旋回ジブクレーンつり荷重と
地球自転の振り子（第2報）

——改修形運動方程式と在来形運動方程式——

富　　武　満

（受理　昭和55年5月31日）

THE FOUCAULT PENDULUM AND A SUSPENDED BURDEN WEIGHT FROM A SLEWING JIB CRANE

(2nd Report-Modified Equations of Motion and Classical Equations of Motion for the Foucault Pendulum)

Takemitsu TOMI

The author has stated in the previous report that the equations of motion for the Foucault Pendulum ought to be represented as follows:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

Neglecting the centripetal acceleration $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta$ due to the angular velocity about the ξ axis which is caused by the Earth's rotation, Eqs. (a) are obtained from the following modified equations of motion:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

Also neglecting Ω^2 in Eqs. (b), we obtain the following classical equations of motion for the Foucault Pendulum:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\frac{g}{l}\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\frac{g}{l}\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

This dissertation deals with Eqs. (b) and Eqs. (c). By using the solutions of Eqs. (b), it can be shown that we may regard as $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq0$.

1. 緒　　言

重力の作用のもとに地表で振動する振り子の場合，地球が自転角速度Ωを持つ回転体であるために，その振り子の支点軸は回転軸を形成する．このような支点軸が回転する振り子で，それの最も典型的な一般例としては，旋回ジブクレーンのつり荷重が考えられる．この旋回クレーンのつり荷重では，それの運動に最も大きな影響を及ぼす力は，ジブの旋回によってつり荷重の支点に生ずる遠心力であるが，そのほかに，つり荷重それ自身の運動に附随して発生する支点軸まわりの遠心力が，つり荷重の運動では重要な役割をする．

地表で自然に振らせた振り子の場合でも，同様なこ

とが言える．しかしながら，現時点における世界の定説によれば，地表に設置された振り子の運動に，地球の自転現象が及ぼす影響としては，見掛けの重力とコリオリの力との，二者によるものだけを考慮すれば良いとされている．

筆者は第1報において，振り子の運動には上記二者の力のほかに，さらに第3番目の力として，振り子自身の運動によって発生する支点軸まわりの遠心力も，振り子の運動に影響を及ぼしており，これら三者の力によって，振り子の運動方程式が表わされるべきことを提唱してきた．[1] ただし，コリオリの力と遠心力は，いずれも慣性力ではあるが，便宜上ここでは，力と言う言葉でそれらを表現することにする．

なお第1報では，従来のように見掛けの重力とコリオリの力との二者のみを，考慮に入れた在来形の運動方程式のことを，「フーコーの運動方程式」と呼んでおり，またこれら二者の力に加えて，支点軸まわりの遠心力も取り入れて，これら三者の力を考慮した運動方程式のことを，「地球自転振り子の運動方程式」と呼び，それぞれに対して，このような異なった呼称名を使用してきた．

この第2報においても，前の第1報にならって，フーコーの運動方程式に対しては，それを「フーコー方程式」と略称し，また地球自転振り子の運動方程式という呼称名は，それを「地球自転の振り子方程式」と略称する．

2. 内容のあらまし

筆者が提唱した「地球自転の振り子方程式」によれば，地表で振らせたすべての振り子に対して，それらの運動が適切に説明できる．いま述べた地球自転の振り子方程式は，旋回クレーンのつり荷重の運動方程式を利用すると，簡単に得られるものであった．したがって，この運動方程式を作製するに当たっては，支点軸のみを地表での鉛直軸 ζ 方向に一致させて取りさえすれば，運動方程式それ自体が確定し，この ζ 軸に垂直な地表軸である ξ 軸と η 軸の水平軸については，それらの方向を任意の向きに取っても差し支えない．

しかしながら，地表の任意点に設置された振り子の運動に，地球自転の角速度 Ω が及ぼす影響を適切に求めるためには，振り子の支点を座標原点として，ζ 軸は支点軸と一致させて鉛直上方に取り，ξ 軸は水平南向きに，また η 軸は水平東向きに取っておくほうが，以下の説明には便利である．

このように，ξ 軸を地表南北軸に一致させ，η 軸を地表東西軸と一致させた場合，北緯 ϕ 度の任意地表点に，長さ l のつり糸でつるされた質量 m の振り子に対しては，支点軸まわりの角速度成分 $\Omega\sin\phi$ と，ξ 軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ とによる各遠心力が，振り子の運動に附随して発生し，それらは同時に振り子へ働く．第1報において，旋回ジブクレーンつり荷重の運動方程式を利用すれば，支点軸まわりの角速度成分 $\Omega\sin\phi$ による遠心力については，それのすべてが振り子の運動方程式の中に考慮される，ということを述べておいた．[1]

ところがその場合，ξ 軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ による遠心力は，振り子の運動方程式の中に考慮されないことになる．しかし，現実にはこの $\Omega\cos\phi$ の角速度も，ζ 軸方向および η 軸方向に，それぞれ遠心力を生ずるはずである．これらのうち，ζ 軸方向の遠心力成分 $m(\Omega\cos\phi)^2\zeta$ は，見掛けの重力に加算しても良い性質のものであるが，ここでは従来からの慣習に従って，振り子の鉛直方向の運動を無視することにしたので，それは省略できる．

したがって，最後に検討すべきものとしては，η 軸方向の遠心力成分だけが残る．この η 軸方向のものは地表における東西軸方向の遠心力成分であり，それは $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ で表わされる．この第2報においては，ここで最後に残された $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ の遠心力成分が，振り子の運動にどの程度の影響を及ぼすか，そのことについて検討を加える．

そのためには，この $m\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta$ の遠心力成分を「地球自転の振り子方程式」に追加して，運動方程式の形を改修して見れば良い．このように $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ の遠心力を運動方程式に考慮した場合には，第1報で (14′) 式もしくは (31) 式として示しておいたように，そこで「改修形運動方程式」と呼んだ方程式が得られた．[1]

この第2報では，改修形運動方程式のことを簡略化して，それを「改修形方程式」と呼んでおり，そこではこの改修形方程式を利用することにより，$m(\Omega\cos\phi)^2\eta\fallingdotseq0$ の関係が理論的に証明できることを示している．この $m(\Omega\cos\phi)^2\eta\fallingdotseq0$ の関係は，第1報で設定した仮定 (32′) 式にほかならない．ただし，ここでは振り子の運動状態を考えているため，$\eta\neq0$ とすべきであるから，仮定 (32′) 式は結局のところ，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0$ としても良いことを示す．

第1報の第7章ではその末尾のところで，「仮定（32′）式は理論的にも得られるものであることを追記しておく」と述べておいた.[1] したがって，この第2報の内容は，第1報の追記事項，つまり仮定（32′）式の理論的証明について述べたものとなっている．また，本報告書では在来形のフーコー方程式についても，簡単な考察を加えておいた.

3. 地球自転の振り子方程式

本論文では一貫して，地表に設置されるすべての振り子のことを，その重りの大小やつり糸の長短にかかわらず，便宜的に地球自転振り子と呼んできた.[1] これに対して，地球自転の現象を実証する目的で，現在世界各地に設置されている振り子の場合，比較的に重たい重りを長い針金でつるした，割り合いと周期の長い振り子が採用されるとされ，かつ，それに対しては通称，「フーコー振り子」という在来名が存在するとされている.[2),3),4)]

そのため，本質的な事柄ではないが，この在来名を持つ比較的に周期の長い振り子と，通常一般の振り子との区別を設けたかったので，地球自転振り子といった特殊な呼称名を，ここでは採用したにすぎない．このような特殊呼称名を採用すれば，「単振り子」といった通称名との使い分けも可能となり，便利である．そして，この地表に設置された通常の振り子全般を意味する地球自転振り子に対しては，第1報記載の（10）式もしくは（14）式が，それらの運動を表わす運動方程式である．そこで，前報で得られた内容のうちから，以下の説明に必要な事項を要約すると，次のようになる.[1]

まず，クレーンつり荷重の運動を表わす，第1報記載の（8）式を再記すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\xi=\omega^2 r_0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

の形となっている．ただし，r_0 はジブ半径であり，ω はクレーンの旋回角速度である．また，g は見掛けの重力加速度を示す.

この（1）式で $\xi\eta\zeta$ 座標系は ζ 軸さえ鉛直上方に取っておけば，ζ 軸に垂直な ξ 軸と η 軸は，水平面内で任意の方向に取っても差し支えない．しかし，ここでは地球自転振り子へ，上記の（1）式を適用していくために，以下 ξ 軸は地表南北軸に一致させて南向きに取り，次に η 軸は地表東西軸に一致させて，東向きに取ったということにしておく.

上記の（1）式で $r_0=0$ とおいたものが，第1報記載の（10）式であり，それは

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

で表わされた．本式が地表で自然に振らせた振り子の運動方程式であって，本論文では，それを「地球自転振り子の運動方程式」と呼んだ．本報告書では，これを「地球自転の振り子方程式」と略称している．（2）式は ω の値が $0\leqq\omega\leqq\infty$ でも成立するものであり，ω は任意の値を採ると考えてよい．しかも，（2）式から得られる振り子の振動周期 τ_1 の値は，$\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ の無減衰振動周期の値と一致している.

次に，第1報の（14）式を再記すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2')$$

となるが，この（2′）式は

$$\omega=\Omega\sin\phi\quad\cdots\cdots(3)$$

の関係を使用して，（2）式を書き替えたものにすぎない．一般に，「単振り子」の通称名を持つ振り子については，（2）式や（2′）式で $\Omega=0$ とおけば，それに対する運動方程式が得られる．ただし，Ω は地球の自転角速度を表わすので，（3）式のようにおいた場合，（2′）式の適用範囲は $\Omega\sin\phi=\omega$ が微小値を採る時に限定されてしまう．しかし，それは当然 $0\leqq\omega\leqq\infty$ の範囲に含まれている.

前記の（2）式と（2′）式は一見してわかるように，その中に支点軸まわりの求心加速度，すなわち ζ 軸まわりの求心加速度 $\omega^2\xi=(\Omega\sin\phi)^2\xi$，および $\omega^2\eta=(\Omega\sin\phi)^2\eta$ が含まれている．よって，（2）式や（2′）式の中には，支点軸まわりの遠心力成分だけは，それらのすべてのものが含まれていることになる．なぜならば，この場合 ζ 軸方向の振り子の運動は無視しており，かつ第1報記載の（27）式で，その左辺に含まれる $\alpha_0(=R_0\Omega^2\cos\phi\sin\phi)$ も，それを省略しているからである．ただし，いま述べた（27）式の中の ϕ_0 は，ここではそれを ϕ と略記しておいた．そして，R_0 は地球の半径である.

また，(2) 式および (2′) 式の一般解については，第1報で述べたように

$$Z=\xi+i\eta \qquad \cdots\cdots(3')$$

とした場合には，それが

$$Z=(Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t}+Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t})e^{-i\omega t}$$
$$=Z_0e^{-i\omega t} \qquad \cdots\cdots(4)$$

で表わされる．ここで，Z_0 は単振り子の振動を表わし，それは

$$Z_0=Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t}+Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t} \qquad \cdots\cdots(5)$$

を示す．(5) 式によれば振り子の振動周期 τ_1 は，無減衰周期 $\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ の値を採る．

次に，振り子の振動数 N_P と支点軸の回転数 N_E との比を n と書き

$$\sqrt{g/l}/\omega=N_P/N_E=n,\ \text{すなわち}\ \sqrt{g/l}=n\omega \qquad \cdots\cdots(6)$$

とおけば，n は $0\leqq n\leqq\infty$ の間の任意の値を採る変数となる．ただし，地表での通常一般の振り子に対しては，$n\gg1$ と考えて良い．この (6) 式を (2) 式に使用すると，(2) 式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}+(n^2-1)\omega^2\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\frac{d\xi}{dt}+(n^2-1)\omega^2\eta=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

の形となり，また (4) 式と (5) 式は，それぞれ

$$Z=(Ae^{in\omega t}+Be^{-in\omega t})e^{-i\omega t} \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$Z_0=Ae^{in\omega t}+Be^{-in\omega t} \qquad \cdots\cdots(8')$$

で表わされるので，この (8) 式が (7) 式の一般解となる．

ここでまた，(8) 式で $A=A_1+iA_2$，$B=B_1+iB_2$ とおき，かつ $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ の公式を使えば，(8) 式は

$$\left.\begin{aligned}\xi=&A_1\cos(n-1)\omega t+B_1\cos(n+1)\omega t\\&-A_2\sin(n-1)\omega t+B_2\sin(n+1)\omega t\\\eta=&A_1\sin(n-1)\omega t-B_1\sin(n+1)\omega t\\&+A_2\cos(n-1)\omega t+B_2\cos(n+1)\omega t\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

