

横衝撃荷重を受ける Timoshenko はりの 過渡応答 (続報)

田 中 豊・富 地 豊 子

(受理 昭和 54 年 5 月 31 日)

THE TRANSIENT RESPONSES OF THE TIMOSHENKO BEAMS UNDER TRANSVERSE IMPACT (CONTINUED REPORT)

Yutaka TANAKA and Toyoko TOMICHI

Following the last paper, the transient responses of Timoshenko beams under transverse impact were calculated. Theoretical analysis was carried out by Laplace transform techniques for two types of loading applied to a end of semiinfinite beam. And bending moment, angular velocity, shear force and deflection velocity were calculated at the region $\tau/\alpha < \xi < \tau$ mainly.

Obtained results from numerical evaluation are as follow.

- (1) The discontinuities in shear force and in deflection velocity arise at the end are propagated with constant magnitude and speed $C_q (= \sqrt{k'G/\rho})$.
- (2) The magnitude of these discontinuities can be evaluated by use of Eq (21), Eq (22) in this paper.
- (3) The values of bending moment, angular velocity, shear force and deflection velocity are zero at the bending wave front.

1. ま え が き

横衝撃をうけるはりにおける応力波の発生および伝ばの様相を明らかにすることは、実用的にも重要な課題の一つである。このようなはりの横衝撃問題を解析するには、基礎式としてははりの横振動方程式を用いるのを普通とするが、これらの方程式には従来から次の二種類のものを用いられている。その一つは、たわみは曲げモーメントのみによつて Bernoulli-Euler の方程式であり、他は更にはり断面の回転慣性とせん断力の影響を考慮に入れた Timoshenko の方程式である。これらのうち前者は計算が容易であるため、振動や衝撃問題に広く用いられているが、波動がはりに沿って無限大の速度で伝ばするという物理的矛盾を含んでいる。一方 Timoshenko の方程式は前者と比べて、より厳密な振動方程式であるばかりでなく、また同時に曲げ波およびせん断波の伝ばを示す波動方程式でもあるので応力波の伝ばを論ずるには現在のところ

最も適切な方程式であると考えられる。しかしこの方程式にラプラス変換またはフーリエ変換を用いて求めた解は、はなはだ計算の困難な定積分の形で与えられるため、Flügge, Zajac⁹⁾ 以来この解は実用的でないとき、この解法に代つて近似解法(たとえば特性曲線法など)が電子計算機の発達にともない盛んに用いられるようになって来た。しかし、このような近似計算法も厳密解と照合して始めてその近似度の評価、および適正な用法が定まるものであるから、いま、ここで電子計算機により複雑な計算を行い、Timoshenko 方程式の厳密解を求めておくことも意義あることと思われる。このことに関し筆者らは前報¹¹⁾において、Timoshenko の方程式にラプラス変換を用いてその解を求め、主としてせん断波到達後の領域における曲げモーメントの計算を試みた結果、この領域では計算が比較的容易であることを明らかにしたが、今回は曲げ波およびせん断波の波頭付近におけるはり断面の曲げモーメント、角速度、せん断力、ならびにはりのたわみ速度についてその伝ばの状態を調査し、併せて数値

実験的にその計算可能限界を検討したのでその結果を以下に報告する。

2. 理論解析

Timoshenkoの方程式にラプラス変換を用いて解を求める手順は既に前報に詳しいが今回は曲げモーメントの他にはり断面の角速度、せん断力およびはりのたわみ速度をも求めたので重複をかえりみずその要点だけを述べる。

2.1 基礎式

はり断面の回転慣性とせん断変形を考慮したTimoshenkoの横振動方程式¹⁾は次式で与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\rho I + EI \frac{\rho}{k'G}) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

ここで、 x ；衝撃点を原点としたはりの軸方向の座標、 y ；はりのたわみ、 t ；時間、 E 、 G 、 ρ ；はり材料の縦弾性係数、横弾性係数、密度、 I 、 A ；はり断面の2次モーメント、面積、 k' ；断面の平均せん断応力と最大せん断応力との比である。いま

$$\xi = x/\kappa, \quad \bar{y} = y/\kappa, \quad \tau = C_M t/\kappa, \quad \bar{M} = M\kappa/(EI), \\ \bar{Q} = Q/(EA), \quad \alpha^2 = E/(k'G) = (C_M/C_Q)^2 \quad \dots\dots(2)$$

ただし、 κ ；はり断面の回転半径、 C_M 、 C_Q ；曲げ波およびせん断波の伝ば速度のように、必要な物理量を無次元化する。このとき式(1)は

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \tau^2} - (1 + \alpha^2) \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \tau^4} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

となる。またはり断面の曲げモーメント $\bar{M}(\xi, \tau)$ 、角速度 $\bar{\omega}(\xi, \tau)$ 、せん断力 $\bar{Q}(\xi, \tau)$ 、はりのたわみ速度 $\bar{v}(\xi, \tau)$ および曲げモーメントによるたわみ角 $\psi(\xi, \tau)$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(\xi, \tau) &= -\{(\partial^2 \bar{y}/\partial \xi^2) - \alpha^2 (\partial^2 \bar{y}/\partial \tau^2)\} \\ \bar{\omega}(\xi, \tau) &= \partial \psi / \partial \tau \\ \bar{Q}(\xi, \tau) &= (1/\alpha^2) \{(\partial \bar{y}/\partial \xi) - \psi\} \\ \bar{v}(\xi, \tau) &= \partial \bar{y} / \partial \tau \\ \psi(\xi, \tau) &= -\int \bar{M}(\xi, \tau) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と書き表わすことができる。

つぎに式(3)をラプラス変換して

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \xi^4} - (1 + \alpha^2) p^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \xi^2} + p^2 \bar{y} + \alpha^2 p^4 \bar{y} = 0 \quad \dots\dots(5)$$

となり式(5)の解は、 $\xi \rightarrow \infty$ で $\bar{y} \rightarrow 0$ なる条件を用いると

$$\bar{y} = C_1 e^{-\lambda_1 \xi} + C_2 e^{-\lambda_2 \xi} \quad \dots\dots(6)$$

となる。ただし、 C_1 、 C_2 は境界条件で定まる p の関数で、 λ_1 、 λ_2 は $a = (\alpha^2 + 1)/2$ 、 $b = (\alpha^2 - 1)/2$ とすれば

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sqrt{p} (ap \mp \sqrt{b^2 p^2 - 1})^{1/2} \quad \dots\dots(7)$$

