

旋回ジブクレーンつり荷重と

地球自転の振り子 (第1報)

—振り子の運動方程式とその運動軌道—

富 武 満

(受理 昭和54年5月31日)

THE FOUCAULT PENDULUM AND A SUSPENDED BURDEN WEIGHT FROM A SLEWING JIB CRANE

(1st Report—Equations of Motion and Path of Motion for the Foucault Pendulum)

Takemitsu TOMI

The well-known Foucault Pendulum has been used to detect the effect of the Earth's rotation upon the motion of a pendulum oscillating under the action of gravity.

In writing the equations of motion for a pendulum supported by a string having a length l at any point with a northern latitude ϕ , we take the system of rectangular coordinate axes ξ, η, ζ which are fixed in the Earth and moving with it.

The ξ axis is tangent to the meridian at that point due south and the η axis is tangent at the same point to a parallel circle toward the east while the ζ axis has the radial direction vertically upwards.

Keeping in mind the direction of the Coriolis acceleration, the differential equations of relative motion of a pendulum derived by Foucault become

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin\phi \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l}\xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l}\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(a)$$

where g is the acceleration due to gravity and Ω is the angular velocity of the Earth.

Assuming that the initial displacement of the pendulum is δ_0 toward the east, the following expressions have been obtained as the solutions of Eqs. (a):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \delta_0 [\cos(\sqrt{g/l}\cdot t)\sin(\Omega \sin\phi \cdot t) - (\Omega \sin\phi)\sqrt{l/g} \sin(\sqrt{g/l}\cdot t)\cos(\Omega \sin\phi \cdot t)] \\ \eta &= \delta_0 [\cos(\sqrt{g/l}\cdot t)\cos(\Omega \sin\phi \cdot t) + (\Omega \sin\phi)\sqrt{l/g} \sin(\sqrt{g/l}\cdot t)\sin(\Omega \sin\phi \cdot t)] \end{aligned} \right\} \dots\dots(b)$$

Eqs. (b) are the famous expressions for the path of motion of the Foucault Pendulum. However, substituting Eqs. (b) into Eqs. (a), we can find that Eqs. (b) are not the exact solutions of Eqs. (a).

Therefore, by using the equations of motion for a burden weight suspended from a slewing jib, the author has got the following differential equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin\phi \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2\phi\right)\xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2\phi\right)\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(c)$$

Eqs. (b) are the exact solutions of Eqs. (c) which are valid for all values of Ω corresponding to $0 < \Omega < \infty$.

1. 緒 言

地球は南北方向の軸線を持った回転体である。したがって、地表でつるされた振り子の支点軸、つまり支点を通る鉛直軸は赤道線上を除き、必ず回転していることになる。このため、比較的に重たいおもりを、長い針金でつるして地表で振らせた場合、この振り子の運動には支点軸の回転が影響をおよぼし、その振動面は支点軸の回転する方向とは、逆方向に回転して行く。

Jean Léon Foucault は、このような現象の存在すべきことを指摘し、1851年 Paris の Panthéon の教会ドームからつるした振り子でこれを実験して、地球が自転していることを証明した。よって、このような振り子は「フーコーの振り子」と呼ばれている。

しかし、最近の欧米では、この振り子のことを「地球自転の振り子」と呼んでおり、わが国では東京都上野の科学博物館に設置され、また地球の自転は全世界の人類が平等に享受している共通の物理現象であるという意味で、New York の国連ビルにも設置されていると聞く。

この地球自転の振り子と、旋回クレーンのつり荷重とは、全く同一種類の振り子に属し、両者はすべて同一運動方程式により、その運動が説明されるはずである。本報告書の目的は、この点を理論的に明示することにある。あわせて本報告書は、地球自転の振り子の運動方程式を求める際には、振り子の重量に対する実測値を除外すれば、地球自転による遠心力の影響が、全く無視できるとされている従来からの定説を訂正したものであり、振り子の重量以外にも、支点軸まわりの遠心力が、その運動に対して確かに影響をおよぼす、ということも指摘したものである。さらにまた、赤道上の地点に設置された振り子を除けば、地表に設置されるすべての振り子は、決して鉛直平面内で振動しているものではない、ということもこの報告書で述べている。

2. 内容のあらましと使用した特殊呼称名

本報告書では「在来軌道表現式」とか、「フーコーの運動方程式」などといった特殊な呼称名を使用している。したがって最初に、本報告書で使用した特殊な呼称名について、あらかじめ説明しておく。それと

同時にここでは、本論文の内容についても、そのあらましを述べておくことにする。

筆者はかつて、旋回クレーンにつるされたつり荷重が、ジブの旋回中に発現する運動を求め、旋回ジブクレーンつり荷重の運動方程式から、フーコーの振り子の運動軌道が得られることを述べた。¹⁾ さらにその際、このフーコーの振り子はその運動中、振動の中心点まわりに小さい半径を持った特定の内円の中には、絶対にはいり込むことがない、ということを示しておいた。

本報告は、自転している地球上に設置されたすべての振り子には、上記の内円が必ず存在すべきことを、別の観点から説明したものである。そしてなお、この報告書では、フーコーの振り子に対する運動軌道を表わす式として、古くから採用されてきた在来形の軌道表現式のことを、「在来軌道表現式」と呼び、この在来軌道表現式を得るために、従来から使用されてきた運動方程式のことを、「フーコーの運動方程式」と呼ぶことにしている。

つまりここで在来軌道表現式という名前で呼称した数式は、具体的に言えば、英文抄録に示した(b)式のことであり、またフーコーの運動方程式と呼んだ微分方程式は、同じく英文抄録に示した(a)式のことである。したがって(b)式の在来軌道表現式は、(a)式のフーコーの運動方程式の解である、ということは現在のところ、世界で認められた事実になっている。

このような呼び方にしたがえば、フーコーの運動方程式の中には、地球自転のために生ずる遠心力の項が、見掛けの重力加速度 g 以外には、全く含まれていないことになる。何となれば、振り子の重量を除外して見た場合、フーコーの運動方程式は地球自転による遠心力を、すべて無視して得られたものである、というのがその理由である。このことは(a)式の形を見ても、容易に理解できる。そこでこのフーコーの運動方程式を解くことにより、その解として得られるとされてきた在来軌道表現式の中では、 g の項以外の地球自転による遠心力の影響が、いっさい除外されていなければならない。

ところが厳密に考察すれば、この在来軌道表現式の中には、地球自転による支点軸まわりの遠心力が、確かに含まれていることがわかる。このことは在来軌道表現式が、フーコーの運動方程式の厳密解ではない、ということの意味している。本報告では、この点を明確にすると同時に、フーコーの運動方程式に、支点軸まわりの地球自転による遠心力を追加すれば、在来軌

道表現式をその厳密解として持つような、さらに一般化された運動方程式の得られることを示している。この一般化された運動方程式によれば、支点軸が回転しているすべての地球上の振り子に対して、それらの運動を適切に説明することができる。

しかし、ここに提示した題目を取り上げた主たる目的が、地表で振らせた振り子の運動に、地球の自転がどのような影響をおよぼすか、ということをしらべることにあるため、本報告書では上記の一般化された運動方程式のことを、「地球自転振り子の運動方程式」と呼ぶことにし、在来のフーコーの運動方程式とは、区別した呼び方をしておくことにする。

言い替えると、本報告で地球自転の振り子と言え、それは支点軸が回転している地球上すべての振り子、全般のことを意味する。これに対して、フーコーの振り子と言え、それは地球自転の現象を実験的に知るために、従来から世界各地に設置されている比較的周期の長い特定の振り子に限定した、ということの意味する。したがって本報告書で使用する記述に限定すれば、地球自転の振り子の中にはフーコーの振り子が、単なる特定例として包含されることになる。このため、最後に述べたフーコーの振り子に対する地球自転の振り子、といった呼び名の区別は、以下の説明の都合上設けた全く便宜的なものにすぎず、本質的なものではない。

3. 旋回ジブつり荷重の運動方程式

最初に以下の説明の必要上、ここでは筆者が以前に提示しておいた旋回ジブクレーンつり荷重の運動方程式を、簡単に紹介しておく。²⁾

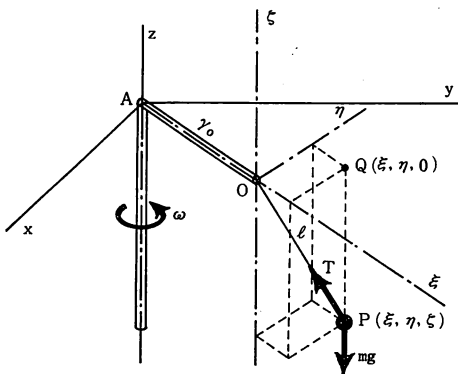


図 1

図1が旋回ジブクレーンを模型的に示したものである。ここで、Pはつり荷重であり、かつ

r_0 = ジブ半径、 l = つり糸の長さ、 ω = ポストの回転速度

とし、Qはつり荷重の水平面への投影点とする。

いま図1のように、空間に固定した静止座標系を x, y, z とし、 z 軸を旋回ポストに一致させて鉛直上方に取り、旋回ポストとジブの交点Aを座標原点として、水平面内に x 軸と y 軸を取る。つぎに、ジブの先端Oを座標原点とし、 xy 面内でジブの半径方向に ξ 軸を、これに垂直にポストの旋回方向に η 軸を、また z 軸に平行に ζ 軸をとれば、この $O-\xi\eta\zeta$ 座標系は、ジブとともに運動する回転座標系となる。このとき、 z 軸と ζ 軸は当然の結果として、その方向が見掛けの重力の作用方向と一致する。

そこで、つり糸の張力 T の ξ, η, ζ 成分を T_ξ, T_η, T_ζ とし、かつ空気抵抗を速度に比例するものとして、その抵抗係数を 2μ とおけば、つり荷重の質量が m の場合、その運動方程式としては

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt}\eta - \omega^2(r_0 + \xi) - 2\omega\frac{d\eta}{dt} \\ + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \omega\eta\right) &= \frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt}(r_0 + \xi) - \omega^2\eta + 2\omega\frac{d\xi}{dt} \\ + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt} + \omega\xi + \omega r_0\right) &= \frac{T_\eta}{m} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\frac{\mu}{m}\frac{d\zeta}{dt} + g &= \frac{T_\zeta}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

を得る。ただし t は時間を表わし、 g は見掛けの重力加速度である。

また(1)式でつり糸の張力成分は

$$T_\xi = -T\frac{\xi}{l}, T_\eta = -T\frac{\eta}{l}, T_\zeta = -T\frac{\zeta}{l} \dots\dots (2)$$