になる．

さてここで，振り子に東向きの η 軸方向への初期変位 δ_0 を与えて，自然に放したとすれば，このときの初期条件は

$$[\xi]_{t=0}=0,\ [d\xi/dt]_{t=0}=0;\ [\eta]_{t=0}=\delta_0,\ [d\eta/dt]_{t=0}=0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

となるので，積分定数の値が

$$A_1=B_1=0,\ A_2=\{(n+1)/2n\}\delta_0$$
$$B_2=\{(n-1)/2n\}\delta_0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

のようにきまる．これらの値を (9) 式に代入すると，振り子の運動軌道を表わす (9) 式は

$$\left.\begin{aligned}\xi&=(\delta_0/n)(n\cos n\omega t\sin\omega t-\sin n\omega t\cos\omega t)\\\eta&=(\delta_0/n)(n\cos n\omega t\cos\omega t+\sin n\omega t\sin\omega t)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

となるが，本式の $n\omega$ と ω はそれぞれ，$n\omega=\sqrt{g/l}$ および $\omega=\Omega\sin\phi$ を表わすので，この (12) 式はまた

$$\left.\begin{aligned}\xi=\delta_0\Big[&\sin(\Omega\sin\phi\cdot t)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)\\&-\sqrt{\frac{l}{g}}(\Omega\sin\phi)\cos(\Omega\sin\phi\cdot t)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)\Big]\\\eta=\delta_0\Big[&\cos(\Omega\sin\phi\cdot t)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)\\&+\sqrt{\frac{l}{g}}(\Omega\sin\phi)\sin(\Omega\sin\phi\cdot t)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)\Big]\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(13)$$

のように表わすこともできる．(12) 式もしくは (13) 式と同時に，(4) 式も含めてこれら三者のことを，本論文では「在来軌道表現式」と呼んできた．以後，本報告書では，これを「在来軌道式」と略称する．

以上が前報までの内容に対する要約であるが，(10) 式の初期条件を採用した場合には，振り子の運動軌道が (12) 式ないし (13) 式で表わされるために，その運動軌道には

$$\rho_1=\delta_0/n \qquad \cdots\cdots(13')$$

の半径を持つ内円が存在する．[1] また，運動軌道に対する外円の半径 ρ_2 は，$\rho_2=\delta_0$ で表わされる．

4. 改修形運動方程式

(2) 式ないし (2′) 式で示した地球自転振り子の運動方程式では，振り子の運動に附随して発生する支点軸まわりの遠心力が，その中に含まれておる．しかしながら，第2章でも述べたとおり，地球自転の遠心力を，より正確に考慮するためには，さらに地表南北軸まわりの遠心力成分，すなわち ξ 軸まわりの遠心力成分 $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ も，運動方程式の中に追加しなければならない．

そこで，この遠心力成分を (2) 式に追加して，(2) 式を一部改修すると，第1報で (14′) 式として示しておいた形の相対運動方程式が得られた．それを下記に示すと

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\eta=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

のような方程式が得られた.[1]

(14) 式は第1報の (14′) 式をそのまま再記したにすぎない. しかし以下本式を取り扱っていく必要上, ここで改めて (14) 式として示すことにした. この (14) 式は第1報で述べたように, 旋回クレーンつり荷重の運動方程式で, つり荷重の鉛直方向の運動を, ことごとく無視して $r_0=0$ とおきさえすれば, 簡単に得られる運動方程式ではある.[1] つまり, (2′) 式の第2式でその右辺に, $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta$ を追加しさえすれば, 直ちに (14) 式が得られる. ただし, ここでは

$$\Omega^2=\Omega^2\cos^2\phi+\Omega^2\sin^2\phi \qquad \cdots\cdots(15)$$

の関係が存在する.

また, 上記の (14) 式については, 地表で振らせた振り子の運動を, もっとも一般的に表わす運動方程式であるとして, 第1報で (26) 式とおいた運動方程式からも, それを導くことができる. その結果を第1報では (31) 式で示しておいたが, それはこの (14) 式と全く同じものであり, これを「改修形運動方程式」と呼んだことは, 既にそこでも述べておいたとおりである.[1] 本報告書では第2章で述べたように, それを「改修形方程式」と略称することにした.

ところで, 第1報においてはそこで示した (31) 式のすぐ下で,「改修形方程式はその中に, 理論的矛盾点を含んでいるようである」と述べておいた.[1] その理由を以下に述べる.

いま, 第1報記載の (55) 式によれば, 回転座標系 $\xi\eta$ と静止座標系 xy との間には, 次の関係がある. すなわち

$$x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t,\quad y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t \qquad \cdots\cdots(16)$$

の関係が存在していた.[1] よって, この (16) 式の関係を ξ, η で解いて, それらを静止座標系の x, y で表わすと

$$\xi=x\cos\omega t+y\sin\omega t,\quad \eta=-x\sin\omega t+y\cos\omega t \qquad \cdots\cdots(17)$$

となる.

この (17) 式を時間 t で微分して速度と加速度を求め, それらのものを (14) 式の第1式に代入すると, 静止空間における絶対運動方程式としては

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y=0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

が得られ, これは第1報記載の (59) 式と一致する.[1] この (18) 式では支点軸の回転角速度 ω が消失しており, それは静止座標系の定義とも一致している. したがって, これは合理的な結果になっているから, この場合は問題がない.

次に一方で, (17) 式を (14) 式の第2式に代入した場合でも, やはり (18) 式と同じ式が得られるはず, と期待するのが合理的である. けれども, 実際にはその結果が

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x-\Omega^2\cos^2\phi\cdot x=0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y-\Omega^2\cos^2\phi\cdot y=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(19)$$

の形で得られる. これは (18) 式と一致しないので具合いが悪い. つまり, 本式には $\Omega^2\cos^2\phi\cdot x$, および $\Omega^2\cos^2\phi\cdot y$ などの求心加速度が含まれ, それらは回転座標系に附随した回転慣性を表わし, 遠心力に該当する. ところが, 絶対静止の空間では, このような座標系の回転に関連した項が, そこに存在しては具合いが悪い. これは結局, (19) 式の成立している座標系が, 絶対静止の空間を表わしていないことを示し, この (19) 式はその表現上の形式面で, 静止座標系という前提とは矛盾することになる.

しかし, ここで定義している静止座標系というものは, 支点軸まわりに回転のない静止した座標系を意味する. そのため, (19) 式の左辺第3項が, それぞれ遠心力に該当するとは言っても, それらは支点軸の回転によって発生する遠心力とは, 根本的に異なる. つまり, それらは支点軸まわりの遠心力を表わすものではなくて, この支点軸に垂直な地表南北方向の軸 ξ まわりの角速度による遠心力を表わす. ゆえに, ここで定義している静止座標系に対して, (19) 式が本質的に矛盾するわけではない.

さて, (14) 式から得られた (18) 式と (19) 式の両者は, いずれにしろ一致していない. この原因は (14) 式がその中に, 理論式の表現上で, 矛盾点を含むためと考えられる. そこで, (14) 式がこのような矛盾点を含まないようにするためには, 静止座標系における運動方程式の形態から判別して, (19) 式でその中に含まれている回転角速度 Ω を取り除けば良い.

すなわち, (19) 式で $\Omega^2\cos^2\phi$ の項を無視することにして

$$\Omega^2\cos^2\phi\cdot x\fallingdotseq 0,\ \text{および}\ \Omega^2\cos^2\phi\cdot y\fallingdotseq 0 \cdots\cdots(20)$$

の近似仮定をすれば良い. ただし, この場合は振り子の運動状態を考えているので, $x\neq 0$, $y\neq 0$ とすべきである. よって, (20) 式は結局のところ, $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の近似を意味する. しかしながら, (19) 式の場

合には，それがここで定義している静止座標系と，本質的に矛盾しているわけではなかった．したがって，(20) 式はあくまでも

$\Omega^2\cos^2\phi \fallingdotseq 0$ ……(20′)

の近似仮定を意味するものであって，ここではそれを，$\Omega^2\cos^2\phi=0$ といった断定的な形で考える必要はない．

ところが，(20) 式の x, y はそれらの大きさが，η と同じ程度のものであるから，この (20) 式は第1報で (32′) 式として示しておいた

$\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta \fallingdotseq 0$

の仮定と一致する．[1] つまり，第1報記載の (32′) 式の仮定は，このような理論的矛盾点を，(14) 式から排除するために，必然的に設定した仮定にほかならない．

ところで，(18) 式と (19) 式でわかるように，回転座標系における相対運動方程式を静止座標系に変換した際，得られた結果に両式のような食い違いを生ずる場合がある．そのような場合には，いずれが正しい結果のものであるか，それを判別して決定する必要がおこる．それに反して，静止座標系における絶対運動方程式を基礎におき，この絶対運動方程式から出発して座標変換により，回転座標系における相対運動方程式を求めた場合には，得られた方程式の形がそのまま正しい結果を与えることになる．したがってそこでは，いま述べたような判別手順は全く必要としない．これは Newton の運動法則がそもそも，その根底に絶対静止の空間を仮定しており，そのような静止空間の絶対座標の中でのみ，それが成立するものである以上，やむを得ない事柄と考える．

なお，前にもふれておいたように，第1報で示した (26) 式の一般的な運動方程式は，電子計算機によれば，それの解が得られるはずである．しかし，Ω の値が非常に小さいのであるから，第1報の (26) 式をそのままの形で解いて見たとしても，実際には (14) 式ないし (2) 式の解と，非常に接近した解が得られるはずであり，それ自身としては無意味なものになると考える．よって，この最終報告書の第2報では，改修形方程式と名付けた (14) 式のみを，もっぱら取り扱うことにする．

5.　極地点における振り子運動

前記のように，(14) 式はその中に，いささか理論的矛盾点を含んではおるが，振り子の運動に対する近似度は，本論文で地球自転の振り子方程式と呼んでいる (2) 式よりも，高いと考えられる．何故ならば，(2) 式は (14) 式を簡略化した形になっているからである．そこで以下に，この (14) 式の解について考えてゆく．(14) 式は線形であり，それの一般解は容易に求められる．

しかし，得られたそれの一般解は，その表現式がやや複雑な形となる．それ故，数式解を一見しただけで，振り子運動の本質を簡潔に理解しようとする時には，いささか不便である．しかも，地表で振らせた振り子の運動方程式としては，(2) 式を採用してもなんら差し支えがないと思う．したがって，(14) 式の一般解が表わす振り子の運動軌道式を，具体的に求めることは省略し，ここでは最初に，次のような最も簡単な場合から，考察をはじめて見ることにした．

まず，北極もしくは南極の極地点を，振り子の設置場所と仮定すれば，$[\sin\phi]_{\phi=\pi/2}=1$ となるため $\omega=\Omega$ となり，(14) 式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\Omega\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\Omega\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

で表わされ，本式の中には理論的矛盾点などが，いっさい含まれていないことになる．何故ならば，この (21) 式を静止座標系に変換すると，その結果は静止座標系の定義と一致するからである．ただし，南極地点では (21) 式の Ω の値として，負の値を採用しなければならない．

この (21) 式は，第1報においても簡単にふれておいたように，(2) 式で $\sin\phi=1$ とおいても得られる．[1] よって，初期条件が (10) 式と同じとした場合には，その解は (12′) 式で $\sin\phi=1$ とおけば良い．すなわち，(21) 式から得られる運動軌道は，(13) 式で $[\sin\phi]_{\phi=\pi/2}=1$ とおけば

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\delta_0\Big[\sin(\Omega t)\cos\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\Big)\\&\qquad-\Omega\sqrt{\frac{l}{g}}\cos(\Omega t)\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\Big)\Big]\\\eta&=\delta_0\Big[\cos(\Omega t)\cos\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\Big)\\&\qquad+\Omega\sqrt{\frac{l}{g}}\sin(\Omega t)\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\Big)\Big]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(22)$$

のように求められる．この式は振り子の運動が，それぞれ

$\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$，$\tau_2=2\pi/\Omega$ ……(23)

の周期を持つ，二つの周期運動の組み合せであることを示す．

(22) 式と (23) 式によれば，極地点においては振り子の振動周期は，無減衰時の値 $2\pi/\sqrt{g/l}$ であり，また当然のことではあるが，その振動面は Ω の角速度で，支点軸の回転とは逆方向に，回転することがわかる．そして，(22) 式の運動軌道が持つ内円の半径 ρ_1 は

$$\rho_1=\delta_0\Omega/\sqrt{g/l}=\delta_0/n \qquad \cdots\cdots(24)$$

で表わされる．ただし，ここで $n=\sqrt{g/l}/\Omega$ とする．

したがって，地球の南北軸線上で地球外の任意点から，絶対静止の姿勢で振り子の運動をながめたとき，その場合の振り子は，長軸が一定方向を持つ楕円運動をすることになる．この楕円の半長径と半短径の長さは，それぞれ $\rho_2=\delta_0$ および $\rho_1=\delta_0/n$ であり，振り子の振動面はわずかながら，曲面を形成する．[1]

