\sum_{\mu=0}^{m+1}\varepsilon_\mu L(\theta_\nu,\ \theta_\mu)g_2(\theta_\mu) \tag{2.10.19}$$

が得られる．γ_2/U の計算には，この式を用いるとよい．

iv 翼厚干渉係数

(2.9.9) の翼厚干渉係数は，その分子，分母ともに，特異積分であり，しかも，一般に $d\bar{y}/dx$ は前縁に特異性がある．そのままでは計算できないから，特異性を分離しておいて，数値積分を行うようにする．

cosech x は，$x=0$ に1位の極をもつので

$$H(x)=\operatorname{cosech}x-\frac{1}{x} \tag{2.10.20}$$

の関数 $H(x)$ を導入する．$H(x)$ は $x=0$ を含む範囲で連続関数である．(2.10.20) を (2.9.9) の分子の $\operatorname{cosech}\{\pi h(\xi-\xi')/2\}$ に適用すると

$$T_0=1+\frac{\dfrac{h}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}H\left\{\frac{\pi h(\xi-\xi')}{2}\right\}d\xi'}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\oint_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}}{dx}\ \frac{1}{\xi-\xi'}d\xi'} \tag{2.10.21}$$

と書かれる．最大翼厚の翼弦長に対する比を t_0 の記号で表わし

$$\bar{y}=t_0y^* \tag{2.10.22}$$

と置くと，y^* は最大翼厚が翼弦長と同じ値の対称翼上面の y 座標に対応する．(2.10.21) の $\bar{y}$ を，(2.10.22) の t_0y^* で置き変え，ξ，ξ' を (2.10.4) によって θ，θ' に変えると

$$T_0=1+\frac{\dfrac{h}{2}\displaystyle\int_0^\pi\frac{dy^*}{dx}\sin\theta'\ H(\theta,\ \theta')d\theta'}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\oint_0^\pi\frac{dy^*}{dx}\ \frac{\sin\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta'} \tag{2.10.23}$$

と書かれる．ただし

$$H(\theta,\ \theta')=H\{\pi h(\cos\theta-\cos\theta')/2\}$$

である．(2.10.23) の第2項，分子の被積分関数には特異性が無いから，この式の数値積分の計算は，Simpson の法則を普通に適用するだけですまされる．問題は分母の数値計算法にある．この項は，(2.9.8) の $\bar{u}^{(0)}/U$ で，翼厚が翼弦長と等しい翼のものに該当する．それを $\bar{u}^{(0)*}/U$ で表わすことにし

$$\frac{\bar{u}^{(0)*}}{U}=\frac{1}{\pi}\oint_0^\pi\frac{dy^*}{dx}\ \frac{\sin\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta' \tag{2.10.24}$$

と書く．一般に，$dy^*/dx\cdot\sin\theta'$ は前縁近傍で，複雑に変化する関数になるので，(2.10.24) の数値計算に

は工夫を要する．精度よい方法を模索するより，古典にはなるが，実績のある守屋の方法[13)14)]をとるのが得策である．

y^*/c は前後縁で0になるので，θ の Fourier 正弦級数で表わし

$$\frac{y^*(\theta)}{c}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \tag{2.10.25}$$

と置く．係数 b_n は

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{y^*(\theta')}{c}\sin n\theta'\, d\theta' \tag{2.10.26}$$

で与えられる．これを用いると

$$\frac{dy^*}{dx}=\frac{dy^*/c}{dx/c}=\frac{dy^*/c}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\xi'}$$
$$=-\frac{1}{\sin\theta'}\sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos n\theta' \tag{2.10.27}$$

と書かれる．それを (2.10.24) に代入し，(2.5.6) を使って，θ' の積分を行うと，$\bar{u}^{(0)*}/U$ の計算式として

$$\frac{\bar{u}^{(0)*}}{U}=\sum_{n=1}^{\infty} nb_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \tag{2.10.28}$$

が得られる．b_n は (2.10.26) を，台形法則を使って，数値積分して求める．分割数が32以上ならば，精度として充分である．$\theta=0$, π のときは，(2.10.29) は

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\bar{u}^{(0)*}}{U}&=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n\\ \lim_{\theta\to\pi}\frac{\bar{u}^{(0)*}}{U}&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 b_n\end{aligned}\right\} \tag{2.10.29}$$