で表わされる。何となれば、つり荷重は l を半径とする球面上に拘束されているので

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2, \text{ あるいは } \zeta = -l\sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)/l^2} \dots\dots (3)$$

の条件が成立するためである。ただし、ここで

$$(\xi^2 + \eta^2)/l^2 < 1$$

でなくてはならない。

ところで一般にクレーンの取扱いにおいては、危険防止の観点から、つり荷重の運動があまり激しくならないように、荷役作業には細心の注意がはらわれる。

すなわち、つり荷重の運動が大きくなりかけると、クレーン運転士は直ちにジブの旋回を中止し、つり荷重の運動が消滅した後、次の旋回動作に移るのが通例である。

このような場合には、 ξ 、 η をつり糸の長さ l に比べて1次の微小量とすれば、 ξ^2/l^2 と η^2/l^2 は2次の微小量となり、 $(\xi^2+\eta^2)/l^2$ は1に対して無視してもよい。よって、(3)式より

$$\xi \approx -l, \text{ すなわち } \frac{d\xi}{dt} \approx 0, \frac{d^2\xi}{dt^2} \approx 0 \quad \dots\dots(4)$$

の関係が得られる。これらの関係を(1)式の第3式に適用すると、 $T_\xi \approx mg$ となり、これと(4)式の $\xi \approx -l$ の関係を、(2)式の第3式に代入すれば

$$T_\xi \approx T = mg$$

が得られる。したがって、(2)式の第1式と第2式はそれぞれ

$$T_\xi = -mg - \frac{\xi}{l}, \quad T_\eta = -mg - \frac{\eta}{l} \quad \dots\dots(5)$$

となる。この(5)式を(1)式の残りの式に代入すると、つり荷重の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt}\eta - \omega^2(\xi+r_0) - 2\omega\frac{d\eta}{dt} \\ + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \omega\eta\right) + \frac{g}{l}\xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt}(\xi+r_0) - \omega^2\eta + 2\omega\frac{d\xi}{dt} \\ + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt} + \omega\xi + \omega r_0\right) + \frac{g}{l}\eta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

となるが、これは結局のところ、つり荷重の鉛直方向の運動を無視したことに当たる。

さてここで、本報告の主たる題目である地球自転の振り子との関連づけをするために、 $d\omega/dt=0$ とおくと、次式のようにジブの回転数が一定の場合に対し、クレーンつり荷重の運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \omega\eta\right) - 2\omega\frac{d\eta}{dt} \\ + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\xi = \omega^2 r_0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt} + \omega\xi + \omega r_0\right) \\ + 2\omega\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\eta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

さらにまた、空気抵抗は非常に小さいので無視できる。²⁾そのためここで $\mu=0$ とおけば、(7)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\xi = \omega^2 r_0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\eta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

となる。筆者は以前に、本式で $r_0=0$ とおき、すぐあとで述べるような地球自転の振り子に対する運動方程式を得た。^{1),2)}ただし、ここで

$$\sqrt{g/l} = 2\pi N_P, \text{ あるいは } N_P = \sqrt{g/l}/(2\pi) \quad \dots\dots(9)$$

とおくと、 N_P は振り子の固有振動数を表わすことになる。

以上が、つり荷重の運動を得るために、筆者が求めた運動方程式に対するその誘導過程である。

4. 地球自転振り子の運動方程式

図1に示す旋回ジブクレーンで、旋回ポストの方向を、北半球上での地理学緯度 ϕ における見掛けの重力方向と一致させ、かつ $r_0=0$ とおくと、この力学系は地球表面上の一点Oでつるされた単一振り子を表わす。

いま、座標原点Oを前記のように北半球上の一点とすれば、 z 軸は ξ 軸と一致し、この ξ 軸は鉛直上向きを示す。同時に η 軸は水平東向きとなり、また ξ 軸は水平南向きに座標となる。このとき ξ 軸は地表における南北軸であり、 ξ 軸は振り子の支点軸である。したがって北緯 ϕ 度の地球表面上の一点Oにおいて、その点につるされた振り子の運動方程式は、(8)式で $r_0=0$ とおいた次の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\eta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

で表わされることになる。本式が以前に、地表で振らせた振り子の運動方程式であるとして、筆者が提示しておいた微分方程式にほかならない。¹⁾

この(10)式は(8)式で $r_0=0$ とおいて求めたものであり、(8)式はまた(7)式で $\mu=0$ と仮定して得られたものであった。したがって(10)式が、抵抗のない無減衰時の振り子の運動を表わしていることは、別に断わるまでもないものと思う。

ここで、 ω は北緯 ϕ 度における支点軸、つまり ξ

軸まわりの回転角速度であるため、地球自転の角速度を Ω とすれば

$$\omega = \Omega \sin \phi \quad \dots\dots(11)$$

となり、振り子支点軸の回転数 N_E は

$$N_E = \omega / (2\pi) = \Omega \sin \phi / (2\pi) \quad \dots\dots(12)$$

で表わされる。ただし、恒星時では1日が86164(sec)であるから、地球自転の角速度 Ω の値は

$$\Omega = \frac{2\pi}{86,164} = 7.292 \times 10^{-5} (\text{rad/sec}) \quad \dots\dots(13)$$

である。

さらにここで、(10) 式を地球の自転角速度 Ω で具体的に表現するために、(11) 式の値を (10) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi \right) \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi \right) \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

が得られる。これが本報告書で「地球自転振り子の運動方程式」という特殊な呼称名を付けた微分方程式である。この (14) 式は (10) 式と全く同じ内容を示すものであり、それは (10) 式を単に書き替えたものすぎない。(14) 式を振り子の運動方程式に採用した場合には、その第1式と第2式の形が相似形になっているため、計算時の取扱いが非常に簡単となる。したがって本報告書では、(14) 式を出発点として地球自転の振り子の運動を求める、といった方針を採ることにする。つまり本報告書では、(14) 式でその運動が表わされる振り子のことを、地球自転の振り子と呼ぶ。

ただし在来のフーコーの振り子の場合、それを設置する目的は、非常に小さな一定値を持った地球自転の角速度を検出することにあると言える。しかもそのとき、振り子の小振動を考えるために、その鉛直方向の運動は無視できることがのぞましい。このため緒言のところでも述べたとおり、フーコーの振り子に対しては、比較的周期の長い重たい振り子が使用されるとされている。^{3),4),5)} このことは必然的に、支軸軸の回転数と振り子の固有振動数との相対関係に、ある限定範囲を設けたことを意味し、振り子支点軸は特定の微小な一定値でもって回転している、ということをおろそかじめ想定していることになる。

しかし一方、いま提示した (14) 式の場合には、その表わす運動が本質的には、旋回ジブにつるされた荷重の運動と全く同等である。その結果、(14) 式は

$0 \leq \Omega \leq \infty$ に対して成立する。この事実を考え合せるとき、(14) 式の場合には振り子支点軸の回転速度が、特定値である必要はなく、支点軸回転数と振り子振動数との比は、任意の値であっても差し支えない。したがって (14) 式の場合、その適用に対しては限定範囲などいっさい設けていない、ということがわかる。

つまり、(14) 式では支点軸の回転速度が小さくならない、といった制限などは撤廃されているわけであり、 $\Omega^2=0$ の時にのみ成立するとされてきた在来のフーコーの振り子の運動は、(14) 式で説明される現象中の単なる特殊例にすぎない。このことが本報告書で、(14) 式によりその運動が表わされる振り子のことを、フーコーの振り子と区別して、地球自転の振り子と呼んだ主たる理由である。

なおこの場合、地球自転の振り子に対する運動方程式として (14) 式を採用した理由には、以下に述べる二つの別途な原因が考えられるからである。

すなわち、振り子の運動に対しては、地球自転の角速度 Ω の ξ 軸まわりの成分 $\Omega \cos \phi$ が影響をおよぼす。これは振り子に η 軸方向の求心加速度 $-\Omega^2 (\cos \phi)^2 \eta$ を与えるので、(14) 式の第2式でその左辺第3項に、この求心加速度を追加すると、(14) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi \right) \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \right) \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(14')$$

となり、本式が (14) 式よりも、地球自転の振り子に対する運動方程式としては、幾分か精度の高いものとなる。しかも、この (14') 式は、すぐあとで述べるフーコーの運動方程式を、改良したのものである。したがって本報告書では、この (14') 式が (14) 式の一部を修正し、かつフーコーの運動方程式を改良したという意味で、以下この (14') 式のことを便宜上、「改修形運動方程式」と呼ぶことにする。

ところが前の (14) 式では、その第1式と第2式の形が相似形をなしていたのに対し、(14') 式の改修形運動方程式では、その左辺第3項のところ相似性がくずれている。これは (14') 式の解がその分だけ、数式的に複雑化することを意味する。しかし Ω の値が小さいために、振り子の運動におよぼす $\Omega^2 \cos^2 \phi$ の影響はきわめて小さく、 $\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta = 0$ と仮定しても差し支えないものと考えられる。このようにして、(14') 式の第2式を作るために、わざわざ追加した

$\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta$ の項を無視することにすれば, (14') 式はもとの (14) 式の形にもどる. これが地球自転振り子の運動方程式としては, (14) 式を採用することにした第一の理由である.

さらにここで, 地球自転振り子の運動方程式として, (14) 式を採用した第二の理由としては, 次のものが考えられる. すなわち, (14) 式の解を求めて見ると, 地球自転の振り子に対し, その運動軌道が得られるはずである. ところが, 従来は地球自転のために発生する遠心力の影響は, 非常に小さいので無視できるとされ, (14) 式で左辺第3項に含まれる Ω^2 の項を, ことごとく省略してもよいとされている.^{3),4),5),6),7),8),9),10)}

このように, 地球自転の遠心力を表わす $\Omega^2 \sin^2 \phi$ を, (14) 式ですべて無視すると, この (14) 式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l} \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l} \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(14 \cdot a)$$

の形をした運動方程式が得られる. 英文抄録ではこれを (a) 式として示しておいた. この (14 \cdot a) 式が有名なフーコーの振り子に対する運動方程式の在来形であり, 従来は本式を解くことにより, フーコーの振り子の運動軌道が得られるとされている.^{3),4),5),6),7),8),9),10)}

このように (14 \cdot a) 式を解いて得られた振り子運動の軌道表現式が, 本報告書で言う在来軌道表現式である. このため, 本報告書では前に述べたとおり, この (14 \cdot a) 式のことをフーコーの運動方程式と呼んだ. 当然のことながら, この (14 \cdot a) 式と前の (14) 式とは, その形が幾分ちがった表現式になっている.