このため，地表に立って振り子の運動をながめた場合でも，振り子は鉛直平面内で振動していることにはならない．しかしながら，Ω の値が非常に小さく，実際問題として視覚的には，$\rho_1=\delta_0/n\fallingdotseq 0$ であるかの如く，認識されるにちがいない．

6. 赤道上の地表点における振り子運動

前章では振り子の設置点が，極地点である場合について述べた．ここでは，振り子を赤道上の地表点に設置した場合につき，(14) 式から得られる振り子の運動を考える．

そこでもしも，振り子を赤道上に設置したとすれば，$[\sin\phi]_{\phi=0}=0$ となるので，(14) 式は

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{g}{l}\xi=0,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\eta=0 \qquad \cdots\cdots(25)$$

のように変形され，支点軸の回転に起因するコリオリの力も遠心力も，両者ともに運動方程式から消失してしまう．よって，これらは振り子が，地表での南北方向および東西方向に，それぞれ振動する場合の単振り子の運動方程式を表わす．ただし，(25) 式の第2式でその左辺第2項の $\Omega^2\eta$ は，ξ 軸まわりの遠心力を表わすが，それは支点軸の回転に起因するものではない．

(25) 式によれば，第1式と第2式とでは復原力が異なっており，これは ξ 方向と η 方向の振動とでは，固有振動数がちがったものになる，ということを意味する．言い換えれば，南北方向の振動と東西方向の振動とでは，振り子の振動周期が異なった値を持つとの結論が得られる．

いま上記の (25) 式の解を求めると，それは

$$\left.\begin{aligned}\xi&=A\cos(\sqrt{g/l}\cdot t)+B\sin(\sqrt{g/l}\cdot t)\\ \eta&=C\cos(\sqrt{g/l-\Omega^2}\cdot t)+D\sin(\sqrt{g/l-\Omega^2}\cdot t)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(26)$$

となる．本式の積分定数をきめるために，ここで振り子をこれまでと同様に，東方へ δ_0 だけ変位させて，静かに放したとすれば，初期条件は (10) 式と同じものになるから

$$[\xi]_{t=0}=0,\ [d\xi/dt]_{t=0}=0;\ [\eta]_{t=0}=\delta_0,\ [d\eta/dt]_{t=0}=0 \qquad \cdots\cdots(27)$$

であり，これから積分定数が

$$A=0,\ B=0;\ C=\delta_0,\ D=0$$

のようにきまる．したがって，振り子の運動は

$$\xi=0,\ \text{および}\ \eta=\delta_0\cos(\sqrt{g/l-\Omega^2}\cdot t) \qquad \cdots\cdots(28)$$

で表わされ，本式によると振り子の振動周期 τ_1' は

$$\tau_1'=2\pi/\sqrt{g/l-\Omega^2} \qquad \cdots\cdots(29)$$

であることがわかる．しかも，この場合は $\xi=0$ となるので，振り子は東西方向の同一鉛直平面内で振動をつづける．

ただし，現実面では常に，$g/l\gg\Omega^2$ の関係が成立するため，(29) 式は $\tau_1'\fallingdotseq 2\pi/\sqrt{g/l}=\tau_1$ としても良いものと考える．また，(29) 式によれば，(25) 式の運動方程式には抵抗の項が含まれていないのに，その値が無減衰周期 $\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ とは，ちがったものになっている．これは運動方程式の中から，支点軸の回転によるコリオリの力と遠心力が消滅し，その代り ξ 軸まわりの遠心力のうちで，それの η 軸方向の成分を考慮しているからである．

つまりこの場合は，地表での南北軸まわりの遠心力による復原力が，重力による復原力を減少させるからである．この減少した復原力のもとで振り子が振動するゆえに，その振動周期が τ_1' の形を採るのは当然の事柄と言える．この結果，振動周期が τ_1' の形を採ったとしても，それは無減衰振動の本質に反することにはならない．

次に，振り子を赤道上に設置した今の場合，南北方向の振動と東西方向の振動とでは，振り子の振動周期が異なった値を持つとの結論は，(25) 式のすぐ下で述べたように，この (25) 式の運動方程式だけから，視察により容易に得られる．しかし，このことについても，(28) 式にならってそれを具体的に示すためには，次のようにすれば良い．すなわち，振り子の設置

点は同じく赤道上であっても，こんどは初期条件を変更して，振り子に南方へ初期変位 δ_0 を与えて振らしたとすれば，その時の初期条件は

$$[\xi]_{t=0}=\delta_0,\ [d\xi/dt]_{t=0}=0;\ [\eta]_{t=0}=0,\ [d\eta/dt]_{t=0}=0 \qquad \cdots\cdots(30)$$

で表わされる．

この (30) 式の条件を使用して，(26) 式の積分定数を求めると，それらの値は

$$A=\delta_0,\ B=0;\ C=0,\ D=0$$

となり，振り子の運動を表わす式として

$$\xi=\delta_0\cos(\sqrt{g/l}\cdot t),\ \text{および}\ \eta=0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

が得られる．本式によると，振り子は常に南北方向の同一鉛直平面内で振動をつづけ，その固有周期 τ_1'' は

$$\tau_1''=\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l} \qquad \cdots\cdots(32)$$

の値を持つことがわかる．この (32) 式の値は，通常一般の無減衰周期を表わす．

(32) 式の値は (23) 式の第1式の値と一致するが，(29) 式の値とは一致していない．したがって，赤道上で振り子を振らせた場合，南北方向の振動と東西方向の振動とでは，振動周期がそれぞれ $2\pi/\sqrt{g/l}$ および $2\pi/\sqrt{g/l-\Omega^2}$ で表わされ，前述のように振り子の固有周期が，お互いに異なることになる．

さらにまた，Ω^2 が無視できないものとして，同じく赤道上に設置した振り子の場合，もしも初期条件を

$$[\xi]_{t=0}=a_0,\ [d\xi/dt]_{t=0}=0;\ [\eta]_{t=0}=b_0,\ [d\eta/dt]_{t=0}=0 \qquad \cdots\cdots(33)$$

とおいて，振り子に $\delta_0=\sqrt{a_0^2+b_0^2}$ の任意方向の初期変位を与えたとすれば，(26) 式に含まれる積分定数が

$$A=a_0,\ B=0;\ C=b_0,\ D=0 \qquad \cdots\cdots(34)$$

となる．このため，(33) 式の初期条件に対する振り子軌道は

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a_0\cos(\sqrt{g/l}\cdot t)\\ \eta&=b_0\cos(\sqrt{g/l-\Omega^2}\cdot t)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(35)$$

の形で得られる．本式の示す運動軌道は，いわゆるリッサージュ (Lissajous) の図形を表わし，振動面はもはや同一鉛直平面内にはなく，しかもその運動軌道はわずかながら曲線図形を描き，振り子の運動はしだいに楕円状を呈するようになる．このように，運動軌道が楕円状になる理由は，直角方向の2個の振動数が大体等しい，というところにその原因がある．

しかし，このような現象の確認は，無減衰の振り子を長時間にわたって，振動させた場合にのみ可能となるわけであり，現実に採用可能な振り子では，再三述べてきたように，$\sqrt{g/l}\gg\Omega$ の関係が必ず存在する．したがって，いま述べたような曲線図形は現われないと見るべきである．

このように，赤道上の地表点に設置された振り子の場合は，コリオリの力が存在していないので，振動面の回転現象も発現しないこともちろんである．振動面の回転がおこらないのであるから，振り子の運動軌道は地表に対して常に同一直線上にあり，その方向は初期条件によって指定された一定方向を持つ，と見なしても良い．そのため，振り子は常に同一鉛直平面内で振動をつづけ，その振動面は平面を形成する．これに対して，前章で述べた極地点に設置された振り子の場合には，その振動面がわずかではあるが，曲面を形成していた．

こうして，振動面回転の有る無しとは別に，振り子の振動面が平面を形成するか，それとも曲面を形成するかということが，振り子を赤道上に設置した時と，極地点に設置した時との，大きな相違点であることがわかる．

なお，以上述べたことから，振り子の運動に決定的な影響を与えるものは，初期条件である，ということもわかると思う．この初期条件の重要性については，第1報の最後でも簡単にふれておいた.[1] たとえば，第1報で述べた (63′) 式の初期条件を (9) 式に適用すると，その時の運動軌道は振動中心点で交叉し，8の字を組み合せた菊の花模様になる．しかし，第1報の (63′) 式の条件が現実性に乏しいことは，そこでも述べておいたとおりである．

7. 改修形方程式の一般解

これまでは，(14) 式の改修形方程式を基礎において，地表で振らせた振り子の運動を，極地点および赤道上などの特殊設置点で考えてきた．したがってこれらの場合は，一般的な振り子運動を代表するものではない．これら特殊設置点以外の任意場所における一般的な振り子運動は，このような両極端な場合の中間的なものになり，それらの性質を組み合せたものになっているはずである．そのような一般的な振り子運動は，(14) 式の厳密解を得ることによって表わされる．

しかしながら，Ω の値が非常に小さいため，(14) 式の厳密解から得られる運動軌道は，(12) 式ないし (13) 式の在来軌道式によるものと，実質的には大差のない運動軌道になると考えられる．しかも，第4章

で述べたように，(14) 式の改修形方程式は，その中にいささか理論的な矛盾点を含んでいる．よってこれらの理由により，たとえ (14) 式の一般解を求めて見ても，それは無意味なものになるかも知れない．

ところが，(14) 式の一般解を求めて見た場合には，以下のように地球の自転角速度 Ω が，振り子の運動にどれ程の影響を及ぼすか，その影響の程度を明確にすることができる．つまり，第１報で述べた (32′) 式の仮定についても，それの妥当性が理論的に証明できることになる．このことを示す目的で，ここでは (14) 式の一般解を求めて見ることにする．そのためにいま，(14) 式の解を

$$\xi=Ae^{i\lambda t},\quad \eta=Be^{i\lambda t} \qquad \cdots\cdots(36)$$

とおいて，これを (14) 式に代入すると

$$\left.\begin{array}{l}-\lambda^2A-2\omega i\lambda B+(g/l-\omega^2)A=0\\ -\lambda^2B+2\omega i\lambda A+(g/l-\Omega^2)B=0\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(37)$$

となり，これから

$$\frac{B}{A}=\frac{-\lambda^2-\omega^2+g/l}{2i\omega\lambda},\quad \frac{B}{A}=\frac{-2i\omega\lambda}{-\lambda^2-\Omega^2+g/l} \qquad \cdots\cdots(38)$$

が得られる．ゆえに，本式の右辺をお互いに等しくおいて

$$\lambda^4-2\left(\frac{g}{l}+\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right)\lambda^2+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)=0 \qquad \cdots\cdots(39)$$

を得るが，この式の根は

$$\lambda=\pm\left[\frac{g}{l}\pm\left\{4\frac{g}{l}\omega^2-\omega^2\Omega^2+\left(\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right)^2\right\}^{1/2}+\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right]^{1/2} \qquad \cdots\cdots(40)$$

となる．そこで，表現式を簡素化する目的で

$$p,\ q=\left[\frac{g}{l}\pm\left\{4\frac{g}{l}\omega^2-\omega^2\Omega^2+\left(\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right)^2\right\}^{1/2}+\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right]^{1/2} \qquad \cdots\cdots(41)$$

とおけば，(40) 式の４個の値は

$$\lambda_1=p,\quad \lambda_2=-p,\quad \lambda_3=q,\quad \lambda_4=-q \qquad \cdots\cdots(42)$$

と書くことができる．それゆえ，(14) 式の一般解は

$$\left.\begin{array}{l}\xi=A_1e^{ipt}+A_2e^{-ipt}+A_3e^{iqt}+A_4e^{-iqt}\\ \eta=B_1e^{ipt}+B_2e^{-ipt}+B_3e^{iqt}+B_4e^{-iqt}\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(43)$$

で表わされる．

ところで，(43) 式の中に含まれる積分定数の間には，(38) 式の関係が存在する．よって，この (38) 式のうちで，さしづめ第１式の関係を使用することにすれば

$$B_1=\frac{(g/l)-\omega^2-p^2}{2i\omega p}A_1 \qquad \cdots\cdots(44\cdot\mathrm{a})$$

$$B_2=\frac{-[(g/l)-\omega^2-p^2]}{2i\omega p}A_2 \qquad \cdots\cdots(44\cdot\mathrm{b})$$

$$B_3=\frac{(g/l)-\omega^2-q^2}{2i\omega q}A_3 \qquad \cdots\cdots(44\cdot\mathrm{c})$$

$$B_4=\frac{-[(g/l)-\omega^2-q^2]}{2i\omega q}A_4 \qquad \cdots\cdots(44\cdot\mathrm{d})$$