によって計算する．

図19は NACA 16 の翼厚干渉係数を上記の方法によって計算した値である．その図には，前後縁の近くの値が示してない．その理由は，前縁近傍で $\bar{u}^{(0)}$ の計算値の収束が悪いこと，後縁近くでは，$\bar{u}^{(0)}$ が0になる処があり，T_0 の明確な値が存在しないこと，による．$\bar{u}^{(0)}=0$ が存在することは，翼厚の干渉係数として，(2.9.9) の形の式をとることの一つの難点であるが，反面この式は翼厚に対する境界干渉を拡大して表わす利点がある．速度関数の中で $\bar{u}/U$ のしめる割合は小さく，また ξ の全域で，T_0 がほぼ一定で，1.0 に近いから，T_0 を，$\xi=0$ における値で代表させても，大きな誤りはないだろう．

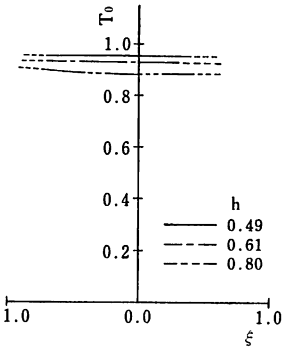

図19　翼　厚　の　干　渉　係　数

3　実験と理論の比較

本章では，第1章の試験結果を第2章の理論による数値計算の結果と比較し，現象の仕組みを模索する．そして，境界干渉に対する，一つの補正法を提案する．

先づ，以下の記述の便宜のため，流体粘性が翼の揚力特性に及ぼす影響として知られているものをまとめて記載しておく．翼型理論の基本では，境界層の厚さおよび剝離は，計算の中に入れない．したがって，理論と実験との食い違いの原因は，主として境界層の発達と剝離にあるが，ポテンシャル流理論の流体モデルの感覚で，現象を整理すると，次の3つに分けることができる．

（a），迎角が増すに従って，翼上面で圧力は，後縁に向って急上昇するので，境界層が急速に発達，層流より乱流に，遷移し，さらに後縁附近で剝離するなどして，Kutta の流出条件の満足され方が鈍る．従来，無限流体中の揚力傾斜を，実用では，理論値 2π に，実験値 k_a を乗じて

$$dC_l^{(0)}/d\alpha=2\pi k_a(k_a<1) \tag{3. 1}$$

のように表わして来た．図20(a) は，この流れの模様を図に描いたものである．

（b），前縁半径の小さい翼が迎角をもったとき，前縁で，一旦剝離した層流境界層が，再び翼表面に付着して，後縁から滑らかに流れ去る，という現象が知られている．この流れの形は，図20(b) に示すように，水中翼の前縁に部分キャビテーションが生じたときの流れと相似であって，その実験および理論解析の結果[15)]からも推定できるように

$$dC_l^{(0)}/d\alpha=2\pi k_b(k_b>1) \tag{3. 2}$$

である．しかし，この現象は，該当迎角範囲が狭いのと，（a）の現象と共存するので，翼特性，特に揚力に及ぼす影響が顕著に現われる場合は少い．

図12-2で，$\alpha=-3°$，$\alpha=-6°$ における，翼下面の前縁近傍の圧力を見ると，前者では，前縁に近づくに従って負の無限大に向うのに対し，後者では，頭がつぶれて，一定値に並んでいる．これは，負迎角で上記現象が生じていることを示す一実例である．

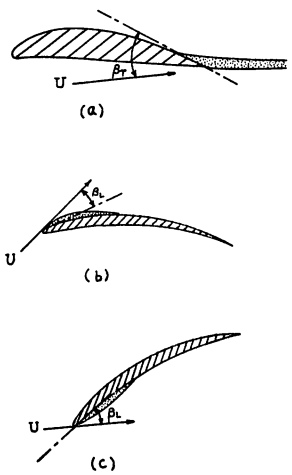

図 20

以上，（a），（b）の現象の現われる度合いは，大づかみには，一様流と翼表面とのなす角度によって判定することができる．すなわち，図20(a) の β_T が大きい程，（a）の現象は顕著になる．また，図20(b) の β_L が，ある大きさに達すると，（b）の現象が生じる．

（c），これは図20(c) に示す流れで，現象としては，（b）と同じであるが，負迎角の場合である，薄い翼で，矢高が大きいとき，前縁では，β_L がある値に達し，（b）が生じているのに，後縁では，β_T が負か，正でもその値が小さくて，（a）の現象があまり顕著でない，つまり負の迎角で，（b）の現象だけが存在する場合と考えればわかりやすい．