ところで, いま述べたフーコーの運動方程式を (14 \cdot a) 式の形のままで実際に解いてみた場合, その厳密解は在来軌道表現式に一致しない, というきわめて不都合な難点が生ずる. つまり, 在来軌道表現式は (14 \cdot a) 式の近似解であって, その厳密解ではない. このことが本報告書では, 地球自転の振り子に対する運動方程式として, (14) 式を採用した第二の理由である. ちなみに, あとで示す計算結果から得られる結論だけを, あらかじめここで述べてみると, (14) 式の運動方程式に対しては, 在来軌道表現式がその厳密解になっている. なお上記のほかに, (14 \cdot a) 式はその中に大きな理論的矛盾点を含んでいるようである.

5. 運動方程式: (14) 式に対する厳密解

地球自転振り子の運動方程式としては, (14) 式の形を採用してもよいことがわかった. したがってここでは, (14) 式を厳密に満足する一般解を求めてみる. しかしながら, この (14) 式と (10) 式とは同じものであるから, ここでは数式の表現が簡素化されている (10) 式を使用することにより, 振り子の運動軌道を求めることにする. なお, その際便宜上

$$\sqrt{g/l} = n\omega, \text{ あるいは } n = \sqrt{g/l}/\omega = N_P/N_E \dots\dots(15)$$

とおくと, n は振り子の振動数 N_P と支点軸の回転数 N_E との比を表わす. よって $\sqrt{g/l}$ を $n\omega$ でおきかえると, (10) 式は次の形となる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega \frac{d\eta}{dt} + (n^2 - 1)\omega^2 \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega \frac{d\xi}{dt} + (n^2 - 1)\omega^2 \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

本式を解くために, 第2式に $i = \sqrt{-1}$ をかけて, 第1式と加えると

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + i \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2i\omega \left(\frac{d\xi}{dt} + i \frac{d\eta}{dt} \right) + (n^2 - 1)\omega^2 (\xi + i\eta) = 0 \dots\dots(17)$$

を得るが, ここでいま

$$\xi + i\eta = Z \dots\dots(18)$$

とおけば, (17) 式はその表現が

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2i\omega \frac{dZ}{dt} + (n^2 - 1)\omega^2 Z = 0 \dots\dots(19)$$

のように簡単な形となる. そこで本式の解を

$$Z = Ae^{\lambda t} \dots\dots(19')$$

と仮定して, これを上式に代入すると

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda + (n^2 - 1)\omega^2 = 0 \dots\dots(20)$$

となり, これを解くと

$$\lambda = -i\omega \pm \sqrt{(i\omega)^2 - (n^2 - 1)\omega^2} = -i\omega \pm i n\omega$$

となる. その結果, (20) 式の根としては

$$\lambda_1 = i\omega(n-1), \text{ もしくは } \lambda_2 = -i\omega(n+1) \dots\dots(20')$$

が得られる. したがって (19) 式の解は, A と B を積分定数とすれば, (19') 式により

$$Z = Ae^{i\lambda_1 t} + Be^{i\lambda_2 t} = Ae^{i(n-1)\omega t} + Be^{-i(n+1)\omega t} \dots\dots(21)$$

で表わされる. この (21) 式はまた

$$Z = (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t})e^{-i\omega t}$$

$$= (Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t} + Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t})e^{-i\omega t} \quad \dots\dots(22)$$

の形に書くこともできる。この(22)式が地球自転の振り子の運動方程式に対する厳密解である。つまり、この(22)式が(16)式の厳密解である。(16)式は(14)式もしくは(10)式と内容的には全く同じ運動方程式になっているため、(22)式はまた、(14)式すなわち(10)式の厳密解である、ということは断わるまでもない。

ところで、いま

$$Z_0 = Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t} + Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t} \quad \dots\dots(23)$$

とおくとき、(22)式は

$$Z = Z_0 e^{-i\omega t} = Z_0 e^{-i(\Omega \sin \phi) t} \quad \dots\dots(24)$$

となる。ここで Z_0 の項は単振り子の無減衰振動を表わし、 $e^{-i(\Omega \sin \phi) t}$ の項は振り子の運動におよぼすコリオリの力の作用を表わす。

上記の(22)式によれば、振り子の運動は

$$\tau_1 = 2\pi/\sqrt{g/l}, \quad \tau_2 = 2\pi/\omega = 2\pi/(\Omega \sin \phi) \quad \dots\dots(25)$$

なる二つの周期的運動からなりたっており、第一の振動周期 τ_1 は振り子の小振動の周期であり、第二の振動周期 τ_2 は支点軸の回転周期を表わす。また(24)式によれば、 Z_0 のベクトルが支点軸の回転方向とは逆方向に、 $\omega = \Omega \sin \phi$ の角速度で回転することがわかる。

なお、(19)式のベクトル形の運動方程式によれば、その左辺第2項のコリオリ加速度が dZ/dt の速度に比例しているため、コリオリの力は抵抗と類似した働きをすることがわかる。しかも、この場合の抵抗係数は $i2\omega$ であって、それは虚数の値を持つ。このように抵抗係数が虚数値を採ることが原因となって、本来の往復周期 $\tau_1 = 2\pi/\sqrt{g/l}$ のほかに、 $\tau_2 = 2\pi/\omega$ の回転周期が出現することになる。これに対して、抵抗係数が実数値 μ を採る通常の振動の場合には、抵抗は振り子に対して減衰の現象を出現させる。このために通常の振り子振動に対する減衰現象というものは、 $\tau_2 = i2\pi/\mu$ の虚の周期を持った回転運動に相当する、という解釈が成立することになる。

6. 運動方程式に対する検討

これまで、旋回クレーンつり荷重の運動方程式を利用すれば、地球自転の振り子に対する運動方程式が、

(10)式すなわち(14)式の形で得られる、ということとを述べた。しかも得られた運動方程式は、(14)式と(14・a)式とを比較してわかるとおり、その形が在来形のフーコーの方程式とは、幾分ちがった表現式になってしまった。したがってここでは立場をかえて、(10)式もしくは(14)式の妥当性について、別の角度から検討を加えてみることにする。

一般に、自転する地球上で、地心緯度 ϕ_0 の北半球上の地点に設置された単一振り子の運動方程式は、 g_0 を万有引力による本来の重力加速度とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin \phi_0 \frac{d\eta}{dt} \\ - \Omega^2 \left[R_0 \left(1 + \frac{\zeta}{R_0} \right) \cos \phi_0 \sin \phi_0 + \xi \sin^2 \phi_0 \right] &= \frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin \phi_0 \frac{d\xi}{dt} + 2\Omega \cos \phi_0 \frac{d\zeta}{dt} \\ - \Omega^2 \eta &= \frac{T_\eta}{m} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\Omega \cos \phi_0 \frac{d\eta}{dt} - \Omega^2 \left[R_0 \left(1 + \frac{\zeta}{R_0} \right) \cos^2 \phi_0 \right. \\ \left. + \xi \cos \phi_0 \sin \phi_0 \right] &= -g_0 + \frac{T_\zeta}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

で表わされるとされている。⁸⁾ ただしここで、 R_0 は地球の半径であって、 ζ 軸は R_0 の方向と一致させ、 ξ 軸は水平南向きにする。また η 軸は水平東向きに取った。

このとき、つり糸の張力 T は原点に向っているため、前に(2)式として示しておいた次の関係が成立している。すなわち

$$T_\xi = -T \frac{\xi}{l}, \quad T_\eta = -T \frac{\eta}{l}, \quad T_\zeta = -T \frac{\zeta}{l} \quad \dots\dots(26')$$

明らかに $\zeta \ll R_0$ であるから、(26)式の第1式と第3式の左辺で、それらの第3項の ζ/R_0 は1に対して無視できる。このために(26)式は次のように書いてもよい。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin \phi_0 \frac{d\eta}{dt} - (\Omega \sin \phi_0)^2 \xi \\ - \Omega^2 R_0 \cos \phi_0 \sin \phi_0 &= \frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin \phi_0 \frac{d\xi}{dt} - \Omega^2 \eta \\ + 2\Omega \cos \phi_0 \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{T_\eta}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\Omega \cos \phi_0 \frac{d\eta}{dt} - \Omega^2 \xi \cos \phi_0 \sin \phi_0 \\ - \Omega^2 R_0 \cos^2 \phi_0 = -g_0 + \frac{T_\zeta}{m} \end{aligned} \right\}$$

本式の第1式と第3式で、それらの左辺最後の項を $\Omega^2 R_0 \cos \phi_0 \sin \phi_0 = \alpha_0$, $\Omega^2 R_0 \cos^2 \phi_0 = \beta_0$ ……(28)

とおくとき、これらはいずれも定数値となる。

よって、 α_0 は振り子の振動中心点を ξ 方向に、ある一定量だけずらせる働きをなし、また β_0 は振り子の重量を一定量だけ、見掛け上変化させる作用をするのみである。この結果、 α_0 と β_0 の両者はともに振り子の振動現象とは無関係となる。

このことを言い替えば次のようになる。いまここで、 $\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}$ を計算してみると

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} = \Omega^2 R_0 \cos \phi_0$$

を得る。この式は北緯 ϕ_0 度における任意地表点が持つ、地球本体の南北地軸まわりの求心加速度を表わし、これは地球自転による強さ一定の遠心力をその点で生ずる。すなわち、 α_0 と β_0 はいわゆる見掛けの重力を決定する要素である。そこでいま、重力加速度を g で表わすと

$$g = g_0 - \Omega^2 R_0 \cos^2 \phi_0 = g_0 - \beta_0 \quad \text{……(28')}$$

となるが、この値は見掛けの重力加速度の値とは、厳密な意味では一致しない。ただし(26)式によれば、その第1式と第3式には $\Omega^2 R_0 \cos \phi_0$ の成分が含まれているが、その第2式には $\Omega^2 R_0 \cos \phi_0$ の項が含まれていない。このため、 η 軸方向つまり地表東西軸方向の振り子の運動に対しては、一見したところでは見掛けの重力が影響しないように思われる。しかし、それはつり糸の張力 T_η によって考慮される。

ところで、(28)式で示したこれら α_0 と β_0 の絶対量については、以下で示すように、それらが非常に小さな量であることを知る。ゆえに、(27)式で α_0 の項は省略しても差し支えない。つまり、 α_0 の値が無視できない大きさであれば、前述のように振り子の振動中心点は図1の座標原点 O よりも、幾分か ξ 軸の正方向にずれることになる。しかし、このずれは次の α_0 と β_0 に対する具体値を見るとき、全く無視できることがわかる。