となる．ここでまた，簡素化のために

$$\frac{(g/l)-\omega^2-p^2}{2i\omega p}=p_0,\quad \frac{(g/l)-\omega^2-q^2}{2i\omega q}=q_0 \qquad \cdots\cdots(45)$$

とおけば，上記の (44) 式は

$$B_1=p_0A_1,\ B_2=-p_0A_2,\ B_3=q_0A_3,\ B_4=-q_0A_4 \qquad \cdots\cdots(46)$$

となり，(43) 式は最終的に

$$\left.\begin{array}{l}\xi=A_1e^{ipt}+A_2e^{-ipt}+A_3e^{iqt}+A_4e^{-iqt}\\ \eta=A_1p_0e^{ipt}-A_2p_0e^{-ipt}+A_3q_0e^{iqt}-A_4q_0e^{-iqt}\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(47)$$

の表現式で示され，これが (14) 式の一般解である．

一般解 (47) 式で，p と q の値は (41) 式で求められるが，この (41) 式で Ω^2 の項は，(14) 式の第２式に含まれる $-\Omega^2\eta$ のために現われたものであり，遠心力 $m\Omega^2\eta$ の影響はすべて，これら Ω^2 で表わされている．つまり，(41) 式の中には $\omega^4(=\Omega^4\sin^4\phi)$ や $\omega^2\Omega^2(=\Omega^4\sin^2\phi)$ が含まれているのであるから，この Ω^4 の項が $\Omega^2\sin^2\phi$ や Ω^2 で示される遠心力の影響を表わす．したがって，地球自転の現象は Ω^4 の項までが，振り子の運動に影響を及ぼしている，ということになる．

このように，(41) 式によれば，地球の自転角速度 Ω が振り子の運動に及ぼす影響の程度を，明確に知ることができる．しかし，ここで (41) 式を求めた目的は，第１報で設定した (32′) 式の仮定 $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq0$ について，それの妥当性を理論的に証明することにあった．このことを説明するためには，(41) 式の検算を実行しておくと都合が良い．

8.　改修形方程式の解に対する検算

前章で求めた改修形方程式の一般解 (47) 式で，その中の積分定数の値を初期条件によって決定すれば，(14) 式による振り子の運動軌道が具体的に得られる．しかし，その場合はこの (47) 式から得られた軌道表現式がやや複雑な形になるため，その表現式から振り子運動の性質を，視察により簡単に判断することが困難である．

ただ，Ω の値が非常に小さいのであるから，わざわざ (47) 式を使用して，振り子の運動軌道を求めて見たとしても，その様子は (4) 式や (13) 式などの在来軌道式が示すものと，大差のないものになることだけは予想できる．よって，振り子の運動軌道式としては，(4) 式もしくは (13) 式の在来軌道式を採用するのが適切であると考え，ここでは (41) 式から $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq 0$ を得る手順説明の都合上，(41) 式に対する検算を実行しておくことにした．ただし，(41) 式は (42) 式と全く等価なものである．

まず，(41) 式が正しい結果を表わしているとすれば，前に述べた極地点や赤道上など，これら特殊地点に設置された振り子に対しても，それらの振動周期が (41) 式から得られるはずである．そこでいま，(41) 式つまり (42) 式において，$\omega=0$ の場合を考えて見ると，それは振り子を $\phi=0$ の赤道上に設置したことになる．この $\phi=0$ のとき，(42) 式は

$$\lambda_1=p=[g/l-\Omega^2/2-\Omega^2/2]^{1/2}=\sqrt{g/l-\Omega^2} \quad\cdots\cdots(48\cdot a)$$

$$\lambda_2=-p=-\sqrt{g/l-\Omega^2} \quad\cdots\cdots(48\cdot b)$$

$$\lambda_3=q=[g/l+\Omega^2/2-\Omega^2/2]^{1/2}=\sqrt{g/l} \quad\cdots(48\cdot c)$$

$$\lambda_4=-q=-\sqrt{g/l} \quad\cdots\cdots(48\cdot d)$$

となり，前記の (29) 式と (32) 式との両式で示しておいたように，赤道上に設置された振り子の振動周期が得られる．これは (25) 式の運動方程式を，直接解いた場合に該当する．これらの式によれば，p には Ω が含まれるが，q には Ω が含まれない．この性質はあとで $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq 0$ の関係を得るに際し，それの妥当性をしらべる時の判断材料として利用できる．

次に，振り子を北極点に設置したとして，そのときの振動周期を求めるために，同じく (41) 式で $\omega=\Omega$ とおいて，ω を消去して Ω だけで表わすと，(42) 式の λ の値は

$$\lambda_1=p=[g/l+\sqrt{4(g/l)\Omega^2-\Omega^4+\Omega^4}+\Omega^2]^{1/2}$$
$$=[g/l+2\sqrt{g/l}\cdot\Omega+\Omega^2]^{1/2}=\sqrt{g/l}+\Omega \quad\cdots\cdots(49\cdot a)$$

$$\lambda_2=-p=-(\sqrt{g/l}+\Omega) \quad\cdots\cdots(49\cdot b)$$

$$\lambda_3=q=[g/l-\sqrt{4(g/l)\Omega^2-\Omega^4+\Omega^4}+\Omega^2]^{1/2}$$
$$=[g/l-2\sqrt{g/l}\cdot\Omega+\Omega^2]^{1/2}=\sqrt{g/l}-\Omega \quad\cdots\cdots(49\cdot c)$$

$$\lambda_4=-q=-(\sqrt{g/l}-\Omega) \quad\cdots\cdots(49\cdot d)$$

となり，これら (49) 式の値は，(22) 式に含まれる二つの運動周期を表わし，それらは (23) 式の値と一致することがわかる．この場合は (21) 式の運動方程式を，直接解いたことに該当する．

さて次に，(41) 式すなわち (42) 式における Ω^2 は (15) 式で表わされるが，振り子の運動に及ぼす Ω^2 の影響は，いずれにしろ小さいと考えられる．そこで，この Ω^2 の影響を $\Omega^2\sin^2\phi=\omega^2$ だけで代表させることにし，(20′) 式の関係 $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ を使用して，(41) 式から Ω を消去した場合につき，(47) 式を計算して見る．この場合は (14) 式の運動方程式で，その第2式の左辺第3項の Ω を，ω でおき替えたことになり，それは (2) 式に対する解，つまり (2′) 式の解を求めていることを意味する．したがって，その時に得られる結果は，当然 (4) 式と一致しなければならない．

ゆえに，このことを確認するために，(41) 式すなわち (42) 式において，その中の Ω^2 のところを ω^2 でおき替えて見ると，(42) 式は

$$\lambda_1=p=[g/l+\sqrt{4(g/l)\omega^2-\omega^4+(3\omega^2/2-\omega^2/2)^2}$$
$$+3\omega^2/2-\omega^2/2]^{1/2}=[g/l+2\sqrt{g/l}\cdot\omega+\omega^2]^{1/2}$$
$$=\sqrt{g/l}+\omega \quad\cdots\cdots(50\cdot a)$$

$$\lambda_2=-p=-(\sqrt{g/l}+\omega) \quad\cdots\cdots(50\cdot b)$$

$$\lambda_3=q=[g/l-\sqrt{4(g/l)\omega^2-\omega^4+(3\omega^2/2-\omega^2/2)^2}$$
$$+3\omega^2/2-\omega^2/2]^{1/2}=[g/l-2\sqrt{g/l}\cdot\omega+\omega^2]^{1/2}$$
$$=\sqrt{g/l}-\omega \quad\cdots\cdots(50\cdot c)$$

$$\lambda_4=-q=-(\sqrt{g/l}-\omega) \quad\cdots\cdots(50\cdot d)$$

となり，結局のところ p と q の値として

$$p=\sqrt{g/l}+\omega,\quad q=\sqrt{g/l}-\omega \quad\cdots\cdots(51)$$

が得られる．ただし，$\omega=\Omega\sin\phi$ であった．したがって，(51) 式でいま $\phi=0$ とおいて，赤道上の地表点における値を求めると，$p=q=\sqrt{g/l}$ となり，q の値は (48) 式と一致するが，p の値は (48) 式と一致しない．そこで，この $p=\sqrt{g/l}$ を (48) 式から得るためには，単純に Ω^2 を無視したと考えても良い．しかし，$[\cos\phi]_{\phi=0}=1$ であるから，ここではそれを

$$[\Omega^2\cos^2\phi]_{\phi=0}=\Omega^2\fallingdotseq 0$$

と仮定した，という考え方をしたほうが合理的である．何故ならば，この考え方は (20′) 式と一致するからである．

さらにまた，(45) 式へいま得られた (51) 式の値を使用すれば，(45) 式は

$$p_0=\frac{(g/l)-\omega^2-p^2}{2i\omega p}=\frac{(g/l)-\omega^2-(\sqrt{g/l}+\omega)^2}{2i\omega(\sqrt{g/l}+\omega)}$$
$$=-\frac{2\omega(\sqrt{g/l}+\omega)}{i2\omega(\sqrt{g/l}+\omega)}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i \quad\cdots\cdots(52\cdot a)$$

$$q_0=\frac{(g/l)-\omega^2-q^2}{2i\omega q}=\frac{2\omega(\sqrt{g/l}-\omega)}{i2\omega(\sqrt{g/l}-\omega)}=\frac{1}{i}=-i \qquad \cdots\cdots(52\cdot\mathrm{b})$$

となるので，まとめると p_0 と q_0 の値としては

$$p_0=i,\ q_0=-i \qquad \cdots\cdots(53)$$

が得られる．

よって，これら (51) 式と (53) 式の値を，(47) 式に代入したとき，この (47) 式は

$$\xi=A_1e^{i(\sqrt{g/l}+\omega)t}+A_2e^{-i(\sqrt{g/l}+\omega)t}+A_3e^{i(\sqrt{g/l}-\omega)t}+A_4e^{-i(\sqrt{g/l}-\omega)t} \qquad \cdots\cdots(54\cdot\mathrm{a})$$

$$\eta=i[A_1e^{i(\sqrt{g/l}+\omega)t}-A_2e^{-i(\sqrt{g/l}+\omega)t}-A_3e^{i(\sqrt{g/l}-\omega)t}+A_4e^{-i(\sqrt{g/l}-\omega)t}] \qquad \cdots\cdots(54\cdot\mathrm{b})$$

となる．(3′) 式と同じく，ここでまた $Z=\xi+i\eta$ の表示を採用すれば

$$\begin{aligned}Z=\xi+i\eta&=A_1e^{i(\sqrt{g/l}+\omega)t}+A_2e^{-i(\sqrt{g/l}+\omega)t}\\&+A_3e^{i(\sqrt{g/l}-\omega)t}+A_4e^{-i(\sqrt{g/l}-\omega)t}\\&-A_1e^{i(\sqrt{g/l}+\omega)t}+A_2e^{-i(\sqrt{g/l}+\omega)t}\\&+A_3e^{i(\sqrt{g/l}-\omega)t}-A_4e^{-i(\sqrt{g/l}-\omega)t}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad Z=2A_2e^{-i(\sqrt{g/l}+\omega)t}+2A_3e^{i(\sqrt{g/l}-\omega)t}$$

が得られる．本式で更に $2A_2=B$，$2A_3=A$ とおき替えて見ると，上式は

$$Z=(Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t}+Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t})e^{-i\omega t} \qquad \cdots\cdots(55)$$

となり，これは予測どおり (4) 式と一致することがわかる．この (55) 式の積分定数を初期条件により，具体的に決定した結果が，在来軌道式と名付けた (12) 式，つまり (13) 式にほかならない．

このようにして，(41) 式からは (51) 式が得られるが，その際 $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0$ の仮定が使用されている．この $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0$ は取りも直さず，第1報で示した (32′) 式の仮定，つまり

$$\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq0$$

の関係を意味するものである．

9. 第1報での仮定 (32′) 式に対する証明

前章において，(41) 式から (51) 式を求めるためには，仮定として $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0$ の関係が必要である，ということを述べた．ここでは $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0$ の仮定が，理論的にも妥当性を持つものであることを，(41) 式を使用して示すことにする．つまり，第1報で設定した (32′) 式の仮定 $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq0$ について，それの妥当性を以下に検討して見る．