である。

一方、式(4)に対応するラプラス変換表示は

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(\xi, p) &= -\{(\partial^2 \bar{y}/\partial \xi^2) - \alpha^2 p^2 \bar{y}\} \\ \bar{\omega}(\xi, p) &= p \bar{\psi} \\ \bar{Q}(\xi, p) &= (1/\alpha^2) \{(\partial \bar{y}/\partial \xi) - \bar{\psi}\} \\ \bar{v}(\xi, p) &= p \bar{y} \\ \bar{\psi}(\xi, p) &= -\int \bar{M}(\xi, p) d\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4')$$

ここで式(6)を式(4)'に代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(\xi, p) &= C_1 (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) e^{-\lambda_1 \xi} + C_2 (\alpha^2 p^2 \\ &\quad - \lambda_2^2) e^{-\lambda_2 \xi} \\ \bar{\omega}(\xi, p) &= C_1 \{p (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) / \lambda_1\} e^{-\lambda_1 \xi} \\ &\quad + C_2 \{p (\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) / \lambda_2\} e^{-\lambda_2 \xi} \\ \bar{Q}(\xi, p) &= -C_1 (p^2 / \lambda_1) e^{-\lambda_1 \xi} \\ &\quad - C_2 (p^2 / \lambda_2) e^{-\lambda_2 \xi} \\ \bar{v}(\xi, p) &= C_1 p e^{-\lambda_1 \xi} + C_2 p e^{-\lambda_2 \xi} \\ \bar{\psi}(\xi, p) &= C_1 \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) / \lambda_1\} e^{-\lambda_1 \xi} \\ &\quad + C_2 \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) / \lambda_2\} e^{-\lambda_2 \xi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.2 横衝撃荷重をうける半無限長はりの諸応答の計算

2.2.1 弾性棒が半無限長はりの一端に衝突する場合

この場合は衝突点において $\bar{M}(0, \tau) = 0$ であるから式(6)と式(4)において $\xi = 0$ で $\bar{y} = \bar{y}_0$ 、 $\bar{M}(0, p) = 0$ とおくと、 C_1 、 C_2 はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \bar{y}_0 (\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ C_2 &= -\bar{y}_0 (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

また、棒とはりとの接触条件は、小高・中原によると棒直下のはり部分の慣性を無視すると

$$A'E'(V - dy_0/dt)/C_M' + Q_0 = 0 \quad \dots\dots(10)$$

となる。ただし、 A' ；衝撃棒の断面積、 E' ；棒材料の縦弾性係数、 V ；棒の衝突直前の弾性棒の速度、 Q_0 ；衝撃点のはり断面に働くせん断力、 C_M' ；棒を伝わる縦波の伝ば速度である。上式を無次元化し、

$\mu' = AEC_M' / (A'E'C_M)$ とおき式 (10) をラプラス変換すると

$$(1/\mu')(\bar{V}/p - p\bar{y}_0) + \bar{Q}_0 = 0 \quad \dots\dots (10)'$$

を得ることができる。(8) の第3式と式 (9) より \bar{Q}_0 を求め、式 (10)' に代入して \bar{y}_0 を求めると

$$\bar{y}_0 = \bar{y}(0, p) = \frac{\bar{V}}{p^2} \times \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \quad (11)$$

となる。式 (11) を式 (9) に代入して C_1, C_2 を決定し、式 (6) を用いて $\bar{y}(\xi, p)$ を求めると

$$\bar{y}(\xi, p) = \frac{\bar{V}}{p^2} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \frac{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2)e^{-\lambda_1 \xi} - (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2)e^{-\lambda_2 \xi}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \quad (12)$$

が得られる。同様に C_1, C_2 を式 (8) に代入することにより所要の $\bar{M}(\xi, p), \bar{\omega}(\xi, p), \bar{Q}(\xi, p), \bar{v}(\xi, p)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{M}(\xi, p) &= \bar{V} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &\times \frac{e^{-\lambda_1 \xi} - e^{-\lambda_2 \xi}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \\ \bar{\omega}(\xi, p) &= \bar{V} \frac{p\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &\times \frac{e^{-\lambda_1 \xi}/\lambda_1 - e^{-\lambda_2 \xi}/\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \\ \bar{Q}(\xi, p) &= \bar{V} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &\times \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \\ &\times [\{(\lambda_2^2 - \alpha^2 p^2)/\lambda_1\} e^{-\lambda_1 \xi} - \{(\lambda_1^2 - \alpha^2 p^2)/\lambda_2\} e^{-\lambda_2 \xi}] \\ \bar{v}(\xi, p) &= -\bar{V} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{p^2} \\ &\times \frac{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2)e^{-\lambda_1 \xi} - (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2)e^{-\lambda_2 \xi}}{2\sqrt{b^2 p^2 - 1}\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} - \mu' (\lambda_1 - \lambda_2) (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \\ \bar{\psi}(\xi, p) &= \bar{V} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &\times \frac{e^{-\lambda_1 \xi}/\lambda_1 - e^{-\lambda_2 \xi}/\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \mu' p (p + \sqrt{1 + \alpha^2 p^2})} \quad \dots\dots (13) \end{aligned}$$

以上の (13) を前報の手順に従って

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} g(\xi, p) e^{p\xi} dp$$

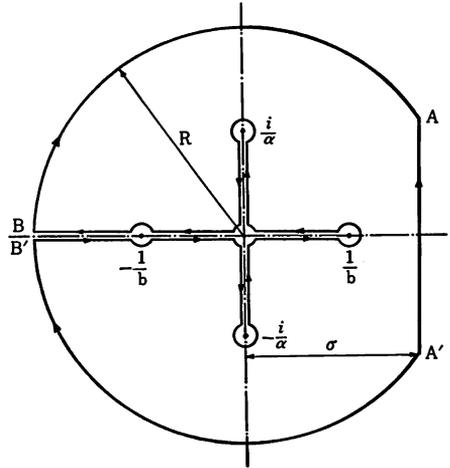


図1 P平面における積分路

(ただし、 $g(\xi, p) = \bar{M}(\xi, p), \bar{\omega}(\xi, p), \bar{Q}(\xi, p)$ なる逆変換の式をつくり、図1の p 平面における積分路に沿って矢印方向に線積分を行うとつぎのようになる。

表 1

	$\bar{M}(\xi, \tau)$	$\bar{\omega}(\xi, \tau)$	$\bar{Q}(\xi, \tau)$	$\bar{v}(\xi, \tau)$
$\tau < \xi$	0	0	0	0
$\tau/\alpha < \xi < \tau$	$I_1 + I_2$	$I_4 + I_5$	$I_7 + I_8$	$I_{10} + I_{11} + D_1$
$\xi < \tau/\alpha$	$I_2 + I_3$	$I_5 + I_6$	$I_8 + I_9$	$I_{11} + I_{12} + D_2$