例えば、(27)式の第3式の β_0 の値を計算してみると

$$\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ (rad/sec)}, R_0 = 6.38 \times 10^8 \text{ (m)}$$

であるから

$$\Omega^2 R_0 = 3.92 \times 10^{-4} \text{ (m/sec}^2\text{)}$$

$$\therefore \beta_0 (= \Omega^2 R_0 \cos^2 \phi) \ll g$$

となり、 β_0 は見掛けの重力加速度 $g = 9.8 \text{ (m/sec}^2\text{)}$ に比べて、非常に小さな値であることがわかる。また、 $\alpha_0 \leq (1/2)\Omega^2 R_0$ であるから、同じことが α_0 についてもいえる。

さらに同様な意味において、 $\xi \ll R_0$ であるから、(27)式の第3式の左辺第3項についても

$$\Omega^2 \xi \cos \phi_0 \sin \phi_0 \ll \beta_0, \therefore \Omega^2 \xi \cos \phi_0 \sin \phi_0 \ll g$$

であることは明白である。

したがって、(27)式の第3式でその第3項を省略し、かつその第4項を右辺に移項して、(28')式の g の値を使用すれば、この(27)式の第3式は

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\Omega \cos \phi_0 \frac{d\eta}{dt} = -g + \frac{T_\zeta}{m} \quad \text{……(29)}$$

の形となる。

ここでまた、振り子の小振動を考えると

$$\zeta \approx -l, \text{ よって, } \frac{d\zeta}{dt} \approx 0, \frac{d^2\zeta}{dt^2} \approx 0$$

となり、なおさらに Ω が非常に小さいことを考慮すれば、(29)式で $2\Omega \cos \phi_0 \cdot (d\eta/dt) \ll g$ と見なしてもよい。よってその左辺第2項も無視すると、この(29)式から

$$T_\zeta \approx mg$$

を得るが、この値とすぐ前に述べた $\zeta \approx -l$ の関係とを、(26')式の第3式に代入すると

$$T_\zeta \approx T = mg \quad \text{……(29')}$$

の関係が得られる。

このようにして、(27)式の第1式でその左辺第4項の α_0 を省略し、かつ第2式の左辺では $d\zeta/dt$ の項を省略すれば、振り子の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi_0) \frac{d\eta}{dt} - (\Omega \sin \phi_0)^2 \xi = \frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi_0) \frac{d\xi}{dt} - \Omega^2 \eta = \frac{T_\eta}{m} \end{aligned} \right\} \quad \text{……(30)}$$

のように表わされる。

あるいは、(2)式より得られる次の関係へ、つまり(26')式の第1式と第2式へ、(29')式の $T = mg$ を使用すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_\xi}{m} = -T \frac{\xi}{ml} = -\frac{g}{l} \xi \\ \frac{T_\eta}{m} = -T \frac{\eta}{ml} = -\frac{g}{l} \eta \end{aligned} \right\} \quad \text{……(30')}$$

の関係が得られ、かつ $\phi_0 = \phi$ と見なしてもよいので、(30) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi\right) \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right) \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

となり、これは前に改修形運動方程式と呼んだ(14')式と一致する。この式で Ω^2 を無視したものが、(14・a)式で示したフーコーの運動方程式にほかならない。

上記の(31)式はその誘導過程だけから考えた場合、フーコーの運動方程式に比べると、振り子運動に対する近似度が高いと見てよい。よって前記のように、それを改修形運動方程式と呼んだ。しかし、その中には理論的矛盾点を含んでいるようである。この矛盾点については次の機会にあらためて、それを具体的に述べるつもりである。

以上のように、在来のフーコーの運動方程式ないし(31)式の運動方程式は、 α_0 を無視した時に得られ、これらの運動方程式に含まれる g の方向は、理論式の上では地球中心に向かう万有引力による重力加速度の方向を取る。したがってこの場合の g については、その値および方向が、ともに見掛けの重力加速度とは一致しない。これは実用的な立場から見て、いささか都合の悪いことになる。

けれども、実際に地表で物体の重さを測定した場合、その値は見掛けの重力加速度によって決定される。そのため、(31)式もしくはフーコーの運動方程式を使用した実用計算に当たっては、この実測された見掛けの重力加速度 g の値が用いられ、その時の ξ 軸の方向は結果的に、見掛けの重力加速度の方向が採用されることになる。すなわち、それは(29')式と(30')式により、結果的には考慮されてしまう。このことがまた、(31)式の緯度 ϕ に対して地理学緯度の値を採用した理由でもある。

つまり、厳密に言えば(14')式と(31)式とでは ξ 軸の方向が、ごくわずかではあるが食い違っている。この食い違いを無くすためには、 ξ 軸を最初から見掛けの重力方向に一致させて取り、新しく $\xi\eta\zeta$ 座標系に対する運動方程式を作製しなおせばよい。⁹⁾

ただし、その場合は地理学緯度 ϕ と地心緯度 ϕ_0 との差 $\phi - \phi_0$ が関係し、その分だけ運動方程式の形が(26)式よりも複雑化するので具合が悪い。よって、

振り子の運動方程式を(31)式の形で求めるためには、 ξ 軸の方向は地球の半径方向に一致させて取り、上記のように(26)式の形から出発するのが妥当であると考えられる。(31)式で $\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta = 0$ とおけば(14)式を得る。

なお、(31)式を見ればわかるように、その中には質量 m が含まれていない。したがって、振り子の重量はその運動に全く関係しない。この性質はクレーンつり荷重についても全く同じであり、つり荷重の振れはその重さとは無関係である。⁹⁾ このようなことは、いまさら断わるまでも無いものとする。しかしながら、ここ数年わが国で発表されている工学系学会の論文によれば、クレーンつり荷重の重さが、その振れに影響するとの誤解が存在するの事実である。よってここに、あえて補足説明を加えた。

7. 運動方程式を得るための重要仮定

前に記した(14')式の改修形運動方程式から、(14)式で示したもとの地球自転振り子の運動方程式にもどるに際しては、地表南北軸まわりの求心加速度、つまり $\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta$ を無視する必要があることを述べておいた。しかも、(14')式は(31)式と同じであることもわかった。

ここでは、この $\Omega^2 \cos^2 \phi \cdot \eta = 0$ の仮定が最も重要であることを強調する目的のために、(26)式から(31)式を得る前述の誘導過程を要約しておくことにする。すなわち、まず(26)式で、振り子の鉛直方向の運動をすべて無視すれば、下記の第1近似式を得る。ただし、 ϕ_0 を ϕ と略記した。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin \phi \frac{d\eta}{dt} - R_0 \Omega^2 \cos \phi \sin \phi \\ - \Omega^2 \sin^2 \phi \cdot \xi &= -\frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin \phi \frac{d\xi}{dt} - \Omega^2 \eta &= -\frac{T_\eta}{m} \\ -2\Omega \cos \phi \frac{d\eta}{dt} - R_0 \Omega^2 \cos^2 \phi \\ - \Omega^2 \cos \phi \sin \phi \cdot \xi &= -g_0 + \frac{T_\zeta}{m} \end{aligned} \right.$$

次に、この第1近似式で振動に無関係な項、つまり上記の第1式の左辺で第3項の α_0 に当たる $R_0 \Omega^2 \cdot \cos \phi \sin \phi$ をおとし、かつその第3式の第2項の β_0 に当たるもの $R_0 \Omega^2 \cos^2 \phi$ を右辺に移項して、

$g_0 - R_0 \Omega^2 \cos^2 \phi = g$ と書けば

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2\Omega \sin \phi \frac{d\eta}{dt} - \Omega^2 \sin^2 \phi \cdot \xi = \frac{T_\xi}{m} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2\Omega \sin \phi \frac{d\xi}{dt} - \Omega^2 \eta = \frac{T_\eta}{m} \\ -2\Omega \cos \phi \frac{d\eta}{dt} - \Omega^2 \cos \phi \sin \phi \cdot \xi = -g + \frac{T_\zeta}{m} \end{cases}$$

のように第2近似式が得られる。しかるに、この第2近似式の第3式で、その左辺の二つの項は g に比べて非常に小さいため省略し、 T_ζ は g だけで決まると考えれば、この第3式より $T_\zeta = mg$ が得られる。よって、(26)式の関係、つまり以前に(2)式として示しておいた関係は

$$T_\xi = -\frac{g}{l} \xi, \quad T_\eta = -\frac{g}{l} \eta$$

となり、これらを上第2近似式に代入すると

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2\Omega \sin \phi \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi\right) \xi = 0 \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2\Omega \sin \phi \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right) \eta = 0 \end{cases}$$

として、(31)式が得られる。したがって、この改修形運動方程式と名付けた(31)式は、結局のところ、(26)式で振り子の鉛直方向の運動を、ことごとく無視した場合の運動方程式に当たる、ということがわかる。

さて、(31)式と(14)式を対比してみると、両者のうちの第1式はそれぞれ全く同じ表現式になっており、お互いに一致しているので、これは問題にする必要がない。しかし、両者の第2式ではそれらの左辺第3項のところ、少しちがった形になっている。すなわち、(31)式の第2式第3項で Ω^2 と書いてあるところを、(14)式の第2式第3項では、 Ω^2 のかわりに $\Omega^2 (\sin \phi)^2$ でおきかえていることがわかる。

そこでいま、(31)式の第2式で、左辺第3項の Ω^2 のかわりに

$$\Omega^2 = \Omega^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$$

と書いてみると、(31)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi\right) \xi &= 0 \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2(\Omega \sin \phi) \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2 \phi\right) \eta & \\ &= (\Omega^2 \cos^2 \phi) \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

となるが、本式の第2式で右辺に存在する項を、かり

に

$$(\Omega^2 \cos^2 \phi) \eta = 0 \quad \dots\dots (32')$$

とおけば、上の(32)式から(14)式が得られる。このことは地表での南北軸まわりの角速度、つまり ξ 軸まわりの角速度 $\Omega \cos \phi$ のために生ずる遠心力を無視した、ということの意味する。(32')式の仮定については、(14)式のすぐあとの説明でも、それを述べておいた。この(32')式が(14)式の運動方程式を得る過程で、最も重要と考えられる仮定である。ただし、この仮定の設定にあたっては $R_0 \Omega^2 \cos^2 \phi \gg \eta \Omega^2 \cdot (\cos \phi)^2$ の関係を利用したものであって、それは決して $g_0 = g$ とおいたことにはなっていない。