そのためには，第1報で (32′) 式の仮定を得た経過手順を，ここで再度要約しておくと都合が良い．すなわち，(14) 式の改修形方程式へ，(15) 式で示した $\Omega^2=\Omega^2\cos^2\phi+\Omega^2\sin^2\phi$ の関係，および (3) 式の $\omega=\Omega\sin\phi$ の関係を代入して，この (14) 式を次の形

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\eta\\&\quad=\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(56)$$

のような式に書き替えて見る．そうすると，(14) 式でその第2式の $\Omega^2\eta$ の求心加速度は，$\Omega^2\sin^2\phi\cdot\eta$ と $\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta$ の二つに分割されることになる．

(56) 式の第2式では，$(g/l-\Omega^2\sin^2\phi)\eta\gg\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta$ と考えて良い．そこでいま

$$\Omega^2\cos^2\phi\cdot\eta\fallingdotseq0 \qquad \cdots\cdots(57)$$

と仮定すれば，(2′) 式の運動方程式が得られる．この (2′) 式の厳密解は (4) 式であって，それは前記の (55) 式のことであった．すぐ上に述べた (56) 式は，第1報で (32) 式として示しておいたものであり，また (57) 式は第1報に記した (32′) 式の仮定そのものである．[1] ただし，(57) 式では $\eta\fallingdotseq0$ とすべきである．よって，この (57) 式は結果として

$$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0 \qquad \cdots\cdots(57')$$

と等価な同じ内容を意味する．

以上が第1報で述べた (32′) 式の誘導過程であるが，さてここで (41) 式によれば，p と q の値は

$$p,\ q=\left[\frac{g}{l}\pm\left\{4\frac{g}{l}\omega^2-\omega^2\Omega^2+\left(\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right)^2\right\}^{1/2}+\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right]^{1/2}$$

で表わされている．本式の中の ω は $\omega=\Omega\sin\phi$ であるから，ω^4 と $\omega^2\Omega^2$ はいずれも Ω^4 を含む微小量であり，これら Ω^4 の項はすべて省略しても良い．

したがって，最初の近似仮定として $\Omega^4\fallingdotseq0$ とおけば，上式は

$$p,\ q=\left[\frac{g}{l}\pm2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\omega+\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore\quad p,\ q=\left[\left(\frac{g}{l}\pm2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\omega+\omega^2\right)+\frac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\Omega^2\right]^{1/2} \qquad \cdots\cdots(58)$$

となり，本式で最後の $-\Omega^2/2$ の項が，(14) 式の運動方程式では，それの第2式に含まれる $-\Omega^2\eta$ の影響を示す．

そこでまた，$\Omega^2=\Omega^2\cos^2\phi+\Omega^2\sin^2\phi$ の関係を再度使用すれば，(58) 式の p と q の値は

$$p,\ q=\left[\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\pm\omega\right)^2+\frac{1}{2}\Omega^2(\sin^2\phi-1)\right]^{1/2}$$

$$\therefore\ \ p,\ q=\left[\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\pm\omega\right)^2-\frac{1}{2}\Omega^2\cos^2\phi\right]^{1/2}\ \cdots\cdots(59)$$

の形で得られる．

この (59) 式の中の ω は $\Omega\sin\phi$ であったから，それはコリオリの力を表わす．一方，その中で $(-1/2)\,\Omega^2\cos^2\phi$ の項は，コリオリの力や遠心力の複合作用の結果，そこに現われたものであり，それに 1/2 が乗ぜられてはいるがその形から見て，それは ξ 軸まわりの遠心力 $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ を表わす，というように考えて良い．何故ならば，ξ 軸まわりの遠心力の成分中，$m(\Omega\cos\phi)^2\zeta$ の成分のほうは，それを最初から省略しているからである．

上記の $\Omega^2\cos^2\phi$ に乗ぜられている 1/2 の定係数は，$m(\Omega\cos\phi)^2\cdot\eta$ の遠心力のうちでそれの半分が，振り子の周期に影響することを示す．その原因は Ω^4 の項を省略して，近似計算を実施したことにある．このことを更に明確に示すためには次のように，振り子の設置場所が赤道上の地表点であるような，特殊な場合について考えて見れば良い．

すなわち，(59) 式でいま $\phi=0$ とおいて，赤道上に設置された振り子の場合を考えると，p と q の値は

$$p=q=\sqrt{g/l-\Omega^2/2}\qquad\cdots\cdots(60)$$

となり，ξ 軸方向，および η 軸方向それぞれの振動に対して，ξ 軸まわりの遠心力の半分が，影響を及ぼしていることがわかる．ところで，この (60) 式では p のみならず，q の中にも Ω^2 が含まれるが，実際にはこの q がその中に Ω^2 を含んでいると，具合いが悪くなる．何となれば，前記の (48) 式でわかるように，赤道上に設置された振り子に対しては，p と q の値が

$$p=\sqrt{g/l-\Omega^2},\ \ q=\sqrt{g/l}\qquad\cdots\cdots(60')$$

でなくてはならない，という理由からである．したがって，p はその中に Ω^2 を含んでいても差し支えないが，q の値にはその中に Ω^2 が含まれてはいけないことになる．

この q の値がその中に Ω^2 を含まない具体的な原因は，赤道上では η 軸まわりの遠心力が地表で存在しないためであり，それは Ω^2 の項を $\Omega^2\fallingdotseq0$ と，近似的においたこととは根本的に異なる．よって，(60) 式のように q の値に Ω^2 の項が含まれては，不合理をきたす．このことについては，(48) 式のすぐ下でも，すでに述べておいた．このように，(60) 式はその中に不合理性を含むが(60) 式は (59) 式から得られたものであった．これはとりも直さず，(59) 式がその中に不合理性を含んでいる，ということを意味する．

そこで，このような不合理点を (59) 式から排除するためには，(41) 式でいま実施した $\Omega^4\fallingdotseq0$ の最初の近似仮定のほかに，(59) 式では更に別個な，近似計算上の追加仮定が必要となる．ところが，この場合

$$\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\pm\omega\right)^2\gg\frac{1}{2}\Omega^2\cos^2\phi\qquad\cdots\cdots(61)$$

であることは明白であり，振り子の運動に及ぼす $\Omega^2\cdot\cos^2\phi$ の影響は，それが完全に無視できることになる．その結果，必然的に

$$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq0\qquad\cdots\cdots(62)$$

としても差し支えない．これは (20′) 式と一致し，この関係は (57′) 式を表わすが，それは結局 (57) 式を意味している．

しかも，上記の (62) 式の関係によれば，赤道上に設置された振り子の場合，q の値にはその中に Ω^2 が含まれず，合理的になっている．すなわち，(59) 式へ (62) 式の関係を代入して見ると，p と q の値が

$$p=\sqrt{g/l}+\omega,\ \ q=\sqrt{g/l}-\omega$$

となり，これらは (51) 式と一致する．本式で ω は $\Omega\sin\phi$ であるから，$\phi=0$ の赤道上では $q=\sqrt{g/l}$ となり，q はその中に Ω^2 を含まないことがわかる．一方で，このときは p の中からも Ω^2 が消失してしまうので，不合理がおきたかの如く見える．しかし，そうではなくて，それは (60′) 式で言えば，その中で Ω^2 の項を

$$\Omega^2=[\Omega^2\cos^2\phi]_{\phi=0}\fallingdotseq0$$

と見なし，(62) 式の仮定を適用したと考えれば，p の値は合理性を持つ．このことに関しては，(51) 式のすぐ下でも，すでにそこで述べておいた．

このように，(62) 式の追加仮定によりはじめて，(59) 式つまり (41) 式が合理性を持つ．ただし，$\phi=\pi/2$ となる極地点においては，(62) 式で $\Omega\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ とおいたとしても $[\cos^2\phi]_{\phi=\pi/2}=0$ となるゆえ，(62) 式は極地点では正確に成立し，それは近似仮定ではない．よって，(62) 式の仮定は極地点を除外したその他の地表点で，それを近似仮定として適用すれば良い．なお，(62) 式の関係を得るに際しては，$\Omega^4\fallingdotseq0$ が仮定として使用されてはおるが，そこでは決して $\Omega^2\fallingdotseq0$ を仮定する必要は全くない．

以上のようにして，(57) 式の妥当性が，理論的に確認できる．ところが，この (57) 式は第1報で設定した仮定 (32′) 式と，全く同じものであった．したが

って，第1報の第7章でその末尾に追記しておいたように，そこで設定した（32′）式の仮定に対しては，それの妥当性が理論的に証明できたことになる．

結論として，地表に設置された振り子の運動に，地球の自転現象が及ぼす影響を，見掛けの重力も含めて更にそれ以外のものまで求めるためには，次のようにすれば良い．すなわち，支点軸まわりの角速度成分 $\Omega\sin\phi$ については，それを4乗した $\Omega^4\sin^4\phi$ を無視し，また支点軸に垂直な地表南北軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ については，それを2乗した $\Omega^2\cos^2\phi$ を無視すれば良い．

このことをわかり易く言い替えると，重力の作用のもとに地表で振動する振り子の場合，それの運動を求めるに際しては，振り子の運動に附随して発生する遠心力のうちで，地表鉛直軸まわりの遠心力は必ず考慮する必要がある．けれども，地表南北軸まわりの遠心力については，それを無視しても差し支えない，という結論になる．つまり，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ として良いが，$\Omega^2\sin^2\phi\not\fallingdotseq 0$ とすべきである．

このような見地に立脚して振り子の運動方程式を作製すれば，その中には現実的な立場から見て，ほぼ完全に地球自転の影響が含まれたことになる．そのとき得られる運動方程式が（2）式すなわち（2′）式であり，本論文ではそれを「地球自転振り子の運動方程式」と呼んだ．それがすなわち，次の

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\sin^2\phi\right)\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(62')$$

の形をした運動方程式であった．この（62′）式を求めるに当たっては，$\Omega^4\fallingdotseq 0$ と $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定が使用されているだけであって，そこでは $\Omega^2\fallingdotseq 0$ の仮定は全く使用されていない．ただし，このことが言えるのは，（14）式を利用して（62′）式を導いた場合に限定され，この場合は支点軸の回転速度が微小値でなくてはならない．

しかしながら，（62′）式は（14）式を利用しなくても，それを求めることができる．すなわち，旋回クレーンつり荷重の運動を表わす（1）式を利用しても，それを導くことができた．[1] この（1）式を利用した場合には，$\Omega\sin\phi$ がクレーンの旋回角速度 ω に該当し，そこではまた $\Omega^2\cos^2\phi=0$ とすべきであるため，（62′）式の $\Omega\sin\phi=\omega$ は任意の値を採る．この結果，（62′）式は支点軸回転速度の大小とは無関係に，それを使用しても差し支えないことがわかる．

10. フーコー振り子の在来形運動方程式

第1報でも述べたように，従来は次の形の式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}-2(\Omega\sin\phi)\frac{d\eta}{dt}+\frac{g}{l}\xi=0\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+2(\Omega\sin\phi)\frac{d\xi}{dt}+\frac{g}{l}\eta=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(63)$$

の解が，（12）式すなわち（13）式であるとされてきた．本報告書では（12）式や（13）式のことを，在来軌道式と呼んだ．（63）式は（2）式，つまり（62′）式で $\Omega^2\sin^2\phi\fallingdotseq 0$ とおけば直ちに得られる．しかしながら，繰り返し述べてきたように，（12）式や（13）式を（63）式に代入して見ると，これら（12）式や（13）式は（63）式を厳密には満足していない，ということが容易にわかる．

（63）式が有名なフーコー振り子に対する運動方程式の在来形である．[2),3),4)] 本報告書ではそれを「フーコー方程式」と略称した．[1] そしてここではまた，（1）式のクレーンつり荷重の運動方程式で $r_0=0$ とおき，その結果を利用して，（63）式のフーコー方程式が求められている．これは旋回クレーンつり荷重とフーコー振り子との両者の運動が，同一方程式で取り扱い得る，ということを示す．ただしこの場合は，$\Omega\sin\phi$ がクレーンの旋回角速度 ω に該当するために，$\Omega\sin\phi=\omega$ の値は任意の値を採ると考えなければならない．

しかし，フーコー振り子をクレーンつり荷重とは区別して，それを別個に取り扱いたい時には，次のようにして（63）式を求めれば良い．すなわち，第1報記載の（26）式から（14）式を導き，この（14）式の第2式で $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ とおいて（2）式を求め，次にこの（2）式でさらに $\Omega^2\sin^2\phi\fallingdotseq 0$ とおいて，（63）式を求めると良い．したがって，この場合は $\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定に加えて，さらに $\Omega^2\sin^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定が，重ねて使用されなければならない．