（b），（c）の現象で，前縁近傍の剝離による死水域部分が揚力特性に与える効果のおおよその見当は，見掛上，死水域部分だけ翼型がふくらんだ場合を想定すればよい．(3.2) で，$k_b>1$ となるのは，死水域部分が見掛上の翼型矢高を大きくしたことに由来する．

3.1 揚 力

i 揚 力 傾 斜

図11-1～11-3および図13-1～13-8の $C_l\sim\alpha$ 曲線の直線部分で，$dC_l/d\alpha$ を図式に計測する．ただし，α は radian で測る．それを 2π で割ったものが，理論における揚力傾斜の干渉係数に対応する．すなわち

$$\frac{dC_l/d\alpha}{2\pi}=K_0{}^* \tag{3.1.1}$$

である．これを理論値と比較したものが，図21-1～20-3に示してある．翼厚比3％のものでは，実験値と理論値は完全に一致していると云える（図21-1参照）．

しかし，翼厚比が7％，11％と厚さが増すに従って，実験値は理論値より小さくなる．これは（a）の現象

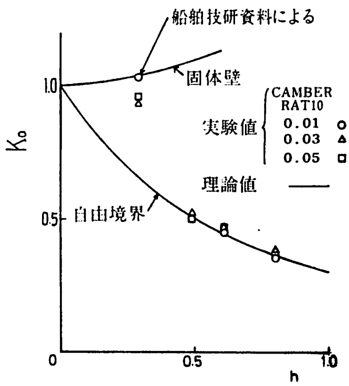

図21-1 揚 力 の 干 渉 係 数
(THICKNESS RATIO 0.03)

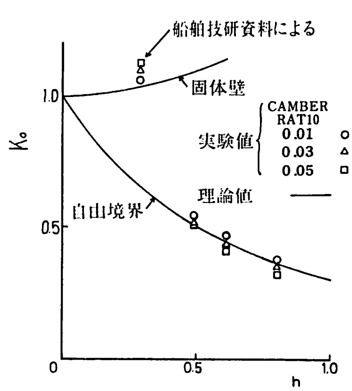

図21-2 揚 力 の 干 渉 係 数
(THICKNESS RATIO 0.07)

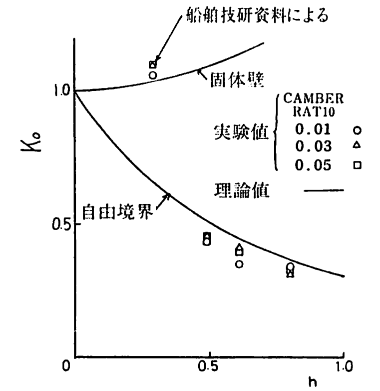

図21-3　揚　力　の　干　渉　係　数
(THICKNESS RATIO 0.11)

の現われで，翼厚が増すと β_T が大きくなることに由来する．よって

$$C_{l1}=2\pi k K_0\alpha \quad (3.1.2)$$

のように表わすのがよいだろう．ただし，K_0 は (2.6.14) で与えた関数，そして，ことわるまでもなく，$K_0{}^*=kK_0$ である．

ii　零揚力角

零揚力角の実験値と理論値の比較を図22-1〜22-3に示す．迎角計測の誤差の平均値を0.5°としても，翼厚比3％では，実験値は理論値より低く，翼厚比7％では，両者はほぼ一致し，翼厚比11％では，実験値が理論値より高めに出ていることは明らかである．船舶技研の資料より得た値を $h=0$ の位置に記入した．この資料は，固体壁境界で，$h=0.29$ の状態におけるものであるから，厳密な意味では，理論値との比較にならないが，全般に，実験値と理論値はほぼ一致していると見てよいだろう．この翼模型は十数年前に製作されたものであるから，経年歪が現われたか否かを検査してみた．製作時の翼表面の許容寸法誤差は 0.2mm とされたが，現在でも，誤差は 0.5mm 以内にあることが確かめられた．したがって，上記の実験と理論の食い違いは翼模型に原因するものではない．また，圧力測定点の間の圧力は全くの推定で，全体の圧力曲線を描くので，それを積分して求めた C_l には，誤差が入りがちである．しかし，この誤差は random のものであるから，特に考慮に入れる必要はない．したがって，実験と理論の比較における上記の傾向は，流体現象そのものと判断してよい．