いま述べたように、地表南北軸まわりに生ずる遠心力を無視した場合、北極においては $\sin \phi = \sin 90^\circ = 1$ となるので、(14)式と(31)とは完全に一致する。一方、赤道上の地表点においては $\sin \phi = \sin 0^\circ = 0$ となるため、(14)式では地球自転の角速度 Ω を含む項が数式の表面上で全く消失してしまうのに対し、(31)式では Ω^2 がその第2式に残ってしまう。このことは赤道上の地点において、(14)式の妥当性がそこなわれるとの印象を与えるかも知れない。しかし、現実的には $\Omega^2 = 0$ と見てよいので、赤道上の地点においても(14)式は妥当性を持つものとする。

このように(32')式の仮定を設けた場合でも、(14)式が支点軸まわりの Ω^2 の項をその中に含んでいるため、地球表面上のすべての地点で、(14)式は妥当性を持つことになり、赤道上の地点から両極地点に近づくにつれて、(31)式と(14)式の一致度は高くなる。このことは運動方程式の正確度が高くなることを意味しているものと思う。

つまり、従来は Ω の値が非常に小さく、それを2乗した場合には $\Omega^2 = 0$ とおいてもよいとして、(26)式において最初から Ω^2 の含まれている項を全部省略し、その上で振り子の運動を求めるといった方法がとられてきた。^{3), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10)} しかしこの方法に比べると、たとえ(32')式の仮定を設けたとしても(14)式で示した運動方程式の中には、 Ω^2 の項が一部は残置されており、その分だけ運動方程式の正確度は改良されたことになる。この結果、(32')式の仮定は許容し得るものとする。この考え方にしたがって $\Omega^2 (\cos \phi)^2 \eta = 0$ とおけば、(32)式は(14)式の形になってしまう。

以上のようにして、(14)式ないし(10)式で示した運動方程式の妥当性が確認できる。しかも、この(14)

式の厳密解は (21) 式つまり (22) 式であった。したがって、地球自転の振り子の運動軌道を求めるためには、(21) 式もしくは (22) 式を使用しても、何ら差し支えが無いということがわかる。

なおまた、(26) 式つまり (27) 式から (14) 式を得るためには、次のように考えても良いものと思う。すなわち、(27) 式の第3式でその左辺の各項はいずれも g に比べて、非常に小さな値を持つので、それらのうちの第4項を除外してその他のすべての項を無視すれば、この第3式から $T_\zeta \doteq mg$ が得られる。ただし g は (28') 式で表わされる。ここでさらに、振り子の小振動を考えると、その鉛直方向の変位は ξ, η に比べて2次の微小量となり、 $\zeta \doteq -l$ としても良い。このために (26') 式の第3式から $T_\zeta \doteq T = mg$ が得られ、この (26') 式の残りの式は $T_\xi/m \doteq -g\xi/l$, および $T_\eta/m \doteq -g\eta/l$ の形となる。

そこで、(27) 式は

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\Omega \sin\phi \frac{d\eta}{dt} - \Omega^2 \sin^2\phi \cdot \xi = -\frac{g}{l} \xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} + 2\Omega \frac{d\zeta}{dt} \cos\phi - \Omega^2 \eta = -\frac{g}{l} \eta \end{cases}$$

の形で表わされ、本式の第1式は (14) 式の第1式と一致している。ただし、第1式で $\Omega^2 R_0 \cos\phi \sin\phi$ の値 α_0 は微小量であり、かつそれは振動とは無関係であるから省略した。この α_0 を無視したことは $\alpha_0 \ll T_\xi/m$ を意味する。

次にここで、 $\Omega^2 = \Omega^2 \cos^2\phi + \Omega^2 \sin^2\phi$ とおいて、上式の第2式に代入すれば、この第2式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2\phi\right)\eta \\ + 2\left(\Omega \frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\phi = (\Omega^2 \eta)\cos^2\phi \end{aligned}$$

となる。ところが、本式で2次の微小量に当たる $\Omega(d\zeta/dt)$ と $\Omega^2 \eta$ の値は、大体同じ程度の大きさと見なすことができる。よっていま、コリオリ加速度 $2\Omega(d\zeta/dt)\cos\phi$ の大きさと、求心加速度 $\Omega^2 \cos^2\phi \cdot \eta$ の大きさととは、大体同じ程度の値を持つものと考えて

$$2\Omega \frac{d\zeta}{dt} \cos\phi \doteq \Omega^2 \eta \cos^2\phi$$

とみなし、これを方程式の両辺からおとすと

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\Omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2 \sin^2\phi\right)\eta = 0$$

として、(14) 式の第2式が得られる。ただし、この場合でも $\zeta \doteq -l$ において、鉛直方向の振り子の運動

を無視しているわけである。そのために $d\zeta/dt \doteq 0$ であり、実質的には $\Omega^2 \eta \cos^2\phi \doteq 0$ となる。したがってここでもやはり、(32') 式の仮定を設定したのと、結果的には同じことになっている。

仮定 (32') 式は (31) 式を使用すれば、計算数式の上で解析的にも誘導できる。したがって、それは理論的にも得られるものであることを追記しておく。

8. 振り子運動に対する在来軌道表現式

(21) 式もしくは (22) 式が、地球自転振り子の運動方程式を解いた場合、そのとき得られる一般解である。これらの式の積分定数 A, B を初期条件で決定すれば、振り子の運動軌道が得られる。したがってここでは、(22) 式よりも表現式の形が、さらに簡素化されている (21) 式を使って、振り子の運動軌道を求めてみる。

まず (21) 式を $e^{*i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ の公式で書き換えると

$$\begin{aligned} Z &= A\{\cos(n-1)\omega t + i\sin(n-1)\omega t\} \\ &\quad + B\{\cos(n+1)\omega t - i\sin(n+1)\omega t\} \\ &= A\cos(n-1)\omega t + B\cos(n+1)\omega t \\ &\quad + i\{A\sin(n-1)\omega t - B\sin(n+1)\omega t\} \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2 \quad \dots\dots (33)$$

とおくと、上式は

$$\begin{aligned} Z &= (A_1 + iA_2)\cos(n-1)\omega t + (B_1 + iB_2) \cdot \\ &\quad \cos(n+1)\omega t + i\{(A_1 + iA_2)\sin(n-1)\omega t \\ &\quad - (B_1 + iB_2)\sin(n+1)\omega t\} \\ \therefore Z &= A_1\cos(n-1)\omega t + B_1\cos(n+1)\omega t \\ &\quad - A_2\sin(n-1)\omega t + B_2\sin(n+1)\omega t \\ &\quad + i\{A_1\sin(n-1)\omega t - B_1\sin(n+1)\omega t \\ &\quad + A_2\cos(n-1)\omega t + B_2\cos(n+1)\omega t\} \\ &\quad \dots\dots (34) \end{aligned}$$

となる。しかるに、(18) 式でわかるように、 $Z = \xi + i\eta$ であるから、上式より

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A_1\cos(n-1)\omega t + B_1\cos(n+1)\omega t \\ &\quad - A_2\sin(n-1)\omega t + B_2\sin(n+1)\omega t \\ \eta &= A_1\sin(n-1)\omega t - B_1\sin(n+1)\omega t \\ &\quad + A_2\cos(n-1)\omega t + B_2\cos(n+1)\omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

が得られる。本式の積分定数を初期条件で決定すれば、振り子の運動軌道が得られるわけであるが、そのためには振り子の速度が必要である。ゆえに、(35) 式を時間 t で微分して、速度を求めて見ると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -(n-1)\omega A_1 \sin(n-1)\omega t - (n+1)\omega \cdot \\ &\quad B_1 \sin(n+1)\omega t - (n-1)\omega A_2 \cos(n-1)\omega t \\ &\quad + (n+1)\omega B_2 \cos(n+1)\omega t \\ \frac{d\eta}{dt} &= (n-1)\omega A_1 \cos(n-1)\omega t - (n+1)\omega \cdot \\ &\quad B_1 \cos(n+1)\omega t - (n-1)\omega A_2 \sin(n-1)\omega t \\ &\quad - (n+1)\omega B_2 \sin(n+1)\omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)$$

となる。

さて次に、初期条件を設定して、積分定数を決定しなければならない。しかし、初期条件としては種々のものが考えられる。そのためここでは、従来の在来軌道表現式との比較が直接可能となるように、以下のような条件を設定することにした。すなわち、振り子へ東向きに δ_0 の初期変位を与え、静かに放したとすれば、このときの初期条件は

$$\left[\xi \right]_{t=0} = 0, \left[\frac{d\xi}{dt} \right]_{t=0} = 0; \left[\eta \right]_{t=0} = \delta_0, \left[\frac{d\eta}{dt} \right]_{t=0} = 0 \dots\dots(37)$$

で表わされる。これらの条件を (35) 式と (36) 式に適用すれば、まず $\left[\xi \right]_{t=0} = 0$ より

$$A_1 + B_1 = 0, \therefore B_1 = -A_1 \dots\dots(38)$$

となり、また $\left[\frac{d\xi}{dt} \right]_{t=0} = 0$ からは

$$\begin{aligned} -(n-1)\omega A_2 + (n+1)\omega B_2 &= 0 \\ \therefore B_2 &= \frac{n-1}{n+1} A_2 \end{aligned} \dots\dots(39)$$

が得られる。同様にして、 $\left[\eta \right]_{t=0} = \delta_0$ より

$$A_2 + B_2 = \delta_0 \dots\dots(40)$$

となり、 $\left[\frac{d\eta}{dt} \right]_{t=0} = 0$ からは

$$\begin{aligned} (n-1)\omega A_1 - (n+1)\omega B_1 &= 0 \\ \therefore (n-1)A_1 - (n+1)B_1 &= 0 \end{aligned} \dots\dots(41)$$

を得る。そこで、この (41) 式へ (38) 式を代入すれば

$$2nA_1 = 0, \therefore A_1 = 0, (\because n \neq 0)$$

となるが、このことはまた、(38) 式により

$$B_1 (= -A_1) = 0 \dots\dots(42)$$

でなければならないことを示す。次に (39) 式を (40) 式に代入すると

$$A_2 = \frac{n+1}{2n} \delta_0 \dots\dots(43)$$

となり、これを (39) 式に代入して

$$B_2 = \frac{n-1}{2n} \delta_0 \dots\dots(44)$$

が得られる。したがって、これらの関係を (35) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{n+1}{2n} \delta_0 \sin(n-1)\omega t \\ &\quad + \frac{n-1}{2n} \delta_0 \sin(n+1)\omega t \\ \eta &= \frac{n+1}{2n} \delta_0 \cos(n-1)\omega t \\ &\quad + \frac{n-1}{2n} \delta_0 \cos(n+1)\omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