（14）式を利用して（63）式を求めると言ったこのような考え方は，（15）式の関係から判断すれば，結局のところ $\Omega^2\fallingdotseq 0$ と考えていることには間違いない．けれども，（63）式の運動方程式については，それが（1）式を利用しても得られるものであり，その時は $\Omega\sin\phi$ の値が微小値である必要はなかった．したがって，（63）式に対しては，それの誘導経過がわかる

ようにしておかないと，それが単独の独立した運動方程式であるとは見なせないことになる．そのために (63) 式に対しては，必ず

$$\sqrt{g/l} \gg \Omega \sin \phi, \text{ すなわち } n^2 \gg 1 \qquad \cdots\cdots(63')$$

の付帯条件を連立させせなければならない．その理由としては，さらに以下のことが考えられる．

通常一般の振り子で n の値は，(6) 式の $g/l=n^2 \cdot (\Omega \sin \phi)^2$ の関係から得られるものであるが，この場合 $\Omega \sin \phi$ の値は，振り子の設置点により定数値を採るにしても，g/l の値は各振り子に対して変動し，それらはそれぞれ異なる値を採る．したがって，n の値はもともと変数と考えるべきものであり，元来それは $0 \leqq n \leqq \infty$ の値を採るべき性質のものである．

このように n が変動値であるとすれば，n の値が極端に小さくなった場合も，理論上では想定しておかねばならない．しかし，n の値が小さくなり，(63′) 式の条件がくずれる時には，(63) 式の厳密解は合理的な結果を与えないことになる．このことは (63) 式の場合，それの厳密解が容易に得られるのにもかかわらず，得られたこの厳密解の表現式がそのままの形では採用されていない，ということによって充分了解できる．つまり，従来の計算手順によれば，(63) 式の厳密解に対しては，それに (63′) 式の連立条件を適用した時にのみ，その結果が (12) 式の在来軌道式と一致する．

ところが，第1報で述べたように在来軌道式では，$\Omega \sin \phi$ の値が任意の値であっても差し支えないわけであり，この在来軌道式の場合，$\Omega^2 \fallingdotseq 0$ である必要は全くない．つまり，$0 \leqq \Omega \leqq \infty$ でも良い．したがって，従来の計算手順によれば，それが次のような経緯をたどっていることになる．すなわち，そこではまず最初に，(14) 式で $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ を仮定して (63) 式の基礎方程式を求め，次にこの (63) 式の厳密解に再度 $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ を代入し，最終的な解として，$\Omega^2 \fallingdotseq 0$ とは全く関係のない在来軌道式を求める，といった経緯をたどることになる．最初に $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ の仮定をしておきながら，最終的には $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ の条件を必要としない結果が得られる，といったこのような計算経緯には，いささか理解しにくい点がある．

しかし，最終結果としては (12) 式の在来軌道式を得ているのであるから，従来の計算手順は計算技巧の面からすれば，それは成功している．このことを可能ならしめるものが，(63′) 式の連立条件であり，それは (63) 式の適用範囲を限定するものとなる．ただし，それは決して，在来軌道式の合理性を否定するものではない．何故ならば，在来軌道式の適用範囲の中には，当然 $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ の場合も含まれているからである．

このように，(63) 式のフーコー方程式に対しては，(63′) 式の連立条件を必要とするが，これは (63) 式の持つ難点の一つであると考える．それに反し，(2) 式すなわち (62′) 式に対しては，$\Omega \sin \phi$ の値が任意の値であっても差し支えない．この結果，(63′) 式のような連立条件なしでも，(2) 式つまり (62′) 式はそれ自身，単独でも成立する方程式となっている．

11. 静止座標系におけるフーコー方程式

前章では，(63) 式のフーコー方程式が持つ難点として，それの適用範囲が Ω の値の小さい場合にのみ，限定されていることを述べた．しかしながら，この (63) 式に対しては，もう一つの決定的な難点が考えられる．そのことを説明するために，本章では (63) 式の相対運動方程式を，静止座標 x, y で表現して見る．

すなわち，(17) 式を (63) 式に代入して，静止座標系における絶対運動方程式を求めて見ると，それは

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}+\omega^2\right)x=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}+\omega^2\right)y=0 \qquad \cdots\cdots(64)$$

の形となり，これは実質的には (63) 式の運動方程式と，全く等価な同じ内容のものを表わす．ただし，ここでは $\Omega \sin \phi=\omega$ とおいた．この (64) 式の絶対運動方程式と (63) 式の相対運動方程式との等価性は，逆に (16) 式を (64) 式に代入すれば (63) 式が得られる，という事実によって容易に確認できる．

ところが，この (64) 式はその中に，$\omega(=\Omega \sin \phi)$ を含んでおり，絶対静止の空間で振り子を振らしたのにもかかわらず，それの運動には座標軸の回転が影響している．つまり，支点軸の回転速度 ω が影響することになる．これは支点軸の回転など，座標軸の運動がいっさい存在し得ないはずの，静止座標系という大前提に反し，明らかに不合理である．

しかも，(64) 式の場合には，座標軸そのものの運動は存在し得ないのであるから，$\omega^2=\Omega^2 \sin^2 \phi$ が小さいから無視すれば良い，といった性質のものでもない．さらになお，(64) 式から得られる振り子の周期 τ_1''' は

$$\tau_1'''=2\pi/\sqrt{g/l+\omega^2}$$

の形を採り，この値は無減衰の振動周期 $\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ とは異なるため，これまた不合理をきたす．

これらに加えて，(64) 式の左辺でその中の ω^2x, および ω^2y の項を考えて見ると，それらは加速度の形をしているとは言え，この場合は正の符号を持つので，それらが遠心力を表わす性格の求心加速度に該当する，といった考え方をするわけにもいかない．何故ならば，前記の (19) 式のところでも述べたことではあるが，求心加速度はこの場合，必ず負の符号を持たなければならない，という理由からである．この結果，(64) 式の場合の ω^2x と ω^2y の項に対しては，それの持つ物理的な意義を，具体的に解釈することが不可能となり，不都合をきたす．

いま述べてきた矛盾点や不都合点を，(64) 式から排除するためには，(64) 式で ω を除去すれば良い．つまり，(64) 式では

$$\omega^2x=0,\quad \omega^2y=0 \qquad \cdots\cdots(65)$$

と断定的なおき方をせざるを得ない．ところが，ここで考えているものは振り子の運動状態であるから，$x\fallingdotseq 0$, $y\fallingdotseq 0$ であることは明白である．よって，この (65) 式は結局のところ，それのかわりに

$$\omega^2=0 \qquad \cdots\cdots(65')$$

とすれば良いことがわかる．この (65′) 式のようにおいた時にはじめて，(64) 式が静止座標系の定義と矛盾しないことになる．このときは，静止空間の前提に立脚しているゆえに，ここではそれを近似的に $\omega^2\fallingdotseq 0$ とおいて，座標軸回転の存在をゆるすわけにもいかない．

だからと言って，(65′) 式のようにおいた場合には，必然的に $\omega=\Omega\sin\phi=0$ となり，赤道上を除けば $\sin\phi\fallingdotseq 0$ であるから，$\Omega=0$ が得られる．これは地球の自転そのものを否定することになり，それは回転座標系における (63) 式の相対運動方程式で，それ自身の根底をくつがえすことになるので，不合理をきたす．それはまた，(63) 式でその左辺第2項に存在するコリオリの力も，同時に省略することになり，非常に具合いが悪い．何故ならば，(63) 式でコリオリの力を省略してしまえば，振り子振動面の回転が説明できなくなるからである．

12. フーコー方程式と地球自転の振り子方程式

前章で述べたことからわかるように，(64) 式の矛盾点を排除するためには，(65′) 式のような断定的な条件が絶対に必要となる．ところがここで，この (65′) 式の条件を設定すると，こんどは (63) 式自身の根底がくずれる，と言った自己矛盾に到達する．

これらのことは，フーコー方程式が実用的な面は別にして，その表面的な形式面では，その中に大きな理論的矛盾点を含む，ということを示すものと考える．このことが第1報の第4章で，その末尾に「フーコー方程式はその中に，大きな理論的矛盾点を含んでいるようである」と述べた理由である．[1]

これに反して，第1報で (59) 式として示しておいた絶対運動方程式は，(2) 式つまり (62′) 式から得られるものであるが，それは

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y=0 \qquad \cdots\cdots(66)$$

の形で表わされ，これらの中には重力加速度 g のみが含まれており，合理的な結果になっていた．[1] 本式から得られる振り子の周期は $\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ の無減衰周期とも一致している．

なお，前に第4章の後半でも述べたように，Newton の運動法則そのものが，絶対静止の座標空間をその根底においているものである以上，座標変換によって (63) 式のような回転座標における運動方程式を得る際には，あくまでも (64) 式から出発してそれを求めるのが本筋と考える．ただし，もちろん (64) 式が ω^2 を含んでいてはいけないのであるから，その時は (66) 式から出発しなければならない．

そこでこの考え方に従って，(66) 式を回転座標における相対運動方程式に変換すると，その結果は Ω^2 の項を含まない (63) 式とは一致せず，これまで再三述べてきたように，それは Ω^2 の項をその中に明りょうに含む (2) 式，すなわち (62′) 式と一致してしまう．これは結局，フーコー振り子の場合，振り子の運動に附随して発生する支点軸まわりの遠心力は小さいので，それを無視しても差し支えないと，方程式を簡単化しては具合いが悪い，ということを示すものと考える．

次にまた，(62′) 式つまり (2) 式を採用することに対しては，「フーコー振り子の場合には，Ω^2 の項を無視しているので，Ω^2 の項の当否を論ずる必要はない」と言った批判が聞かれる．しかしながら，(14) 式においてその中で，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ ではあるが $\Omega^2\fallingdotseq 0$ である，とおいた時に得られるものが (2) 式であった．したがってそこでは，$\Omega^2\fallingdotseq 0$ といった単純なおき方が

なされている，ということとは根本的に異なっており，それは (2) 式の場合，$\Omega^2\fallingdotseq 0$ と言った形の仮定が必要でない，ということを示す．この結果，(2) 式を採用することが微小項 Ω^2 の項の当否を論じている，ということには当たらないと考えられる．

13. フーコー方程式の厳密解

この第2報においては，(14) 式の改修形方程式とそれの一般解について述べ，この改修形方程式から在来軌道式を得るためには，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定を一度使用するだけで良い，ということを説明してきた．ここでは，改修形方程式からフーコー方程式の在来形 (63) 式を求め，次にこの (63) 式により在来軌道式を得る計算手順を示すことにする．すなわち，(63) 式を解く場合には，$\Omega^2\fallingdotseq 0$ の仮定が二度にわたって使用されている，という第10章の後半で述べた概略説明を，具体的にここでは明示することにする．

まず，一度目の仮定として (14) 式へ $\Omega^2\fallingdotseq 0$ を適用すれば，(63) 式のフーコー方程式を得る．そこでこの (63) 式の一般解を求めるわけであるが，それは次のようにすれば良いとされている．[5] いま，(63) 式の第2式に $i=\sqrt{-1}$ をかけて，それを第1式に加え，さらに (3′) 式にならって $Z'=\xi+i\eta$ とおけば，前記の (63) 式は

$$\frac{d^2Z'}{dt^2}+2i\,\omega\frac{dZ'}{dt}+n^2\omega^2Z'=0 \qquad \cdots\cdots(67)$$

となる．ただし，$\omega=\Omega\sin\phi$ であり，そしてこの (67) 式では，(6) 式の $g/l=n^2\omega^2$ の関係を使用して，その左辺第3項の g/l のところを，$n^2\omega^2$ でおき替え，(7) 式になぞらえておいた．

そこで，$Z'=e^{\lambda t}$ を仮定して (67) 式に代入すると，それの特性方程式は

$$\lambda^2+2i\,\omega\lambda+n^2\omega^2=0$$

となり，これから

$$\lambda_1=i(\sqrt{n^2+1}-1)\omega,\quad \lambda_2=-i(\sqrt{n^2+1}+1)\omega$$

の2根が得られる．よって，(67) 式の一般解として

$$Z'=Z_0'e^{-i\omega t} \qquad \cdots\cdots(68)$$

を得る．ただし，ここで

$$Z_0'=Ae^{i\sqrt{n^2+1}\cdot\omega t}+Be^{-i\sqrt{n^2+1}\cdot\omega t} \qquad \cdots\cdots(69)$$

であって，(68) 式が (63) 式の一般解となる．このようにして，(63) 式の厳密解は容易に得られるとされている．[5]

上記の (68) 式でその中の積分定数 A, B を，(10) 式の初期条件を使用して決定して見ると，振り子の運動軌道が持つ外円の半径 ρ_2' は

$$\rho_2'=\delta_0 \qquad \cdots\cdots(70)$$

となり，これは問題がない．しかし，内円の半径 ρ_1' は

$$\begin{aligned}\rho_1'&=\delta_0/\sqrt{n^2+1}\\&=\delta_0(\Omega\sin\phi)\sqrt{l/g}/\sqrt{1+(\Omega\sin\phi)^2/(g/l)}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(70')$$