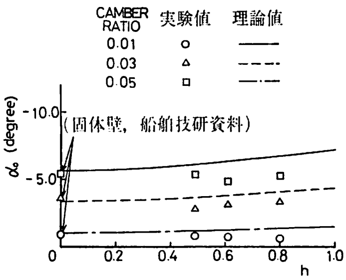

図22-1　零　揚　力　角
(THICKNESS RATIO 0.03)

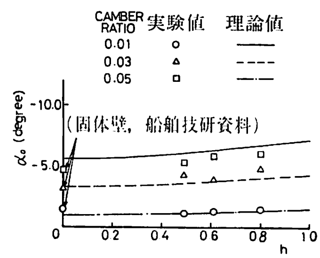

図22-2　零　揚　力　角
(THICKNESS RATIO 0.07)

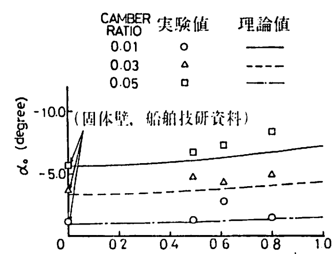

図22-3　零　揚　力　角
(THICKNESS RATIO 0.11)

粘性影響によって，零揚力角の実験値が理論値から離れていく有様は，前項で述べた（a）および（c）の現象の現われ方で説明することができる．（a）の現象によって，C_{l1} は (3.1.2) のように表わされる．このとき，零揚力角 α_0 の表示式 (2.7.2) の分母の K_0 は kK_0 に変ることになるので，絶対値で云うと，α_0 の実験値は理論値より大きくなる．翼厚比が大きい程，k が小さくなるので，この傾向は著しいはずで，それを図22-3に見ることができる．

（c）の現象が生じると，翼下面がふくらんだのと同等で，見掛上の矢高が減少し，零揚力角の絶対値は減少する．翼厚比が小さく，矢高が大きい程，β_L は

大きくなるので（図20(c) 参照)，この効果は顕著になるはずで，それは図22-1に見られる．図22-2は翼厚比が中間のもので（7％)，上記2つの効果が均等に生じ，理論値との食い違いを相殺して，実験と理論が近い値に落着いたということであろう．船舶技研の資料に対しては，検討の余地が残されたことになるが，これは次回の研究（固体壁境界に関するもの）にゆだねることにしたい．

以上の考察は，定量的な判定のできない，単なる推測である．論理として完備したものに仕上げるには，定量的推定が必要である．それには，境界層の剝離した場合の外部領域のポテンシャル流の理論，つまり水中翼の cavity flow の理論[15]を使えばよいと思われるが，そこまで手を広げると，迷路に入りかねない．それらは別種の問題として，本論からは除外した方がよいように思う．

3.2 圧　力　差

前節に示したように，揚力傾斜，零揚力角共に，実験値と理論値の間に多少の食い違いがある．したがって，翼の同じ姿勢に対して，圧力差の実験値と理論値を比較したのでは，単に，その差異を強調するだけの効果しかない．翼の周囲の流れは，一様流の速度と，翼周りの全循環の強さによって定まることは，2次元ポテンシャル流の翼理論が教えるところである．よって，Pinkerton の提案[16]に従い，翼の周囲の流れの，実験値と理論値の比較は，全循環，つまり揚力が等しいところで行う．

図23-1～23-3は上記のようにして，実験値と理論値を比較したものの一例である．ここに例示した資料の翼系列は，翼厚が中間にあり，揚力傾斜，零揚力角ともに実験値と理論値が近いので，揚力が同一のところでは，姿勢もかなり近く，両者の比較に無理の入る余地が少い．理論は実験とほぼ一致していると見てよいだろう．後縁近傍での，実験値と理論値の食い違いは，迎角が増加する程，また矢高比が増す程増加している．ここにも，β_T が大きい処で，(a) の現象が顕著になることの一例を見ることができる．

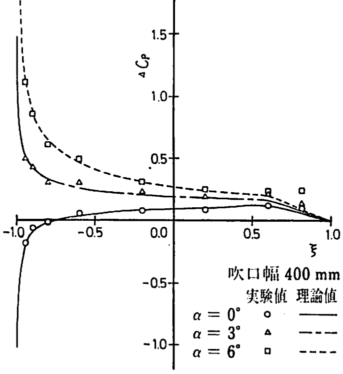

図23-1　循環密度の実験と理論の比較 (Model No. 4)