ここで

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/b} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 r^2}}{\Psi_1} \cos\phi_2 \xi \sinh(r\tau) \\ &\quad - \phi_1 \xi) dr \\ I_2 &= -\frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/\alpha} \frac{r\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}}{|\Phi_2|^2} \{Re(\Phi_2) \cos r\tau \sinh\phi_3 \xi \\ &\quad - I_m(\Phi_2) \sin r\tau \cosh\phi_3 \xi\} dr \\ I_3 &= -\frac{2\bar{V}_1}{\pi} \int_0^{1/\alpha} \frac{r\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}}{|\Phi_2|^2} I_m(\Phi_2) \sin(r\tau - \phi_4 \xi) dr \\ I_4 &= -\frac{\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/b} \frac{1}{\Psi_1} \{\phi_1 \cos\phi_2 \xi \sinh(r\tau - \phi_1 \xi) \\ &\quad - \phi_2 \sin\phi_3 \xi \cosh(r\tau - \phi_1 \xi)\} dr \\ I_5 &= -\frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/\alpha} \frac{r\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}}{\phi_3 |\Phi_2|^2} \{Re(\Phi_2) \sin r\tau \\ &\quad \cosh\phi_3 \xi + I_m(\Phi_2) \cos r\tau \sinh\phi_3 \xi\} dr \\ I_6 &= -\frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/\alpha} \frac{r\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}}{\phi_4 |\Phi_2|^2} I_m(\Phi_2) \sin(r\tau \\ &\quad - \phi_4 \xi) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \frac{\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/b} \frac{1}{\Psi_1} \{Re(\Phi_3) \cos \phi_3 \xi \cosh(r\tau - \phi_1 \xi) \\
 &\quad - \phi_1 \xi + I_m(\Phi_3) \sin \phi_3 \xi \sinh(r\tau - \phi_1 \xi)\} dr \\
 I_8 &= \frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\phi_4 (br - \sqrt{1+b^2r^2})}{|\Phi_2|^2} \{Re(\Phi_2) \cos r\tau \\
 &\quad \times \cosh \phi_3 \xi - I_m(\Phi_2) \sin r\tau \sinh \phi_3 \xi\} dr \\
 I_9 &= \frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\phi_3 (br + \sqrt{1+b^2r^2})}{|\Phi_2|^2} I_m(\Phi_2) \cos(r\tau \\
 &\quad - \phi_4 \xi) dr \\
 I_{10} &= -\frac{\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/b} \frac{\sqrt{1+\alpha^2r^2}}{\Psi_1} \{\sqrt{1-b^2r^2} \sin \phi_3 \xi \\
 &\quad \times \sinh(r\tau - \phi_1 \xi) + br \cos \phi_3 \xi \cosh(r\tau - \phi_1 \xi)\} dr \\
 I_{11} &= \frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\sqrt{1-\alpha^2r^2} (br - \sqrt{1+b^2r^2})}{|\Phi_2|^2} \\
 &\times \{Re(\Phi_2) \sin r\tau \sinh \phi_3 \xi + I_m(\Phi_2) \cos r\tau \cosh \phi_3 \xi\} dr \\
 I_{12} &= -\frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\sqrt{1-\alpha^2r^2} (br + \sqrt{1+b^2r^2})}{|\Phi_2|^2} \\
 &\times I_m(\Phi_2) \cos(r\tau - \phi_4 \xi) dr \\
 D_1 &= -(I_{13} + I_{14}) \\
 D_2 &= \alpha \bar{V} / (\alpha + \mu') - (I_{14} + I_{15}) \quad \dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \sqrt{r} (\sqrt{1+\alpha^2r^2} + ar)^{1/2} / \sqrt{2} \\
 \phi_2 &= \sqrt{r} (\sqrt{1+\alpha^2r^2} - ar)^{1/2} / \sqrt{2} \\
 \phi_3 &= \sqrt{r} (\sqrt{1+b^2r^2} - ar)^{1/2} \\
 \phi_4 &= \sqrt{r} (\sqrt{1+b^2r^2} + ar)^{1/2} \\
 \Psi_1 &= \phi_2 \{2\phi_1 \sqrt{1+\alpha^2r^2} + \mu'r(r + \sqrt{1+\alpha^2r^2})\} \\
 \Phi_1 &= (\phi_3 \sqrt{1-\alpha^2r^2} - \mu'r) \\
 &\quad + i(\phi_4 + \mu'r) \sqrt{1-\alpha^2r^2} \\
 \Phi_2 &= (\phi_3 - i\phi_4) \Phi_1 \\
 \Phi_3 &= (\phi_1 - i\phi_2) (br + i\sqrt{1-b^2r^2}) \\
 I_{13} &= -\frac{\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/b} \frac{br \sqrt{1+\alpha^2r^2}}{\Psi_1} dr \\
 I_{14} &= \frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\sqrt{1-\alpha^2r^2} (br - \sqrt{1+b^2r^2})}{|\Phi_2|^2} I_m(\Phi_2) dr \\
 I_{15} &= -\frac{2\bar{V}}{\pi} \int_0^{1/a} \frac{\sqrt{1-\alpha^2r^2}}{|\Phi_2|^2} \\
 &\times (br + \sqrt{1+b^2r^2}) I_m(\Phi_2) dr
 \end{aligned}$$

ただし, 上記の計算のうち $\bar{v}(\xi, p)$ の計算に当っては, (13) の第4式にみるようにその分母に p^2 なる因数を有するため, 図1の p 平面上の $p=0$ に高次の分岐点を生じ, そのため逆変換の計算が困難となるので,

式 (13) の $\bar{v}(\xi, p)$ を直接逆変換することは避け, 付録に示すような手順に従って計算を行った.

2. 2. 2 半無限長はりの一端に step velocity を与えた場合

この場合, 衝撃点における条件は, $\xi=0$ で $\bar{y}_0 = \bar{V}\tau$, また $\bar{M}=0$ であるので式 (6) と (4)' の第1式を用いて

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (\bar{V}/p^2) \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\} \\
 C_2 &= -(\bar{V}/p^2) \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\}
 \end{aligned} \quad \dots (15)$$

となる. 従って

$$\begin{aligned}
 \bar{M}(\xi, p) &= -\frac{\bar{V}}{2p \sqrt{b^2 p^2 - 1}} (e^{-\lambda_1 \xi} - e^{-\lambda_2 \xi}) \\
 \bar{w}(\xi, p) &= -\frac{\bar{V}}{2\sqrt{b^2 p^2 - 1}} \left(\frac{e^{-\lambda_1 \xi}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 \xi}}{\lambda_2} \right) \\
 \bar{Q}(\xi, p) &= \frac{\bar{V}}{2p \sqrt{b^2 p^2 - 1}} \left(\frac{\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \xi} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \xi} \right) \\
 \bar{v}(\xi, p) &= -\frac{\bar{V}}{2p^2 \sqrt{b^2 p^2 - 1}} \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) e^{-\lambda_1 \xi} \\
 &\quad - (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) e^{-\lambda_2 \xi}\} \\
 \bar{\psi}(\xi, p) &= -\frac{\bar{V}}{p} \frac{1}{2\sqrt{b^2 p^2 - 1}} (e^{-\lambda_1 \xi} / \lambda_1 \\
 &\quad - e^{-\lambda_2 \xi} / \lambda_2)
 \end{aligned} \quad \dots\dots (16)$$