となって，これは (13′) 式の値とは一致しない．そこで (63′) 式の連立条件を適用する必要がおこる．この連立条件を (70′) 式に適用した結果は $\rho_1'=\delta_0/\sqrt{n^2+1}\fallingdotseq\delta_0/n$ となり，それが (13′) 式に一致することを知る．

さて次に，(6) 式によれば $n=\sqrt{g/l}/(\Omega\sin\phi)$ であったから，ここで基礎においた (63) 式の運動方程式では，Ω^2 が省略されたのにもかかわらず，それの一般解 (68) 式には Ω^2 が出現している．そのためここで，再度 $\Omega^2\fallingdotseq 0$ の仮定，つまり $n^2\gg 1$ の仮定 (63′) 式を，(68) 式に適用すると，それは

$$Z'=(Ae^{in\omega t}+Be^{-in\omega t})e^{-i\omega t} \qquad \cdots\cdots(71)$$

となり，本式は (8) 式の在来軌道式と一致する．

以上が (14) 式から在来軌道式を得る従来の計算手順であり，その場合わかることは，$\Omega^2\fallingdotseq 0$ の仮定が二度にわたって使用されていることである．Ω^2 は (15) 式によれば，$\Omega^2=\Omega^2\cos^2\phi+\Omega^2\sin^2\phi$ で表わされる．よって，(63) 式のすぐ下でも述べておいたように，この $\Omega^2\fallingdotseq 0$ の仮定を二度にわたって使用することは結局，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定に追加して，さらに $\Omega^2\sin^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定が引き続いて使用された，ということを意味する．これは (63) 式を基礎方程式に採用したためである．けれども，もしも (2) 式を基礎方程式に採用したとすれば，$\Omega^2\cos^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定のみを使用するだけで在来軌道式がただちに得られ，そこでは $\Omega^2\cdot\sin^2\phi\fallingdotseq 0$ の仮定を使用する必要がおこらない．

ところで，一般にある物理系の運動を支配する基礎方程式で，その中から一つの力を省略した場合，それの運動にはいま省略した力は影響しないはず，と考えるのが合理的である．したがって，(63) 式の解には，コリオリの力に該当する Ω は出現しても良いが，Ω^2 の項は解の中に現われないと解釈すべきである．ただし，ここで Ω^2 は遠心力を表わすと見なして良い．

しかしながら，(69) 式でもわかるように，(63) 式を基礎方程式とした場合，それの中で Ω^2 が省略されたのに，この (63) 式の解には n^2 の形で Ω^2 が現わ

れている．このようなことが起るのは（63）式を理論面で見たとき，それの妥当性が一部欠けているせいではないかと考えられる．このために第10章では，（63）式から在来軌道式を求める計算経緯には，理解しにくい点があると述べておいた．これに引き替え，（2）式の解である（71）式には，Ω^2 が含まれないことになるが，このことについては，振り子の周期に及ぼすコリオリの力の影響を，（2）式ではそれの左辺第3項に含まれる遠心力が打ち消してしまうためである，と言った考え方をすれば了解できる．よって，（71）式がその中に Ω^2 の項を含まないからと言って，それが（2）式の妥当性をそこなう，ということにはならないと考える．

なお，（68）式によれば，振り子の振動面は，$-\omega$ の角速度で回転することがわかる．ところが，（63）式の運動方程式で ω を含む唯一の項は，その左辺第2項に存在するコリオリの力のみである．したがって，振り子振動面の回転を発現する原因はコリオリの力にある，ということを（68）式が明確に示している．

また，（71）式の積分定数 A と B を，初期条件（10）式によって決定したものが，（13）式にほかならない．この結果，地表に設置される振り子では，無減衰の工夫さえ施しておけば，どのような振り子を使用した場合であっても，それにより振り子振動面の回転現象は検知できる，という見透しが得られる．しかし，現実にはつり糸の長さ l は大きいほうが良く，$l \fallingdotseq 19(m)$ ぐらいの長さであっても，振り子が次第に楕円運動を呈するようになるために，振り子支点の支持装置の製作には，特別な工夫が必要であるとされている．[5] 次に振り子の重さをできるだけ大にすることが，楕円運動を防止する上に，大きな役割を演ずるものと考える．

14. 連立条件（63′）式および虚数抵抗

第10章ではフーコー方程式の在来形（63）式に対しては，（63′）式の連立条件が必要であることを述べた．この（63′）式の条件はそれを具体的に言い換えると，支点軸の回転速度が微小でなくてはならない，ということを意味する．したがって，支点軸が回転する模型装置により，振り子の室内実験を実施する場合などには，（63′）式を連立させないと（63）式が使用できなくなる．しかしながら，フーコー振り子ではいずれにしろ，支点軸の回転は微小であり，（63′）式の条件を格別に必要としない，というようにも考えられる．

ところが実際には，（71）式のすぐ下で述べておいたように，もしも（63）式を使用しないで（2）式を使用したとすれば，ただちに在来軌道式が得られる．それにもかかわらず，従来は（63）式を使用し，それの厳密解を求め，この厳密解にわざわざ $\Omega^2 \fallingdotseq 0$ の仮定，つまり $n^2 \gg 1$ の（63′）式の条件を適用して在来軌道式を得る，といった少しまわりくどい手順が採用されている．このように，基礎方程式とそれの解へ，同じ仮定を二度にわたってその都度使用している計算手順には，いささか不自然さがあり，このことが（63）式に対しては，（63′）式の連立条件が付帯的に必要である，と述べた特別の理由となっている．

それに加えて，この（63′）式の連立条件を必要とする理由には，さらに次のものも考えられる．すなわち，（63）式をそれの誘導過程を抜きにして，それを単独の独立な方程式と見た場合，n が変数であるために，この n は $n \fallingdotseq 1$，もしくは $n<1$ の値の時にも，それの適用が可能であることがのぞましい．ここで，n の値が小さくなり，$n \fallingdotseq 1$ もしくは $n<1$ となることは，支点軸の回転が早くなった場合を意味する．

このように支点軸の回転が早くなれば，振り子に働く遠心力も大となり，振り子は初期変位 δ_0 を半径とする円に対し，それの外側で運動することもあり得る，と想定するのが合理的である．実際に（13′）式によれば，$n \leqq 1$ の場合に対しては $\rho_1 \geqq \rho_2$ となって，振り子は $\rho_2=\delta_0$ を半径とする円の外側のみで運動しておる．これは遠心力が大きくなったことを示し，合理的な結果となっている．このことは，$n=1$ を境にして $n<1$ の場合には，内円と外円が逆転する，ということを意味する．

ところが，これとは反対に（70）式と（70′）式によれば，n の値のいかんにかかわらず $\rho_2' \geqq \rho_1'$ となり，遠心力が大きくなった $n \leqq 1$ の場合でも相変らず，振り子の運動軌道は常に，半径 $\rho_2'(=\delta_0)$ の円の内側だけに存在し，不合理をきたす．このような不合理を（70′）式から排除するものが，（63′）式の連立条件にほかならない．

なお，（2）式に対しては，（63′）式のような $n^2 \gg 1$ の連立条件を必要とせず，（2）式は支点軸の回転速度の大小とは，全く無関係に使用できる．したがって，（63′）式の条件は，支点軸の回転が小さい場合にのみ（63）式が使用できる，ということを明示するものであり，それは（63）式の適用範囲を規定するものである．

しかし，地表で実際に使用される振り子に対しては，

(63′) 式の条件が自動的に満足されている．ちなみにここで，通常一般の振り子について，参考のために n の値を算定し，$n^2 \gg 1$ の関係が成立していることを示しておく．n の値は (6) 式により $n=\sqrt{g/l}/(\Omega \sin\phi)$ で表わされるので，これは $\sqrt{l}\,(\Omega \sin\phi)$ に逆比例している．したがって，$\sin\phi=1$ とおき，かつ l の長さとしては実現可能な最大長の値を用いると，その時の n は最小値 $n_{\min}$ を表わすと考えて良い．

フーコーがその有名な実験で採用した振り子の長さ l は，$l \fallingdotseq 67$(m) であったとされている．[6] また，ソ連のレニングラードの聖イサック寺院のものは，$l \fallingdotseq 90$ (m) とされている．[5] これらは現実面で予想される振り子長さとしては，最大長のものに属する．そこでいま，$l=100$(m) と $\Omega=7.292\times10^{-5}$(rad/sec) の値を使用して見ると，$n_{\min}$ の値は

$$n_{\min}=\sqrt{g}/(\sqrt{l}\cdot\Omega\sin\phi)$$
$$=\sqrt{9.8}/(\sqrt{100}\times7.292\times10^{-5})$$
$$\fallingdotseq 4300 \gg 1$$
$$\therefore\quad n^2{}_{\min}=1.85\times10^7 \gg 1$$

となり，現実面ではすべての振り子に対して，$\sqrt{n^2+1} \fallingdotseq n$ としても良いことがわかる．

次に第1報の第5章では，その末尾に「通常の振り子運動に対する減衰現象というものは，$\tau_2=i\,2\pi/\mu$ の虚の周期を持った回転運動に相当する」と述べておいた．[1] このことについて，さらに具体的に説明すると，以下のようになる．すなわち，(67) 式によれば，その第2項に存在するコリオリの力は，虚数 i を含むため，それは虚数抵抗に相当する．そこでいま

$i\omega=\mu$，すなわち $\omega=\mu/i=\mu/\sqrt{-1}$

とおいて，μ を実数値の抵抗係数と見なせば，(68) 式は

$$Z'=(Ae^{i\sqrt{g/l-\mu^2}\cdot t}+Be^{-i\sqrt{g/l-\mu^2}\cdot t})e^{-\mu t} \quad\cdots\cdots(72)$$

となり，これは通常の減衰振動を表わす．何故ならば，この (72) 式は次の減衰自由振動方程式

$$\frac{d^2Z'}{dt^2}+2\mu\frac{dZ'}{dt}+\frac{g}{l}Z'=0 \quad\cdots\cdots(73)$$

の解になっている，という理由からである．(73) 式は (67) 式で，その左辺第2項の係数 $i\omega$ を，μ でおき替えたものにすぎない．また，(72) 式によれば，振り子の小振動に対する周期 τ_3 は

$$\tau_3=2\pi/\sqrt{g/l-\mu^2} \quad\cdots\cdots(74)$$

の形で表わされる．

このような解釈は振動系の運動方程式が，その中にコリオリの力を含む場合には，常に成立すると見て良い．したがって，(2) 式に対しても同様なことが言えるが，ただ，その時は振り子の小振動周期は，(71) 式でもわかるように，無減衰時の値 $\tau_1=2\pi/\sqrt{g/l}$ のままで残る．この原因は前章で述べたように，コリオリの力と遠心力との相殺作用にあると考えられる．

15. 旋回クレーンつり荷重と地球自転振り子

本論文をしめくくる前に，旋回ジブクレーンつり荷重と地球自転振り子との，対応関係についてさらにここで，補足説明を述べておく．いま，旋回ジブクレーンつり荷重の運動で，クレーンの旋回速度を ω_0 の新記号で表わすことにし，ジブ半径 r_0 を $r_0=0$ とおけば，支点軸の回転角速度は $\omega_0+\Omega\sin\phi$ となる．そのため，(61) 式は

$$\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\pm(\omega_0+\Omega\sin\phi)\right]^2 \gg \frac{1}{2}\Omega^2\cos^2\phi \quad\cdots\cdots(75)$$

で表わされる．ただし，クレーンの旋回速度 ω_0 の方向と，地球自転による支点軸の回転速度 $\Omega\sin\phi$ の方向とは，いずれも同じ向きを持つと仮定した．

さてここで，改めて

$$\omega_0 \gg \Omega\sin\phi \quad\cdots\cdots(76)$$

と考えれば，それは地球の自転現象をすべて無視して，$\Omega=0$ とおいた場合に当たる．

このときの旋回クレーンつり荷重の運動は，支点軸が ω_0 の自転速度を持つ振り子運動に，そのまま対応することになる．したがって，地球自転の振り子に対する実験装置としては，旋回ジブクレーンの模型で $r_0=0$ とおいた形式のものが，採用されなければならない．

そこでいま，振り子の振動面が絶対空間では，一定方向を保持するといった性質を，模型実験により示す目的で，振り子の運動軌道を投影するための，水平回転円板を作ったとする．この場合，もしも円板外の地面にジブ付ポストを固定して，円板のみを回転させたとしても，そこでは振り子支点軸の回転が存在しないのであるから，振り子にはコリオリの力が作用しないことになる．