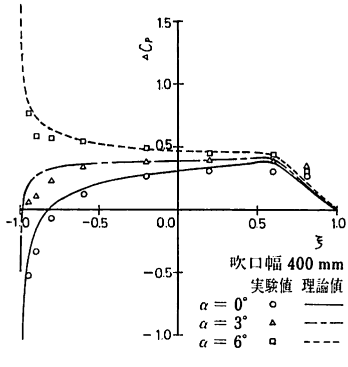

図23-2　循環密度の実験と理論の比較 (Model No. 5)

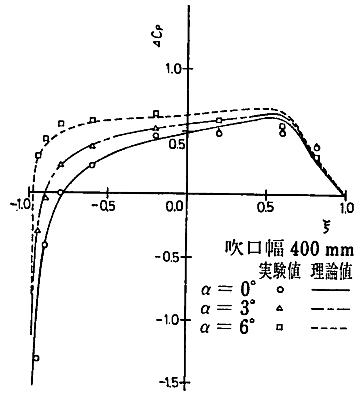

図23-3　循環密度の実験と理論の比較 (Model No. 6)

3.3 圧 力 分 布

図24は，揚力の同じ処で，翼表面の圧力分布の実験値と理論値を比較して示したものであるが，全般として，両者はよく一致している．したがって，翼厚に依存する圧力，つまり吹出しの強さ σ によって表わされる項は，矢高，迎角に依存する圧力，つまり循環密

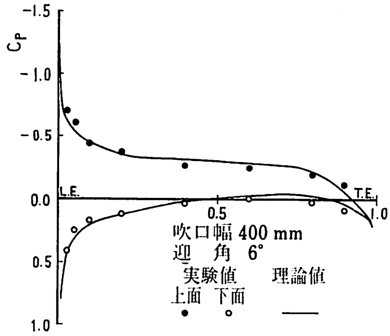

図24　翼表面圧力分布の実験と理論の比較
(Model No. 4)

度 γ によって表わされる頃のような著しい粘性影響はほとんど受けないと判断してよい.

3.4 風洞境界干渉の補正法

翼型特性に及ぼす粘性影響は，理論計算だけでは，解明できない．翼型風洞試験の目的の多くは，それを調べる点にあるので，翼型特性の中で，粘性影響の顕著なものに対し，風洞境界の影響を，どうしたら補正できるかを考えてみる.

前節までの考察で，粘性影響の著しいのは圧力差であり，また境界影響の著しいのもそれであることが判明したので，補正の対象を圧力差と揚力に限度定する.

翼厚に基づく翼表面の流速に対する境界影響が極めて少いことより類推すると，翼表面の境界層の流れ，および剝離流の形状そのものは，風洞境界の直接の影響を受けないと仮定してもよいだろう．これを前提にして，循環密度 γ および C_l〜α 曲線の補正法を考えてみる．$h=b$ で，迎角が α_A^* のときの揚力係数，循環密度の実験値を，それぞれ C_{lA}^*, γ_A^*/U とする．また，境界幅が，$h=b$, $h=0$ の両方の状態で，揚力係数の理論値が C_{lA}^* になる理論の迎角を α_A, $\alpha_A^{(0)}$ とし（図25参照），その α_A, $\alpha_A^{(0)}$ における循環密度の理論値を，それぞれ γ_A/U, $\gamma_A^{(0)}/U$ とする．すでに示したように，γ_A/U と γ_A^*/U はよく一致する（図23-1〜23-3参照）．図26は $\gamma_A/\gamma_A^{(0)}$ を示したものであるが，全般的に1に近い．したがって，境界幅が翼弦長の2倍以上ならば，γ_A^*, γ_A, $\gamma_A^{(0)}$ のポテンシャル流の場は相似に近いと考えてよく，α_A^* と $\alpha_A^{(0)*}$ の状態では，粘性影響は，ほぼ同じ形で現われると判断しても大過ないだろう．よって，$h=0$, $\alpha_A^{(0)*}$ のときの循環密度を $\gamma^{(0)*}/U$ とすると

$$\frac{\gamma_A^{(0)*}}{U}=\frac{\gamma_A^*-\gamma_A}{U}+\frac{\gamma_A^{(0)}}{U} \tag{3.4.1}$$

が成立つと考えてよい．これが，循環密度に対する，境界影響の補正式である．上式の右辺第1項は粘性影響を表わす.

また，$\alpha_A^{(0)*}$ が不明である．そこで，次に $\alpha_A^{(0)}$ と $\alpha_A^{(0)*}$ の差 $\Delta\alpha^{(0)}$ の推定法を考える.