が得られる. この式 (16) は何れも式 (13) において $\mu'=0$ とおいた結果に等しい. 従って式 (16) の逆変換の結果は式 (14) における各定積分において $\mu'=0$ とおいたものを用いるとよい. ただし $\bar{v}(\xi, p)$ の場合にも高次の分岐点を有するので2.2.1の場合と同様に計算を行った. (付録参照)

3. 数値計算および結果の考察

3. 1 数値計算法

ラプラス逆変換の結果得られた解は $I_1 \sim I_{12}$ の定積分の形で与えられるので近似積分法によりその数値解を求める必要がある. しかしこれらの被積分関数の中には, 積分の上限または下限, またはその双方において分母が0になるものが含まれているので適当な変数変換により, その特異点を除去する必要がある. 本計算においては, その下限に特異点を有するものについて

ては $r=u^2$ (従って $dr=2udu$) (17) を、また上限に特異点を有するものについては $1/b-r=u^2$ または $1/a-r=u^2$ (従って $-dr=2udu$) (18) なる変数変換を施し、また上限、下限双方に特異点を有するものは、上限、下限値間の適当な値 (たとえば β) により定積分を分割して $\int_0^\beta + \int_\beta^{1/b}$ などとし、その各々について式 (17)、式 (18) による変換を行った。なお、全積分区間において特異点を有しない定積分においても式 (17) による変換を施すことによりその計算は極めて容易になることがわかったので以下のような計算にはすべて式 (17) の方法によった。また、これら被積分関数の中には高い周波数の振動関数に双曲線関数を重畳したものが含まれているため、 τ または ξ の大きな値に対する数値積分には充分の分割数と高い計算精度が要求される。この理由から、本計算では積分に Simpson 法を用い電子計算機により倍精度で計算精度を 10^{-8} または 10^{-4} に設定して計算を行った。ただし、計算には $\alpha=2$ 、 $\bar{V}=1.0$ なる数値を用いている。

3. 2 数値積分結果の考察

今回は主として、 $\tau/\alpha < \xi < \tau$ なる領域における応答について考察する。数値積分によって求められた諸応答の伝ばの様相を考察するに当り、図2を参考図として用いたのでまず図2の説明を行う。図2は横軸に ξ 軸、縦軸に τ 軸をとることにより規定された $\xi-\tau$ 平面を示している。図中、原点を通る L_1, L_2 はそれ

ぞれ $\xi=\tau$ ($x=C_M t$)、 $\xi=\tau/\alpha$ ($x=C_Q t$) なる直線であれも原点を出発した曲げ波およびせん断波の波頭の伝ば径路を示している。この2本の直線により、 $\xi-\tau$ 平面は3つの領域 I, II, IIIに分けられる。これらの領域のうち、領域 I は曲げ波もせん断波も到来していない領域であり、領域 II は曲げ波頭は通過しているがせん断波頭はまだ到達していない領域、また、領域 III は曲げ波頭、せん断波頭ともに通過した領域を示している。また図2における AB, CD, EF, GH なる4つの線分は、それぞれ $\tau=5, 10, 20, 30$ なる直線の部分を示し何れも $\xi=0$ で始まり $\xi=\tau$ で終わっている。また P, Q, R, S はこれら線分と L_2 との交点である。従ってたとえば $\tau=5$ の場合、AP は領域 III, PB は領域 II に属し、B 点は曲げ波の波頭、P 点はせん断波の波頭を示す。また、縦軸 JM は $\xi=20$ なる直線で、JF は領域 I, FK は領域 II, KM は領域 III に属しており、F 点は曲げ波の波頭、K 点はせん断波の波頭に相当する。

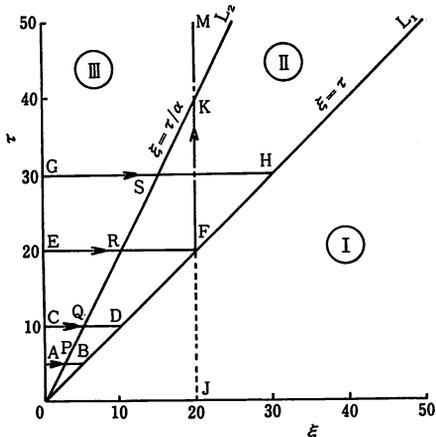


図2 $\xi-\tau$ 平面

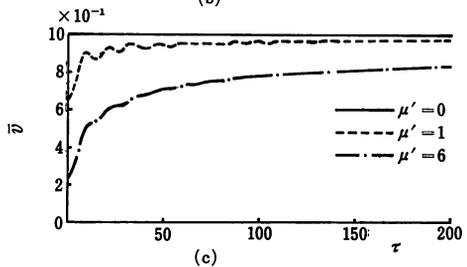
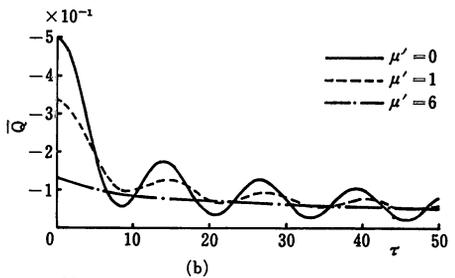
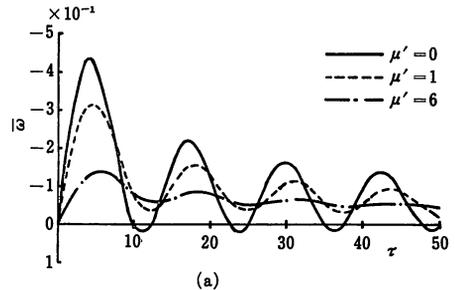