したがって，ジブ付ポストは回転円板の上にのせて固定し，それを円板とともに回転させる必要がある．しかもこのとき，振り子支点軸と円板の回転軸とは，同じ鉛直線上に一致している必要がおこる．このようにしてはじめて，$r_0=0$ となり，振り子の運動にはコ

リオリの力が作用し，振り子の運動方程式も（62′）式，つまり（2）式で表わされることになる．

このように $r_0 \fallingdotseq 0$ とした場合でも，振り子の振動模様は可能な限り，単振り子の様子に接近していなければならない．そのためには，第1報でも述べたように，つり糸の長さを短くすれば良い．[1] しかし，そればかりではなく，水平円板の回転数もまた振り子の振動数にくらべて，できるだけ小さな値にする必要がある．何故ならば，振り子の初期条件は（10）式でなければならないからである．ところが，それをいま実験がし易いように，最初に振り子へ振動を与えておき，そのあとで水平円板を回転させたとする．そうすれば，その時の初期条件は第1報記載の（63′）式となる．この（63′）式は，本報告書に記した（10）式とは一致していないので，具合いが悪い．

すなわち，第1報の（63′）式は，その中の ω をここでいま ω_0 におき替えて，それを示すと

$$[\xi]_{t=0}=0,\ [d\xi/dt]_{t=0}=\omega_0\delta_0;\ [\eta]_{t=0}=\delta_0,\ [d\eta/dt]_{t=0}=0 \qquad \cdots\cdots(77)$$

の形であった．[1] 本式によれば，その中で第2番目の条件を，$[d\xi/dt]_{t=0}=0$ に変更した時にのみ，初期条件が（10）式と一致する．よって，もし水平円板の回転速度 ω_0 を微小値に押えたとすれば，そのときは $[d\xi/dt]_{t=0}=\omega_0\delta_0 \fallingdotseq 0$ が実現されて，初期条件としても（10）式に接近することになる．（77）式の初期条件に対する運動軌道については，第6章の末尾に述べておいた．

次にもしも，振り子の支点軸と円板の回転軸が一致していなければ，$r_0 \not\fallingdotseq 0$ となり，その場合の実験装置としては，それが旋回ジブクレーンつり荷重の実験装置と，本質的には全く同じものになってしまう．したがってそのとき，振り子の運動方程式は（1）式で表わされる．ただし，このときの r_0 は，円板の回転軸から振り子支点までの，水平距離を意味する．

r_0 を大とし，かつ水平円板の回転数も大とした場合には，つり荷重の運動はその様子が，単振り子とは随分とちがったものになる．[7] このため，振り子振動面の定方向保持性を，視覚的にとらえることが困難である．

このように，旋回クレーンつり荷重と地表で自由に振らせた振り子とは，全く同質の振り子に属するものであり，これが本論文の題目を「旋回ジブクレーンつり荷重と地球自転の振り子」としたゆえんとなっている．この旋回ジブクレーンのつり荷重と，地球自転振り子との対応関係については，以前に旋回クレーンつり荷重の運動を求めた際，筆者がすでにそれを指摘しておいた．[8]

16. つり糸張力の近似値

以上述べてきたことからわかることは，旋回クレーンのつり荷重と地球自転の振り子とは，いずれも同じ種類の運動方程式によって，それら両者の運動が表わされる，ということであった．したがって，これら両者の運動には，お互いに共通点が存在する．

すなわち，振り子やつり荷重の重量は，それらの運動には全く関係しない．この原因は，それらの運動を決定づける最も大きな要因が初期条件にある，というところにある．たとえば，地表の振り子の最大ふれは，初期変位として与えられた δ_0 だけで，その大きさが決定される．これに対応して，支点軸線上に最初静止していた状態から，ジブによって振り回されたクレーンつり荷重の場合には，それの固有振動数 $\sqrt{g/l}/(2\pi)$ とジブ半径 r_0 およびクレーンの回転角速度 ω_0，これら三者によって，つり荷重の最大ふれが決定される．[8] ここで r_0 と ω_0 の積は，つり荷重の初期速度を表わす．

なお，本論文においては一貫して，振り子やつり荷重の鉛直方向の運動，つまり ζ 軸方向の運動を無視してきた．このことはつり糸の張力 T が，振り子やつり荷重の自重に大体等しいという近似仮定のもとに，それらの水平変位 ξ と η を求めた，ということを意味する．しかし，振り子やつり荷重の運動が，つり糸の張力 T に及ぼす影響を近似的に求めるためには，次のようにすれば良い．すなわち，第1報記載の（1）式で $\zeta \fallingdotseq -l$ および $d\omega/dt=0$ とおいたのち，この（1）式の第1式と第2式でその左辺へすぐ上で求めた ξ と η を代入して，右辺の T_ξ と T_η を求め，次につり糸張力の近似値 T_0 としては，$T_0=\sqrt{T_\xi{}^2+T_\eta{}^2+T_\zeta{}^2} \fallingdotseq \sqrt{T_\xi{}^2+T_\eta{}^2+(mg)^2}$ で算定すれば良い．[9] ただし，地球自転の振り子に対しては，更に $r_0=0$ とおかなければならない．

このようにして求めたつり糸の張力の近似値 T_0 で，それの最大値をいま T_{om} とおき，次にまた ζ 軸方向の運動を無視しないものとして，そのときの T の最大値を T_m とおけば，この場合は

$$T_{om}>T_m \qquad \cdots\cdots(78)$$

の関係になる．この $T_{om}>T_m$ を実際に示すためには，第1報記載の（1）式を非線形の形そのままで，電子

計算機を使用して解いて見れば良い．しかし，これらの計算は単なる計算技巧の問題に過ぎず，現場の設計技術者にとっては，興味の薄い内容のものになると考える．よって，それらの詳細計算については，今回は省略することにして，ここでは次のことだけを追記しておく．

つまり，つり荷重や振り子の運動が，つり糸の張力に及ぼす影響を求める場合には，それらの鉛直方向の運動を無視した時のほうが，つり糸の張力を過大評価したことになる．その結果，旋回クレーンやモビルクレーンの設計時において，クレーンの強度や転倒モーメントに，つり荷重の運動が及ぼす影響を求めるにあたっては，つり荷重の鉛直方向の運動を無視したほうが，安全側となる．

なお，筆者は1965年に (1) 式を提示した．[1),8)] ところが，その2年前の1963年に，Heinz Peeken[10)] が発表した旋回クレーンつり荷重の運動に関する論文を，最近になって入手した．Heinz Peeken は筆者と同様に，ジブ先端に座標原点を持つ回転座標系を使用して，つり荷重の相対運動方程式を求めているが，そこでは運動方程式を非線形のままにしておき，それを電子計算機により解いている．したがって，得られた結果を計算尺や手動計算機を利用して，設計者が簡単に使用するわけにはいかない．

しかしながら，この Peeken の得た運動方程式を簡略化して，それを線形方程式に変化していくと，最終的には (1) 式が得られる．論文に着手する以前の文献調査に，不充分のあったことを附記して本稿を終る．

17. 結　　言

旋回ジブクレーンのつり荷重の運動で，最も重要な役割をする力は，つり荷重の運動に附随して発生する支点軸まわりの遠心力である．地表に設置された振り子の場合でも，地球が自転角速度 Ω を持つ回転体であるために，振り子の運動に附随した支点軸まわりの遠心力が，それの運動に影響を及ぼす．

いま，長さ l のつり糸でつるされた質量 m の振り子の設置点を，北緯 ϕ 度の地表点であるとしたとき，この設置点に座標原点をおき，ζ 軸を鉛直上方に取り，かつ水平南向きに ξ 軸を，次に水平東向きに η 軸を取ったものとする．

このような座標系に対しては，支点軸まわりの角速度成分が $\Omega\sin\phi$ となる．この角速度成分によって，振り子には支点軸まわりの遠心力が，ξ 軸方向と η 軸方向に，それぞれ $m(\Omega\sin\phi)^2\xi$ および $m(\Omega\sin\phi)^2\eta$ の大きさで働く．第1報においては，振り子の運動方程式にこれらの遠心力を，必ず取り入れなければならないことを述べた．

ところが，地球の自転角速度 Ω は，ξ 軸まわりにも角速度成分 $\Omega\cos\phi$ を持つ．この角速度成分 $\Omega\cos\phi$ は，ζ 軸方向に $m(\Omega\cos\phi)^2\zeta$ の遠心力を生じ，かつ，それはまた η 軸方向にも，$m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ の遠心力を発生する．

これらのうち，前者の $m(\Omega\cos\phi)^2\zeta$ は見掛け上，振り子の重量を変化させるように働くが，振り子の鉛直方向の運動を無視した場合には，同時にそれも無視して良い．一方，後者の $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ の遠心力は，その大きさいかんによっては，それを振り子の運動方程式に取り入れなければならない．

この第2報は，ξ 軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ により，η 軸方向に生ずる遠心力 $m(\Omega\cos\phi)^2\eta$ は非常に小さく，振り子の運動を求める際には，それが無視できることを，理論的に示したものである．得られた結論をまとめると，次のようになる．

〔1〕 地表に設置された振り子の運動に，地球自転の現象が及ぼす影響を求めるに際しては，自転角速度 Ω の成分のうち，支点軸つまり，鉛直軸まわりの角速度成分 $\Omega\sin\phi$ については，それを4乗した $\Omega^4\sin^4\phi$ の項の影響は無視しても良いが，それを2乗した $\Omega^2\sin^2\phi$ の項は無視できない．つまり，振り子の運動に附随して発生する鉛直軸まわりの遠心力は，振り子の運動に影響する．

〔2〕 自転角速度 Ω の成分のうち，支点軸に垂直な地表南北軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ が，振り子の運動に及ぼす影響を求めるに際しては，それを2乗した $\Omega^2\cos^2\phi$ の項が無視できる．つまり，振り子の運動に附随した地表南北軸まわりの遠心力は，振り子の運動に影響しないと考えて良い．

〔3〕 地表南北軸まわりの角速度成分 $\Omega\cos\phi$ がつくる遠心力も考慮して，$\Omega^2\cos^2\phi$ の項を無視しない場合には，振り子の振動周期がその振り子の設置点により，ごく微小量だけそれぞれ異なった値を示す．すなわち，赤道上においては，南北方向に振らせた振り子の周期は $2\pi/\sqrt{g/l}$ の値を持ち，東西方向に振らした場合の周期は $2\pi/\sqrt{g/l-\Omega^2}$ の値を持つ．また，振り子を南北の両極地点に設置した場合には，その振動面の方向いかんにかかわらず，振動周期は常に $2\pi/$

$\sqrt{g/l}$ の一定値を持つ.

〔4〕 第1報で設定した（32′）式の仮定 $\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta \fallingdotseq 0$ の妥当性については，それを理論的に数式計算上で証明することが可能である.

〔5〕 フーコー振り子に対する在来形の運動方程式は，それ自身単独で成立するものではなく，この方程式に対しては $\sqrt{g/l} \gg \Omega \sin \phi$ の連立条件が必要である.

参 考 文 献

1) 富　武満： 旋回ジブクレーンつり荷重と地球自転の振り子（第1報，振り子の運動方程式とその運動軌道），鹿児島大学工学部研究報告，第21号，（昭54. 9）

2) 東京大学応用物理学教室編： 力学（東京大学基礎工学，3），p. 89，東京大学出版会，（1976. 2. 20，第11刷）

3) 清野節男・金山道雄： 力学要論，p. 95，東京図書(株)，（1963. 11. 30，発行）

4) 森口繁一： 初等力学， p. 205， 培風館，（昭41. 6. 10，初版第12刷）

5) 村内必典・浅沼俊夫： 国立科学博物館のフーコー振り子の構造と改良，自然科学と博物館， p. 277， Vol. 37，Nos. 11～12

6) 左藤喜正： 万有百科事典16（物理・数学）， p. 474，(株)小学館，（昭51. 4. 20，初版）

7) 富　武満・桜沢義邦： 旋回ジブクレーンつり荷重の運動，鹿児島大学工学部研究報告，第9号，（昭43. 3）

8) 富　武満： 旋回腕につるされた荷重（第1報，旋回中のつり荷重の運動），西部造船会会報， 第29号， （昭40. 2）

9) 富　武満： 旋回腕につるされた荷重（第2報，つり荷重の運動による旋回クレーンの転倒モーメント），西部造船会会報，第29号，（昭40. 2）

10) Heinz Peeken： Ein Beitrag zum Erfassen dynamischer Zusatzbeanspruchungsgrößen in Bagger-und Kranauslegern, VDI-Forschungsheft 497, Ausgabe B Band 29, 1963.