$h=0$ および $h=b$ のとき，$\Delta\alpha$ による揚力の変分 ΔC_l は

$$\Delta C_l^{(0)}=2\pi\Delta\alpha^{(0)} \tag{3.4.2}$$

$$\Delta C_l=2\pi K_0\Delta\alpha \tag{3.4.3}$$

で与えられる．$\Delta C_l^{(0)}$, ΔC_l を粘性影響によって減少する揚力の変化分とすると，迎角が $\alpha_A^{(0)}$ と α_A とでは流れが相似であるから,

$$\Delta C_l^{(0)}=\Delta C_l \tag{3.4.4}$$

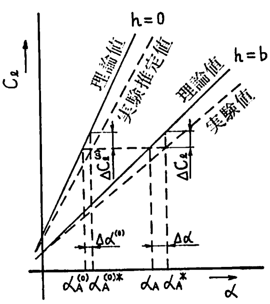

図25　無限流体中の揚力推定法

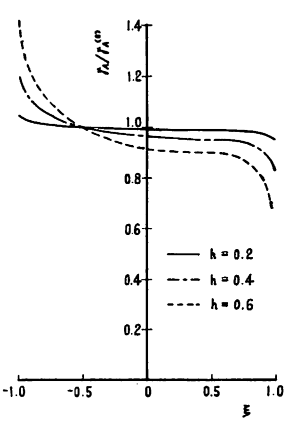

図　26
($\gamma_A^{(0)}$ は CAMBER RATIO 0.03, $\alpha=2°$ におけるものである.)

としてよい．(3.4.4) に (3.4.2)，(3.4.3) を代入すると

$$\varDelta\alpha^{(0)}=K_0\varDelta\alpha \qquad (3.4.5)$$

が得られる．$\varDelta\alpha$ が実験と理論の比較から求められるから，この式によって，$h=0$ のときの $\varDelta\alpha^{(0)}$ を計算することができる．しかし，$\varDelta\alpha^{(0)}$ は，このようにして求めなくても，既存の実験資料を使えば，かなり正確な推測値が得られる．上記方法は，当該実験の精度検定に使えばよいだろう．なお，$h<0.2$ では $\gamma_A/\gamma_A^{(0)} \fallingdotseq 1$ であるから，補正の必要はなく，同じ揚力の γ を $\gamma^{(0)}$ とみなせばすむ．また2.6節の補正法を使ってもよい．

む す び

広範な実験と理論計算によって，風洞測定部が自由境界の場合の境界影響の現われ方の詳細を調べた．理論値を物差にして，実験値を整理し，そこから，翼型特性に及ぼす粘性影響の仕組みを推測してみた．得られた結論は次の通りである．

1. 理論値と実験値はよく一致する．
2. 自由境界は，翼型特性に及ぼす影響が著しいので，これを避けることが望ましい．
3. $h<0.2$ ならば，風洞で計測した翼表面の圧力分布は，それに等しい揚力をもつときの無限流体中の翼表面のそれに対応すると考えてよい．
4. 境界影響を補正する一つの方法を示した．

終りに，貴重な翼模型を大量に貸与された船舶技術研究所ならびに関係各位に対し感謝の意を表します．

参 考 文 献

1) 佐々木達治郎，東大航研報告，第46号，1928.
2) 友近晋，東大航研報告，第101号，1934.
3) 友近晋，梅本一，東大航研報告，第185号，1938.
4) 守屋富次郎，“空気力学序論”，培風館，昭和34年.
5) Stack, J., NACA, T.R. No. 763, 1943.
6) Abbott, I.H. and von Doenhoff, A.E., “Theory of Wing Sections”.
7) 荒木基暁，木原治彦，福原稔，鹿児島大学工学部，機械工学科，昭和56年度卒業論文.
8) 花岡達郎，松下兼次，鹿児島大学工学部研究報告，第22号，昭和55年.
9) 近藤次郎，“積分方程式とその応用”，コロナ社.
10) Pistolesi, E., “L'Aerotecnica”, 15, 1935.
11) Riegels, F. and Wittich, H., Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, I, 120-132, 1942.
12) 花岡達郎，造船協会論文集，第86号，1949.
13) 守屋富次郎，日本航空学会誌，第5巻，第33号，昭和13年.
14) 花岡達郎，船舶技術研究所報告，第12巻，第1号，昭和50年.
15) 花岡達郎，Papers of Ship Research Institute, No. 21, 1967.
16) Pinkerton, R.M., NACA, T.R. No. 563, 1936.