図3 衝撃点における $\bar{\omega}, \bar{Q}, \bar{v}$ の時間的变化

図3の (a), (b), (c) はそれぞれ $\xi=0$ において前述のように $\bar{V}=1.0$ で計算された $\bar{\omega}$, \bar{Q} , \bar{v} の時間的変化すなわち図2の τ 軸に沿った変化が示されている。 $\bar{M}(0, \tau)$ については, $\xi=0$ において 2.2.1, 2.2.2 の場合何れも τ にかかわらず常に 0 であるので図には示されていない。まず $\bar{\omega}(0, \tau)$ 曲線を見ると, $\tau=0$ においてその値は 0 から変化を起し, まもなく最大値に達し, 以後は次第に振動しながら減少する様子が見られる。これに対し $\bar{Q}(0, \tau)$, $\bar{v}(0, \tau)$ なる量は $\mu'=0, \mu'=1, \mu'=6$ の場合とも $\tau=0$ でそれぞれある一定の値 ($\mu'=0$ のときは $\bar{Q}=-0.5, \bar{v}=1.0, \mu'=1$ のときは $\bar{Q}=-0.333, \bar{v}=0.666, \mu'=6$ のときは $\bar{Q}=-0.125, \bar{v}=0.25$) から始まり $\bar{Q}(0, \tau)$ は振動しながら次第に減少し, $\bar{v}(0, \tau)$ は急激に増大した後 $\bar{v}=1$ に漸近していく。この図から我々がここで取り扱っているような横衝撃の場合には \bar{Q}, \bar{v} とも衝撃点で, 衝撃の開始と同時に突然ある有限の大きさの不連続量を生ずることがわかる。ところでこれら \bar{Q} および \bar{v} の不連続量の間には, 力積と運動量変化との関係から

$$[Q^*] = -(1/\alpha)[v^*] \quad \dots (19)$$

(ただし, $[Q^*], [v^*]$ はそれぞれ Q, v の不連続量を示す)

なる関係があることが知られている⁷⁾¹⁰⁾。従って 2.2.1 の場合には接触条件式 (10) における dy_0/dt に $[v^*]$ を, また Q_0 には $[Q^*]$ をそれぞれ代入して得られる関係式

$$A'E'(V-[v^*])/C_M' + [Q^*] = 0 \quad \dots (20)$$

と式 (19) とを連立して $[Q^*], [v^*]$ について解き, 無次元化した形で表わすと

$$\left. \begin{aligned} [\bar{v}^*] &= \alpha \bar{V} / (\alpha + \mu') \\ [\bar{Q}^*] &= -\bar{V} / (\alpha + \mu') \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

を得る。また 2.2.2 の場合は

$$\left. \begin{aligned} [\bar{v}^*] &= \bar{V} \\ [\bar{Q}^*] &= -(1/\alpha)[\bar{v}^*] = -\bar{V}/\alpha \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

となるが式 (21), 式 (22) で計算された値はそれぞれ上述の不連続量の値と正確に一致している。

また図4, 図5, 図6, 図7はそれぞれ図2に示す $\tau=5, 10, 20, 30$ における $\bar{M}(\xi, \tau)$, $\bar{\omega}(\xi, \tau)$, $\bar{Q}(\xi, \tau)$, $\bar{v}(\xi, \tau)$ の ξ に対する変化を示しているが, これらは図2における $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}, \vec{GH}$ に沿った諸応答の変化に相当する。

これらの図からまず \bar{M} および $\bar{\omega}$ は, $\xi=0$ からその値は連続的に変化し, $\xi=\tau$ ($x=C_M t$) なる曲げ波の