を得る。本式をさらに整理すると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\delta_0}{n} (n \cos n\omega t \sin \omega t - \sin n\omega t \cos \omega t) \\ \eta &= \frac{\delta_0}{n} (n \cos n\omega t \cos \omega t + \sin n\omega t \sin \omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

となる。この (46) 式が従来から採用されている有名な、地球自転の振り子の運動軌道を表わす式であり、これまでにしばしば述べてきた在来軌道表現式とは、具体的にはこの式のことを意味する。在来軌道表現式をこの (46) 式の形で表現し、それを筆者は以前に示しておいたことがある。¹⁾

あるいは、この (46) 式を $\omega = \Omega \sin \phi$ および $n\omega = \sqrt{g/l}$ の関係、つまり (11) 式および (15) 式の関係を使って書き替えてみると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \delta_0 \{ \sin(\Omega \sin \phi \cdot t) \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) - \sqrt{l/g} \cdot \\ &\quad (\Omega \sin \phi) \cos(\Omega \sin \phi \cdot t) \sin(\sqrt{g/l} \cdot t) \} \\ \eta &= \delta_0 \{ \cos(\Omega \sin \phi \cdot t) \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) + \sqrt{l/g} \cdot \\ &\quad (\Omega \sin \phi) \sin(\Omega \sin \phi \cdot t) \sin(\sqrt{g/l} \cdot t) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

となる。これは従来からフーコーの振り子の運動軌道を表わす式として、最もよく見受けられる在来の軌道表現式と完全に一致する。^{7),8)} 本報告書では (47) 式に対しても、前の (46) 式と同様に、それを在来軌道表現式と呼ぶことにしている。

ただし、(46) 式すなわち (47) 式の運動軌道は、旋回ジブクレーンのつり荷重の運動方程式から得られた (14) 式、もしくは (10) 式の厳密解として求めたものである。しかも (14) 式、すなわち (10) 式には、 $\Omega^2 \sin^2 \phi \cdot \xi$ および $\Omega^2 \sin^2 \phi \cdot \eta$ で表わされる遠心力が、明確に含まれている。したがって、前にも述べたように、(46) 式もしくは (47) 式の在来軌道表現式の中には、地球自転のために発生する遠心力のうち、 ζ 軸方向の角速度成分 $\Omega \sin \phi$ による遠心力の影響が含

まれていることは明白であり、ただξ軸方向の成分Ω・cosφによる遠心力の影響が含まれていない。

つまり、これら(46)式、ないし(47)式の在来軌道表現式の中には、支点軸まわりに生ずる遠心力が確実に含まれている、という結論が得られる。

しかるに繰り返して述べてきたように、この在来軌道表現式は、支点軸まわりの遠心力を考慮した(10)式の運動方程式に対して、その厳密解として得られたものであった。よって、いま述べた結論は言い替えると、地球自転の振り子に対する運動方程式には、支点軸まわりの遠心力を考慮するのが妥当であり、振り子の運動には見掛けの重力加速度g以外にも、地球自転の遠心力が確かに影響をおよぼしているという結論になる。

9. 振り子運動のもつ軌道特性

(16)式の運動方程式は(14)式もしくは(10)式と全く同等であるが、これまでに述べたことにより、この運動方程式の厳密解を求めると、その場合は(46)式として示した地球自転の振り子に対する在来軌道表現式が得られる、ということを知った。したがってここでは、この在来軌道表現式を使用することにより、振り子が持っている運動特性をしらべてみる。

ところが、運動方程式の解としては在来軌道表現式と名づけた(46)式の表現形のほかに、(24)式のベクトル形式でも、それを表わすことができた。そこで最初に、この(24)式を使用した場合について、振り子運動の持つ軌道特性を述べることにする。そのためには、(24)式のZの中に含まれる積分定数AとBを、まず決定しておかなければならない。ベクトルZ₀は(23)式で表わされるが、その中のAとBは(42)式、(43)式および(44)式の値を使用すれば、(33)式により決定できる。そこで、(42)式と(43)式および(44)式で与えられている積分定数の値を、(33)式に代入すると

$$A = iA_2 = \frac{\delta_0}{2n} i(n+1), \quad B = iB_2 = -\frac{\delta_0}{2n} i(n-1) \quad \dots\dots(48)$$

となるが、これを(24)式の中のZ₀を表わす(23)式に代入すれば

$$Z_0 = Ae^{i\sqrt{g/l}\cdot t} + Be^{-i\sqrt{g/l}\cdot t} = \frac{\delta_0}{2n} i(n+1) e^{i\sqrt{g/l}\cdot t} + \frac{\delta_0}{2n} i(n-1) e^{-i\sqrt{g/l}\cdot t}$$

$$\dots\dots(49)$$

を得る。ここでまた、 $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$ の公式で、この(49)式を書き替えてみると

$$Z_0 = \frac{\delta_0}{n} \{-\sin(\sqrt{g/l}\cdot t) + in \cos(\sqrt{g/l}\cdot t)\} \quad \dots\dots(50)$$

となる。この複素ベクトルZ₀をわかりやすくするために

$$Z_0 = \xi_0 + i\eta_0 \quad \dots\dots(51)$$

とおくと、(50)式からは

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{\delta_0}{n} \sin(\sqrt{g/l}\cdot t) \\ \eta_0 &= \delta_0 \cos(\sqrt{g/l}\cdot t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(52)$$

が得られ、ベクトルZ₀は次のように楕円運動を表わすことがわかる。すなわち、(52)式を2乗して加えると

$$\frac{\xi_0^2}{(\delta_0/n)^2} + \frac{\eta_0^2}{\delta_0^2} = 1 \quad \dots\dots(53)$$

となり、これは長径の半長がδ₀、短径の半長がδ₀/nの楕円の方程式である。この楕円の長軸は最初に与えられた変位δ₀の方向と一致し、その方向は地球の自転とは無関係に、常に一定の方向を保持する。

ところが、振り子運動の全体を表わす(24)式によれば

$$Z = Z_0 e^{-i\omega t} = Z_0 e^{-i(\Omega \sin\phi)t}$$

であるから、このうちで楕円運動を表わすZ₀のベクトルは、 $-\omega = -\Omega \sin\phi$ の角速度で回転していくことがわかる。これは(24)式のところでも述べておいたように、コリオリの力の作用によるものである。

この模様を定性的に図示すれば、図2のようになる

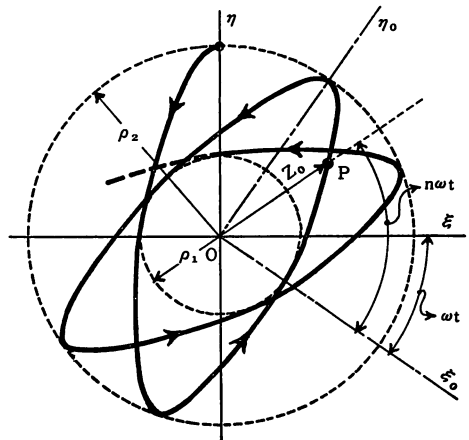


図 2

とされている。¹⁰⁾ 図には (53) 式で表わされる楕円の長径と短径を、それぞれの直径として持つ二つの同心円を点線で示しておいた。この図からわかるように、振り子は内径 $\rho_1 (= \delta_0/n)$ と外径 $\rho_2 (= \delta_0)$ の同心円にかこまれた円環内だけで運動し、内径 ρ_1 の円の中に振り子がいり込むことは絶対にない。これは地球が一定値の回転角速度を持つためである。この運動圏外となる内円が、筆者によって以前提示された地球自転の振り子に対する内円にほかならない。¹¹⁾ しかし、ここでは今回のように直交座標 $\xi\eta$ 軸によらず、極座標を使用し、この内円の存在を示しておいた。したがって、内円の半径 ρ_1 の算定法が前回と今回とは異なることになる。

この内円の半径 ρ_1 は、 $\rho_1 = \delta_0/n$ で表わされるので

$$\rho_1 = \delta_0 \omega / \sqrt{g/l} = \delta_0 (\Omega \sin \phi) \sqrt{l/g} \dots\dots (54)$$

で求められる。この (54) 式の表現についても、それを筆者は以前に提示しておいた。¹¹⁾ ただし、 ϕ は振り子の設置された地点の緯度であり、 l は振り子のつり糸の長さ、 δ_0 は振り子に与えた初期変位を示し、この δ_0 は運動軌道を持つ外円の半径 ρ_2 である。また、前述のように Ω と g の値は

$$\Omega = 7.292 \times 10^{-5} (\text{rad/sec})$$

$$g = 9.8 (\text{m/sec}^2) = 980 (\text{cm/sec}^2)$$

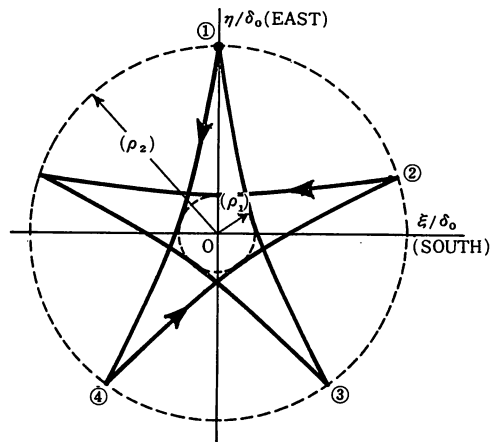
で表わされる。

(54) 式によれば、 ρ_1 は $\omega = \Omega \sin \phi$ できまり、この ρ_1 を半径に持つ内円はコリオリの力によって出現する。したがって、 $\omega \neq 0$ なる限り内円は必ず存在し、支点軸の回転がない $\omega = 0$ の時にのみ、 $\rho_1 = 0$ となることがわかる。つまり、赤道上に設置される振り子を除き、地球上のすべての振り子の運動軌道には、内円が必ず存在することになる。

ただ、あとで示す ρ_1 の具体値でもわかるように、実際面では $\omega/\sqrt{g/l} \approx 0$ の関係が成立するため、 $\rho_1 \approx 0$ という現実的な認識をしているに過ぎない。なお、 $\rho_1 = 0$ の時が、同一鉛直平面内で振動する単振り子の運動に当たる。 ρ_1 は \sqrt{l} に比例するため、振り子のつり糸の長さが短いものほど、単振り子の運動に近くなる。