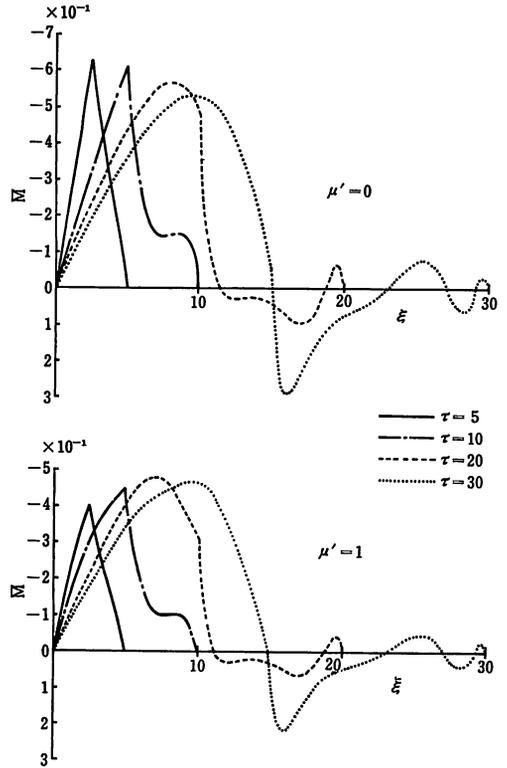


図4 $\bar{M}-\xi$ 曲線

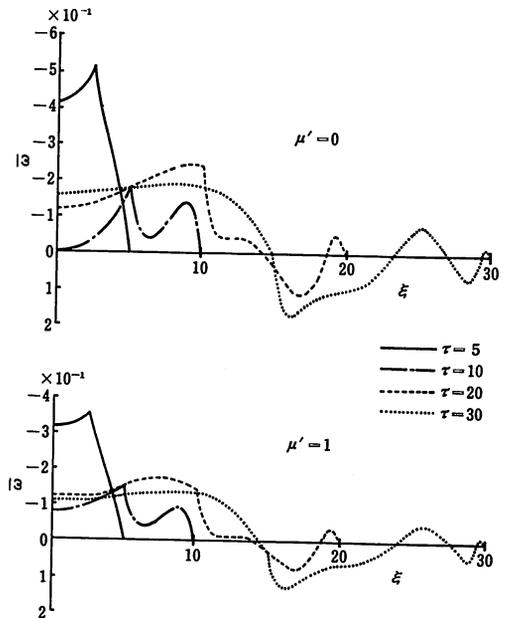


図5 $\bar{\omega}-\xi$ 曲線

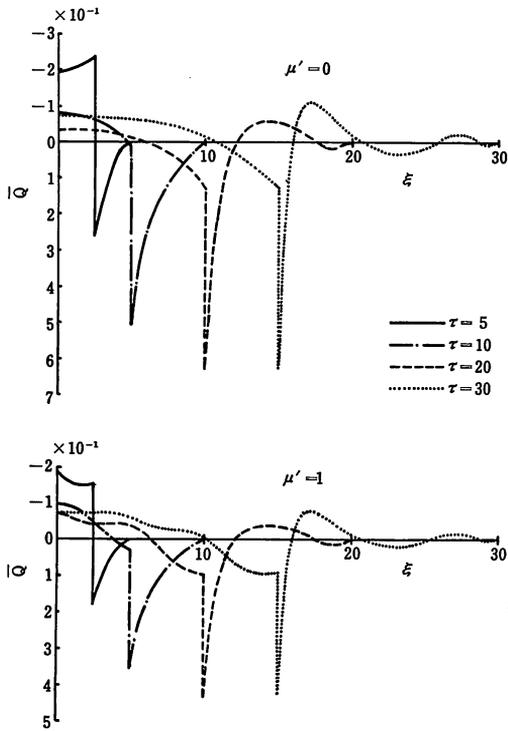


図6 $\bar{Q}-\xi$ 曲線

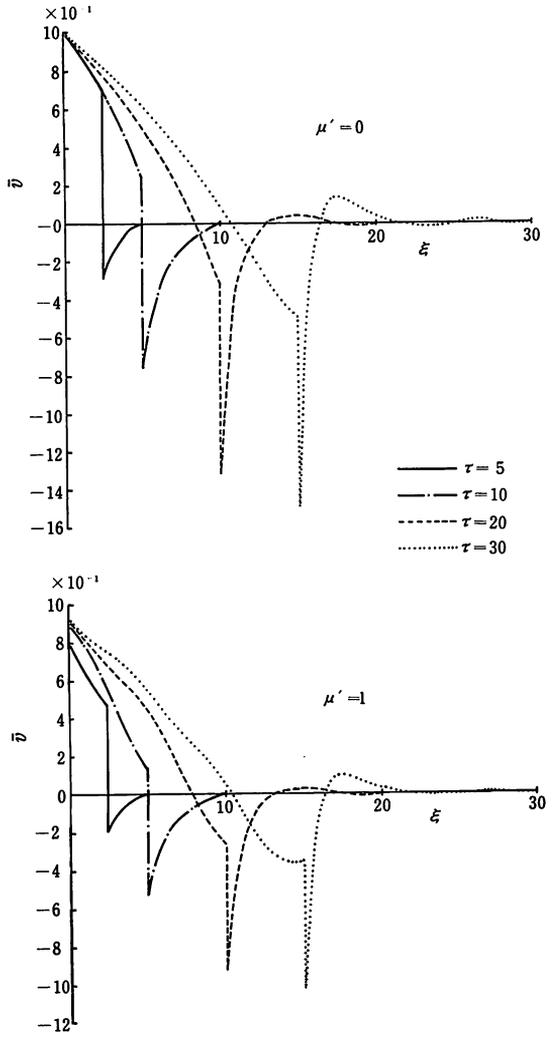


図7 $\bar{v}-\xi$ 曲線

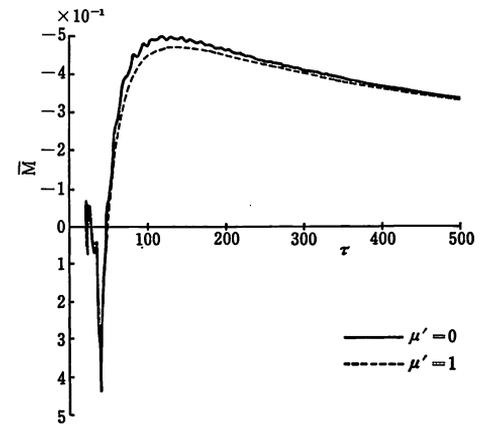


図8 $\bar{M}-\tau$ 曲線 $\xi=20$

波頭では0で終わっているが、その間 $\xi=\tau/\alpha$ なる点（図2における P, Q, R, S点）すなわちせん断波の波頭のところで、曲線の勾配に不連続を生じている。これに対して \bar{Q}, \bar{v} には同じく曲げ波頭では0になるが、 $\xi=\tau/\alpha$ の点で、共に曲線に断層を生じている。この \bar{Q}, \bar{v} における断層の大きさすなわち不連続量の大きさはそれぞれ $\mu'=1$ の場合 $-0.333, 0.666$, $\mu'=0$ の場合には $-0.5, 1.0$ でありそれぞれ式 (21), 式 (22) で計算された値に等しい。このことから衝撃と同時に衝撃点に発生したせん断力およびたわみ速度の不連続量はその大きさを変えずにせん断波の速度ではりに沿って伝ばしていることがわかる。

また図8, 図9, 図10, 図11はそれぞれ $\xi=20$ に対する $\bar{M}(20, \tau), \bar{\omega}(20, \tau), \bar{Q}(20, \tau), \bar{v}(20, \tau)$ の時間 τ に対する変化を示したもので図2の JFKM に沿う変化に相当する。これらの計算のうち、領域Ⅲに関する計算式にはすべて前述の式 (17) または式 (18) なる変数変換を行い $I_1 \sim I_{12}$ までの計算を行うと何れも $\xi=100, \tau=1,000$ 程度までの計算が可能であるが、作図上の関係から $\bar{\omega}(20, \tau), \bar{Q}(20, \tau)$, および $\bar{v}(20, \tau)$ の3つの量に対しては $\tau=100$ まで、また比

較的ゆるやかな曲線をえがく $\bar{M}(20, \tau)$ については $\tau=500$ までの波形が示されている。図8によると \bar{M} は最初領域 I では $\bar{M}=0$ で $\xi=\tau$ なる曲げ波頭の到達と同時に変動を始め、その後間もなく深い落ちこみ

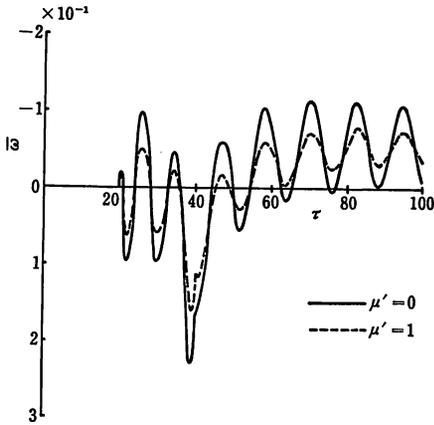


図9 $\bar{\omega}-\tau$ 曲線 $\xi=20$

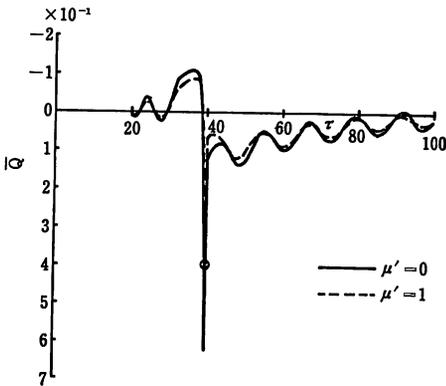


図10 $\bar{Q}-\tau$ 曲線 $\xi=20$

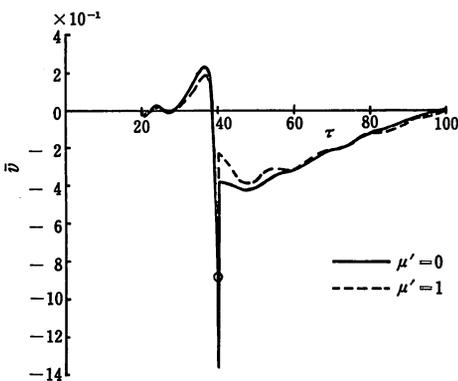


図11 $\bar{v}-\tau$ 曲線 $\xi=20$

を生じているが、その後反転して急激に増加した後最大値に達し、以後ゆるやかに減衰していく。この落ちこみの時刻は $\tau=\alpha\xi$ すなわちせん断波頭の到来した時刻に当り、伝ばしてきたせん断力の不連続波によるモーメントの急激な変動を示すものと考えられるが、曲線はここでその勾配に大きな不連続を生じている。つぎに図9に示されたはり断面の角速度 $\bar{\omega}$ は \bar{M} の場合と同じく、 $\tau=\xi$ の時刻から変化を起し振動波形を画きながら変化していくがこの範囲ではあまり減衰は見られない。また $\tau=\alpha\xi$ のせん断波頭到達時に前述と同様に波形曲線はその勾配に不連続を生じている。これに対し、図10、図11における \bar{Q} 、 \bar{v} の τ についての変化をみると、 $\tau=\xi$ から応答を始めることは前者と同じであるが、 $\tau=\alpha\xi$ (図2のK点) すなわちせん断波の波頭の到達時刻に近づくにつれて深く落ちこみ、 $\tau=\alpha\xi$ なる時刻に曲線に不連続を生じて垂直に上昇しているがその量は当然式 (21)、式 (22) で計算された量と一致している (図中、○印を施してあるが、これは $\mu'=1$ における落ちこみの最下点を示している)。しかし、その後は両者ともはげしい変化は見られない。

3.3 数値計算の難易度と可能限界

3.3.1 領域 II の場合

Timoshenko はりの衝撃応答に関する数値計算は従来から極めて難事であるとされてきた。しかし、我々の行った種々の計算試行の結果、計算の最も困難なところは領域 II であり、特に $\xi=\tau$ すなわち曲げ波頭付近であること、また、一旦 $\xi=\tau$ 上で計算が可能であるときは、その同じ ξ に対して、計算点をせん断波頭の方角に移行させるに従い計算は次第に容易になることが判った。従って $\xi=\tau$ 上のどの範囲まで計算可能であるかがこの領域の計算可能限界を定める目安になるであろう。また、3.2 で述べたように ξ の比較的小きな値 (約30まで) に対する計算結果によると、 $\xi=\tau$ 上における \bar{M} 、 $\bar{\omega}$ 、 \bar{Q} および \bar{v} の諸量はすべて0または0に極めて近い値をとるが、このことは ξ (従って τ) のより大きな値に対しても例外なく成立するはずである。故に、 $\xi=\tau$ 上でその計算結果が0に極めて近いかどうかで計算結果の正しさを判定することができるであろう。我々はこのような見地から、 $\xi=\tau$ 線上に等間隔に配置された計算点について $\bar{M} \sim \bar{v}$ までの4量を、まず計算精度 10^{-3} でそれぞれ計算を行い、その結果が0よりかけはなれた値を示すもの

については、さらに精度を1桁あげ 10^{-4} の精度で計算し、まだ充分でないものに対しては 10^{-5} の精度で計算を実行するという数値実験を行った。なお 10^{-5} の精度における計算は1点につき約6分の計算時間を要するのでそれ以上の精度に対する計算は行っていない。

このような数値実験の結果にもとづいて各量の計算の難易度を比較したところ、 $\bar{M}(\xi, \tau)$ が最も容易でありついで $\bar{\omega}(\xi, \tau)$ 、 $\bar{Q}(\xi, \tau)$ 、 $\bar{v}(\xi, \tau)$ の順に困難になること、およびそれらの計算可能な ξ または τ の最大値は 2.2.2 の場合すなわち $\mu' = 0$ の場合、精度 10^{-4} (10^{-5}) までの計算で $\bar{M}(\xi, \tau)$ では約35 (40)、最も困難な $\bar{v}(\xi, \tau)$ の場合では約26 (30) 程度であることが判った。なお、2.2.1 の場合は μ' の存在のため、計算は前者に比べて若干困難になる。また、前述したように、この領域では計算点が曲げ波頭の直後からせん断波頭の直前まで移行するに従いその計算は次第に容易となり、 $\xi = \tau$ 上で計算不能である ξ に対してもせん断波頭に近い所では十分に妥当な計算が容易かつ可能であるように思われる。ただし、この領域の計算値は実験と照合し難いのでその妥当性を判定することは困難である。

3. 3. 2 領域Ⅲの場合

この領域では τ が大きな値をとるため、最も計算が困難であろうとの予測に反し、その計算は前項に比べると格段に容易である。前報¹⁾においてはこの領域における \bar{M} の計算可能範囲は ξ については約80まで、 τ については約400程度までであると述べたが、前述のように定積分中でその上限、下限に特異点を有しないもの（例えば \bar{Q} の計算における I_0 ）についても式 (17) による変数変換を行ったところ、その計算可能範囲は著しく拡張され、 ξ については約100まで、 τ については約1000付近まで妥当な計算値の得られることが確認されている。従ってこの領域の計算は充分に実用計算の範囲に収ったとみてよいと思われる。

4. 結 語

半無限長よりの一端に2通りの横衝撃条件を与えた場合すなわち (i) 弾性棒がはりに垂直に衝突した場合、(ii) step velocity を与えた場合について、Timos-

henko の横振動方程式にラプラス変換を適用して、(i) の場合は小高・中原の接触条件を考慮することにより解析を行い、得られた解から Simpson 積分により数値解を求め、これによりはりを伝わる曲げ波およびせん断の波頭付近におけるはり断面の曲げモーメント、角速度、せん断力およびはりのたわみ速度についてその挙動を調査した。得られた結果を要約すると次の通りである。

(1) 上記 (i), (ii) の場合とも衝突直後、衝撃点にせん断力、はりのたわみ速度の不連続量 $[\bar{Q}^*]$ 、 $[\bar{v}^*]$ を生ずるが、この不連続量はその大きさを変えることなくせん断波の伝ば速度 $(\sqrt{k'G/\rho})$ ではりに沿って伝ばする。また、この不連続量の大きさは (i), (ii) の場合それぞれ式 (21)、式 (22) で計算できる。

(2) 曲げ波の波頭における \bar{M} 、 $\bar{\omega}$ 、 \bar{Q} 、 \bar{v} の値はすべて0である。

(3) 定積分の上限および下限において特異点を持たない被積分関数にも式 (17) による変数変換を行うとその計算範囲は著しく拡大され、特にせん断波通過後の領域Ⅲでは、 $\xi = 100$ 、 $\tau = 1,000$ 程度まで 10^{-3} の計算誤差で容易に計算可能である。