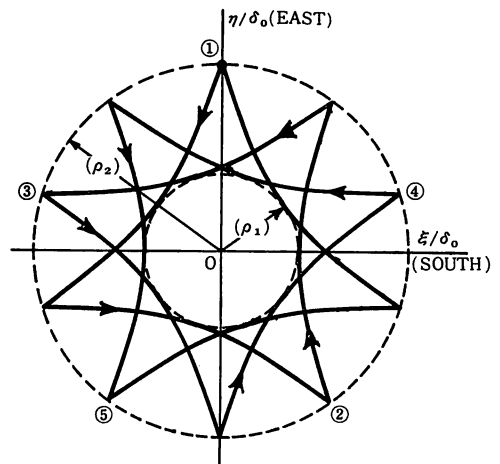
以上は (24) 式のベクトル表示式を使用することにより、振り子運動が持つ軌道特性について述べたものである。しかし、もっと具体的にしかも定量的に、振り子の持つ運動特性を理解するためには、(46) 式を使用すればよい。そこで次に (46) 式を使って、 $n=5$,

$n=2.5$ の場合につき、振り子の運動軌道を描いたものが、図3と図4である。図の中の①, ②, ③, …… は一周期毎の振り子の位置を順番に示したものであり、かつ振り子の運動軌道を表わす実線につけた矢印は、その進行方向を示す。



$n=5, \rho_2/\delta_0=1.0, \rho_1/\delta_0=0.2$

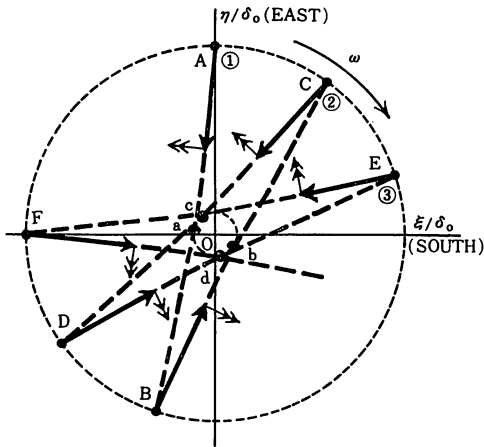
図 3



$n=2.5, \rho_2/\delta_0=1.0, \rho_1/\delta_0=0.4$

図 4

これらの図を見ると、その中には内円の存在が明りように現われている。このような内円の存在が可能になるのは、コリオリの力が働いていることにその原因があり、この内円の存在とコリオリの力の作用方向とを考慮すれば、振り子振動面の回転が簡潔に説明できることになる。つまり、この内円の存在は、振り子振動面の回転方向が、支点軸の回転方向とは逆方向でな



$$n=10, \rho_2/\delta_0=1.0, \rho_1/\delta_0=0.1$$

図 5

なければならない，ということを明確に規定してくれる。

例えば，図5に示すような $n=10$ の場合について，このことを説明すると次のようになる。ただしこの場合，振り子の運動方向を決定づける最も単純な法則としては，コリオリの力の働く向きがある。すなわち，それをいま，北半球について述べると，コリオリの力は振り子の進行方向に向かって，必ず右側方向に働く，という簡単な性質である。この性質と運動軌道の持つ内円の存在とを念頭におけば，振り子の運動軌道に対する説明は，以下に述べるような簡潔でしかも明確なものになる。

まずはじめに，図5のA点から出発して，実線の一つ矢印の向きに進行する振り子に対しては，右側向きを示す実線の二つ矢印の方向にコリオリの力が働く。したがって，振り子は内円上のa点に向かって，その内円に接するように運動し，半周期後には外円上のB点に達する。次にこのB点からのもどり運動時には，振り子の進行方向に向かって，右側向きにコリオリの力が働き，このために振り子はb点で内円に接するように進行し，一周期後には外円上のC点に到達する。

以下同様にして，次の一周期間では，振り子はC点から内円上の接点cを通して，外円のD点に至り，つづくあとの半周期期間では，内円のd点を通して外円のE点に到達し，同様の運動をくり返していく。

このように，コリオリの力が振り子の進行方向に対して常に右向きに作用するため，振り子は内円に対しては，常にその右側から接するように運動していく。その結果，振り子の振動面は図のA点からC点，E点の順に回転することになる。このことをわかりやすく

するために図の中には，さらに①，②，③，……の番号を付して，振り子振動面の回転方向を明示しておいた。

この時，振り子の軌道が内円に接する点と，振動中心O点とを結ぶ半径に対して，振り子の軌道は常に対称な形を取る。このこととコリオリの力の働く方向とを考え合せるとき，振り子の運動軌道は，その進行方向に対して右側にそれてゆく。これが振動面の回転となって現われるわけであり，振り子の進行してゆく軌道は，数式計算にたよるまでもなく，概念的な推察のみで予測し，かつその正確な作図も可能となる。このようにして，内円の存在が振動面の回転を，明確に規定する要因であることがわかる。

なお，南半球においては，コリオリの力が振り子の進行方向に向かって，必ず左側向きに働く。このため振り子は常に内円を右側に見るようにそれに接して運動し，振動面の回転が北半球とは反対となる。このことは $n < 0$ と解釈してもよいわけであり，これはまた(14)式の左辺で，第2項のコリオリ加速度の符号のみが逆転することから考えて，容易に理解できる。

しかしながら，実際のフーコーの振り子では，内円の半径 ρ_1 は全く問題にならない程非常に小さい。すなわち，フーコーがその有名な実験に使用した振り子の周期 τ_1 は， $\tau_1=16$ (sec) であったとされている。⁷⁾ そこで，この値を使用すると $\sqrt{l/g}=\tau_1/(2\pi)=8/\pi=2.55$ (sec) となる。いま，パリーの緯度を $\phi=48.7^\circ$ とおけば， $\sin 48.7^\circ=0.75$ となり，かつ振り子の外円の半径 $\rho_2(=\delta_0)$ を 3.5 (m) と仮定して，内円の半径 ρ_1 を(54)式によって計算してみると

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \delta_0 \Omega \sin \phi / \sqrt{g/l} = \delta_0 (\Omega \sin \phi) \sqrt{l/g} \\ &= 3.5 \times 10^3 \times 7.292 \times 10^{-5} \times 0.75 \times 2.55 \\ &\approx 0.49 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

が得られる。この程度の値は，それを視覚で識別しようと思っても殆んど不可能である。このように，地表に設置される通常の振り子の場合， $\Omega \ll \sqrt{g/l}$ の関係により，一般的には $\rho_1 \approx 0$ と見なしてもよいことがわかる。

だからと言って，この内円が存在しないと仮定したのでは，振り子の運動を軌道表現式の数値計算なしに，推察のみで予測しようとした際，振動面の回転はコリオリの力だけで説明せざるを得なくなり，一周期間内の振り子の振動面が交叉するかも知れない，といった推理も可能となる。実際に振り子の振動面がその振動

の中心点で、交叉して描かれた運動軌道図を、現在発行されている文献上で確かに見受ける場合のあることも事実である。しかし、内円の存在を最初に説定しておけば、このような推理はたちどころに否定される。

すなわち、内円の存在を認識していなければ、(46)式の軌道表現式を手数をかけて数値計算したのち、その結果を図に描いて示すか、もしくは図2を得た(24)式のような数学的説明にたよる以外には、振り子の軌道図と振動面回転を簡潔に説明することは困難である。このことは前に述べた図5の説明により容易に理解できると考える。

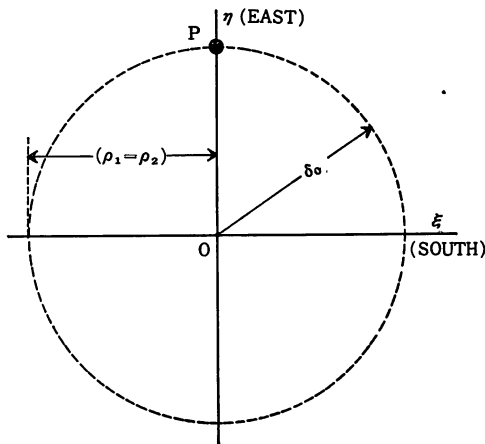


図 6

なお、図6は $n=1$ の場合を図示したものである。この場合には、支点軸の回転角速度と振り子振動面の回転角速度が、ちょうど相等しくなる。したがって、振り子は初期条件として与えた点Pに停留し、半径 δ_0 の円周上の同一点Pの位置を保持しながら、支点軸と共に回転することがわかる。しかも本図によれば、この場合 $\rho_1 = \rho_2 = \delta_0$ となるため、振り子の運動軌道に存在する内円と外円は一致し、一個の円に重なってしまうこともわかる。つまり、この $n=1$ のとき、遠心力と重力の支点軸まわりに作るモーメントが打ち消し合い、振り子は復原力を失ってしまう。そのため、振り子はコリオリの力だけで運動することになり、普通の意味での振動現象とはならない。このことについては簡単な模型実験を実施すれば、容易にそれを確認することができる。

また、通常の旋回ジブクレーンでは、この $n=1$ の際、無抵抗時のつり荷重の運動は無限大となる。この

$n=1$ がいわゆる同調現象のおこるジブの回転数に対応し、これは筆者が以前に提唱しておいたクレーンの「危険回転数」を表わす。¹¹⁾ 実際にこの危険回転数のとき、クレーンの転倒事故や崩壊事故が最も多く発生する。しかし、このような危険回転数が存在するのは、ジブ半径 r_0 の先端に荷重をつるして、ジブを回転させた場合にのみ限定されるわけであり、 $r_0=0$ とおいた支点軸の回転では、危険回転数に相当するものは存在しない。このことは(7)式もしくは(8)式で示した運動方程式で、それらの第1式の右辺にある $\omega^2 r_0$ の項が、強制力の役目をしていることから見ても容易に理解できる。

10. 静止座標系における運動軌道

これまで振り子運動の軌道特性を述べるために、自転する地球とともに回転する $\xi\eta$ 座標系を使用して説明をしてきた。しかし、このような運動特性は静止座標系で考えると、以下のようにもっと簡潔に示すことができる。前に示した図1によれば、静止座標は x, y で表わされる。したがって $\xi\eta$ 座標系と xy 座標系の間には、ここで示す図7でもわかる如く、次の変換式が成立している。すなわち

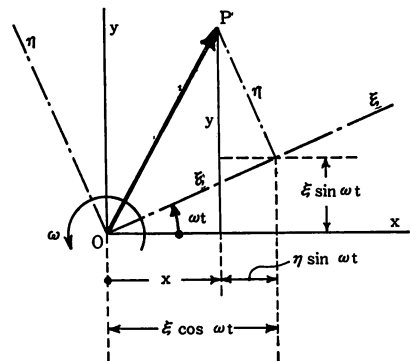


図 7

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t \\ y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots (55)$$

よって、この(55)式に(46)式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{\delta_0}{n} \sin n\omega t = -\frac{\delta_0}{n} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t \right) \\ y &= \delta_0 \cos n\omega t = \delta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (56)$$