(4) $\tau/\alpha < \xi < \tau$ の領域における計算の難度は曲げ波の波頭の直後付近で最も著しく、倍精度の Simpson 法によるとその諸応答についての計算限界は、 $\xi = \tau$ 上において ξ (または τ) = 30~40 程度である。

最後に本研究にあたり、図面の作成等に御協力頂いた機械工学科の有富正男助手、本学大学院石原俊治、浜田秀樹、田中友治、三窪秀晃の諸君に厚く御礼申し上げます。

なお、計算には本学の電子計算機 FACOM230-45S を使用したことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) S. P. Timoshenko: Phil. Mag. Ser. 6, 41, (1921).
- 2) M. A. Dengler and M. Goland: Proc. 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics (1952).
- 3) M. Goland, P. D. Wickersham, and M. A. Dengler: J. App. Mech. 77, (1955).
- 4) W. H. Hoppmann, R. P. N. Jones and E. A. Ripperger: 同上 Discussion (1955).
- 5) B. A. Boley and C. C. Chao: J. App. Mech. 77, (1955).

- 6) H. N. Abramson: 同上 Discussion (1956).
- 7) Plass, H. J. Jr.: Proc. 2nd Midwestern Conf. on Solid Mech. (1955).
- 8) W. Flügge and E. E. Zajac: Ing. Arch., 28 (1959).
- 9) 小高・中原: 日本機械学会論文集, 33巻, 248号, 昭和42.4.
- 10) 田中: 鹿児島大学工学部研究報告, 第18号, 昭和51.12.
- 11) 田中・富地: 同上, 第20号, 昭和53.9.

付 録

すでに本文でも述べたように、 ξ なる点のたわみ速度 $\bar{v}(\xi, \tau)$ のラプラス変換された形は、2.2.1 の場合すなわち $\mu' \neq 0$ のときと 2.2.2 の場合すなわち $\mu' = 0$ のときはそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}(\xi, p) &= -\bar{V} \frac{\sqrt{1+\alpha^2 p^2}}{p^2} \\ &\times \frac{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) e^{-\lambda_1 \xi} - (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) e^{-\lambda_2 \xi}}{2\sqrt{b^2 p^2 - 1} \sqrt{1+\alpha^2 p^2} - \mu'(\lambda_1 - \lambda_2)(p + \sqrt{1+\alpha^2 p^2})} \\ \bar{v}(\xi, p) &= -\frac{\bar{V}}{2p^2 \sqrt{b^2 p^2 - 1}} \\ &\times \{(\alpha^2 p^2 - \lambda_2^2) e^{-\lambda_1 \xi} - (\alpha^2 p^2 - \lambda_1^2) e^{-\lambda_2 \xi}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

となり、双方とも分母に p^2 なる因数をもつ。この結果逆変換の際の線積分において図1の p 平面上の $p=0$ なる点で高次の分岐点を生じ逆変換の計算が非常に繁雑になる。従って本計算では $\bar{v}(\xi, \tau)$ を求めるのに式(1)を直接逆変換することを避け、Boley⁹⁾ の手法にならって次の方法によって求めた。

Timoshenko の方程式はまた次式で表わされることがある。

$$\left. \begin{aligned} \psi'' + (1/\alpha^2)(\bar{y}' - \psi) - \bar{\psi} &= 0 \\ \bar{y} - (1/\alpha^2)(\bar{y}' - \psi') &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ただし、 \cdot は ξ について、 $\dot{\cdot}$ は τ についての微分を表わす

(2) の第2式から $\bar{y} = (1/\alpha^2)(\bar{y}' - \psi')$

であるので

$$\dot{\bar{y}} = \bar{v} = \frac{1}{\alpha^2} \int (\bar{y}'' - \psi'') d\tau + f(\xi)$$

$$\text{すなわち } \dot{\bar{y}} = \bar{v} = \frac{1}{\alpha^2} \int (\bar{y}' - \psi)' d\tau + f(\xi) \dots\dots(3)$$

となる。一方 $\dot{\bar{y}}$ はまた次式のように表わすことができる。

$$\dot{\bar{y}} = \int \{(\bar{y}' - \psi)' + \dot{\psi}\} d\xi + g(\tau) \dots\dots(4)$$

ここで、 $f(\xi)$, $g(\tau)$ はそれぞれ ξ または τ のみの関数である。式(3), 式(4)に現われる $(1/\alpha^2) \times (\bar{y}' - \psi)$, $\dot{\psi}$ はせん断力および角速度であり表1と式(14)により、 (I_7, I_8, I_9) , (I_4, I_5, I_6) で与えられているので、これらの式を用いて、式(3), 式(4)を計算し両者を比較すると、 ξ, τ を含む項は全く等しくなるので、 $f(\xi)$, $g(\tau)$ は共に定数でなければならぬ。いま、この定数を D とすると式(3)により

$$\bar{v} = \frac{1}{\alpha^2} \int (\bar{y}' - \psi)' d\tau + D \dots\dots(5)$$

となる。この D は、はり運動の初期条件から求められる。

いま、 $\bar{Q}(\xi, \tau)$ における3つの定積分 $I_7 \sim I_9$ を式(5)に適用して D を含まない形で表わし、それぞれ I_{10}, I_{11}, I_{12} とすると

$$I_{10} = \int I_7(\xi, \tau)' d\tau, \quad I_{11} = \int I_8(\xi, \tau)' d\tau,$$

$$I_{12} = \int I_9(\xi, \tau)' d\tau$$

となる。

この結果 $\xi > \tau$ のとき $\bar{v} = 0$

$$\tau/\alpha < \xi < \tau \text{ のとき } \bar{v} = I_{10} + I_{11} + D_1$$

$$\xi < \tau/\alpha \text{ のとき } \bar{v} = I_{11} + I_{12} + D_2$$

となる。ただし、 D_1, D_2 は定数である。

つぎに初期条件のもとで D_1, D_2 を定める。

まず $[I_{10} + I_{11} + D_1]_{\xi \rightarrow 0} = 0$ であるから

$$D_1 = -[I_{10} + I_{11}]_{\xi \rightarrow 0}$$

又、 $[I_{11} + I_{12} + D_2]_{\xi \rightarrow 0} = \alpha \bar{V}/(\alpha + \mu')$

であるから $D_2 = \alpha \bar{V}/(\alpha + \mu') - [I_{11} + I_{12}]_{\xi \rightarrow 0}$

となり、 D_1, D_2 が決定される。この D_1, D_2 が本文の式(14)に示されている。

また、2.2.2 におけるはりの一端に step velocity が与えられた場合の \bar{v} は $I_{10}, I_{11}, I_{12}, D_1, D_2$ における μ' の値を0とおくことにより得られる。