を得る。このように(46)式の運動軌道は静止座標系

で見た場合、非常に簡単に表現できるが、ここで(56)式の二つの式を2乗して加えると

$$\frac{x^2}{(\delta_0/n)^2} + \frac{y^2}{\delta_0^2} = 1 \quad \dots\dots (57)$$

となり、これは半長径と半短径の長さがそれぞれ、 δ_0 および δ_0/n の大きさを持つ楕円を表わす。つまり、振り子の運動を静止座標系の中で観察した場合、振り子は一定の楕円運動をなし、この楕円の長軸は常に y 軸方向を保持する。この (57) 式からも地球自転の振り子には、 $\delta_0 = \rho_2$ と $\delta_0/n = \rho_1$ の半径を持つ外円と内円の存在することがわかる。

次に、(56) 式からこの場合の速度を求めると、

$n\omega = \sqrt{g/l}$ であるから

$$\frac{dx}{dt} = -\delta_0 \omega \cos(\sqrt{g/l} \cdot t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\delta_0 \sqrt{g/l} \sin(\sqrt{g/l} \cdot t)$$

となるので、 $t=0$ とおいた初期条件としては

$$[x]_{t=0} = 0, \left[\frac{dx}{dt} \right]_{t=0} = -\delta_0 \omega; [y]_{t=0} = \delta_0, \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \dots\dots (58)$$

を得る。これが前から一貫して使用してきた $\xi\eta$ 座標系における

$$[\xi]_{t=0} = 0, \left[\frac{d\xi}{dt} \right]_{t=0} = 0; [\eta]_{t=0} = \delta_0, \left[\frac{d\eta}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \dots\dots (58')$$

の初期条件 (37) 式に当たるわけである。

上記の (58) 式は静止座標 xy 軸系における場合、 $t=0$ で y 軸方向に δ_0 だけ変位させておき、かつ x 軸の方向には $\delta_0 \omega$ の負の初期速度を与えて振り子を振らせた、ということの意味する。この x 軸方向に与えられた負の初期速度が、静止空間においては (57) 式のような楕円運動を、振り子に発現させる直接の原因である。ただし、このことは (58) 式すなわち (58') 式の初期条件を使用した場合に限る。しかも、このとき振り子の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0, \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}y = 0 \quad \dots\dots (59)$$

の形で表わされる。この (59) 式はその内容が (10) 式と実質的には全く同じものになっており、それは (55) 式の関係から得られる ξ, η を、(10) 式に代入すれば容易に求めることができる。

このようにして、 xy 座標系における振り子の運動は図8に示すとおり、その運動軌道上を左まわりにまわる楕円運動となる、ということがわかる。この楕円

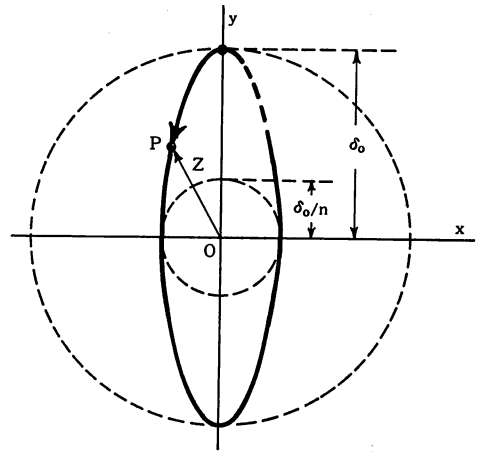


図 8

運動で $n=5, n=2.5, n=10$ および $n=1$ とおいたものは、それぞれ前述の $\xi\eta$ 座標系で示した図3、図4、図5および図6の場合の運動軌道に対応する。

図8でわかるように、振り子の運動は単振り子の運動とは異なり、振動面が鉛直平面内には存在しない。すなわち、これは通常の球面振り子の運動を表わす。したがって、地表に設置されたすべての振り子は、厳密に言えば球面振り子を形成し、その振動面はごくわずかではあるが曲面をなす、ということがわかる。ところがこのような球面振り子に対しては、一般に面積効果のために、その運動軌道の持つ楕円軸が振り子の運動方向に向かって、近似的に

$$\bar{\omega} = -\frac{3\pi}{4n} \frac{\delta_0^2}{l^2} = \frac{3\pi}{4} \left(\frac{\delta_0}{l} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{g/l}} \quad \dots\dots (60)$$

の角速度で回転するとされている。¹²⁾

この $\bar{\omega}$ は $\xi\eta$ 座標系における振動面の回転角速度とは反対向きとなり、これは $\xi\eta$ 座標系での回転角速度に加算されなければならない。ただし、通常の振り子の場合には

$$n \gg \frac{3\pi}{4}, l > \delta_0 \quad \dots\dots (60')$$

となるのが普通であるから

$$\bar{\omega} \approx 0$$

となり、この面積効果は常に無視しても差し支えない。

このように、面積効果は無視してもよいので、それが問題になることはめったに無いものとする。しかし、初期条件は振り子の運動に決定的な影響をおよぼす。例えば初期条件としていま

$$[x]_{t=0}=0, \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0}=0; [y]_{t=0}=\delta_0, \left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=0}=0 \dots (61)$$

と仮定した場合、(59)式の運動方程式によれば、振り子の運動軌道は

$$x=0, y=\delta_0 \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) \dots (62)$$

となる。これは同一直線上の単弦振動を表わすので、振り子の運動は同じ鉛直平面内でおこる。

そこで、(62)式を(55)式に代入して、 ξ, η を求めると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \delta_0 \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) \sin \omega t \\ \eta &= \delta_0 \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots (63)$$

となり、 $\xi\eta$ 座標系での初期条件は

$$[\xi]_{t=0}=0, \left[\frac{d\xi}{dt}\right]_{t=0}=\omega\delta_0; [\eta]_{t=0}=\delta_0, \left[\frac{d\eta}{dt}\right]_{t=0}=0 \dots (63')$$

で表わされる。(63)式は δ_0 の振幅を持つ鉛直振動平面が $\omega=\Omega \sin \phi$ の角速度で支点軸の回転とは逆まわりに回転することを表わす。そして(63')式は振り子に δ_0 の初期変位を η 軸方向に与えておき、その点で ξ 軸方向に $\omega\delta_0$ の初期速度を与えたことを意味する。したがってこの場合、振り子の運動軌道には内円が存在しないことになる。

ところで、振り子へ(63')式の初期条件を与えるためにはいささか技巧を要するが、地表で振り子を自然に振らした場合には、(58')式の初期条件が実現されたと見なしてよい。よって、地表で振らせた振り子の運動軌道には、必ず内円が存在すると考えるのが妥当であると思う。

11. 結 言

本報告書では、筆者が以前に求めておいた旋回ジブクレーンつり荷重の運動方程式を利用すれば、地球自転の振り子に対する運動方程式が、従来の形よりもさらに一般化された形で得られることを述べた。そしてしかも、その厳密解を求めてみると、振り子の運動軌道を表わす式として、古くから採用されている在来形の軌道表現式が得られる、ということ述べた。

いま、つり糸の長さを l 、重力加速度を g で表わし、なおかつ Ω で地球の自転角速度を、また振り子設置点の緯度を ϕ で表わすことにして、ここで得られた結論をまとめると、次のようになる。ただし、 ϕ は北半球上の値と仮定しておく。

(1) 地球自転の振り子に対しては、地球の自転現象のため発生する支点軸まわりの遠心力を、その運動方程式の中に考慮するのが妥当である。

(2) 支点軸まわりの地球自転による遠心力を、振り子の運動方程式に取り入れた場合、この運動方程式の厳密解を求めると、それは振り子運動に対する在来の軌道表現式と一致する。

(3) 地球自転の振り子の運動は、本質的には楕円運動である。この楕円の半長径の長さ ρ_2 をいま初期変位の大きさ δ_0 とすれば、半短径の長さ ρ_1 は

$$\rho_1 = \delta_0 (\Omega \sin \phi) / \sqrt{g/l} = \delta_0 (\Omega \sin \phi) \sqrt{l/g}$$

で表わされ、これら ρ_2 と ρ_1 はそれぞれ、振り子の運動軌道が持つ外円と内円の半径である。

(4) 支点軸が ω の角速度で回転する振り子の運動軌道には、運動圏外となる

$$\rho_1 = \delta_0 \omega / \sqrt{g/l} = \delta_0 \omega \sqrt{l/g}$$

の半径を持つ内円が必ず存在する。したがって、地表に設置されたすべての振り子の運動軌道は、半径が $\rho_1 = \delta_0 \Omega \sin \phi / \sqrt{g/l}$ の内円を持つことになる。しかしながら、地球上では常に $\Omega \ll \sqrt{g/l}$ の条件が成立しているために、 $\rho_1 \approx 0$ と見なしてもよい。

(5) 旋回角速度 ω 、ジブ半径 r_0 である旋回ジブクレーンつり荷重の運動方程式で、 $\omega = \Omega \sin \phi$ 、 $r_0 = 0$ とおけば、地球自転の振り子の運動方程式が得られる。

参 考 文 献

- 1) 富 武満：旋回腕につるされた荷重（第1報，旋回中のつり荷重の運動），西部造船会会報，第29号，昭40.2.
- 2) 富 武満・桜沢義邦：旋回ジブクレーンつり荷重の運動，鹿児島大学工学部研究報告，第9号，昭43.3.
- 3) 東京大学応用物理学学術編：力学（東京大学基礎工学，3），p. 89，東京大学出版会，1976.2. 20，第11刷.
- 4) 清野節男・金山道雄：力学要論，p. 95，東京図書（株），1963.11.30，発行.
- 5) 森口繁一：初等力学，p. 205，培風館，昭41.6.10，初版第12刷.
- 6) Jerry B. MARION: Classical Dynamics of Particles and Systems, Academic Press International Edition, Academic Press Inc., New York, (1965).
- 7) 坂井卓三：一般力学，p.101，東西出版社，昭23.10.1，発行.
- 8) 守屋富次郎・鷲津久一郎：力学概論，p.109，培

- 風館，昭43.4.20，改訂版。
- 9) 谷口 修・遠藤 満：力学（理工学基礎講座，14），p. 60，朝倉書店，昭53.8.25，初版。
- 10) 中川憲治：工学のための一般力学，p. 201，森北出版(株)，1977.6.20，第1版。
- 11) 富 武満：旋回腕につるされた荷重（第2報，つり荷重の運動による旋回クレーンの転倒モーメント），西部造船会会報，第29号，昭40.2。
- 12) 庄司彦六：力学概論，p. 108，内田老鶴園新社，昭43.4.5，訂正2刷。
-