一様ばりの横振動時における端末条件（第1報）

——端末条件について——

冨　　武　満

（受理　昭和53年5月31日）

END CONDITIONS FOR FLEXURAL VIBRATION OF UNIFORM BARS

(1st Report—End Conditions)

Takemitsu Tomi

In machine and structural design, it is necessary to predict the natural frequencies of machine parts and structural members in order to avoid resonance. The frequency equations can be obtained by applying end conditions to the solution of the equation of motion. In this case, it has been assumed that all the end conditions, anticipated on physical grounds, could be given before commencing with the calculations.

However, some of the end conditions should be obtained analytically through the calculations. This report is concerned with end conditions which have been obtained by the theoretical analysis of vibration for a thin uniform bar.

1. 緒　　言

はりや軸が横振動をするとき，両端の支持点には当然，支点反力や固着モーメントが発生する．これら支持抗力は強制振動のときには外力によりその大きさが決まり，振動方程式の強制解が得られると，振動変位が確定したことになり，支点抗力の大きさも容易に計算により求めることができる．

これに対して自由振動の場合には，これまでのところ固有振動数の算定に主目的がおかれており，振動方程式の解に初期条件を適用して振動変位を確定させ，支点抗力の値まで求めた研究が見受けられないようである．これは同調現象を避けるため，構造物や機械構成部材の強度計算においては，固有振動数の算定がきわめて重要であるとする立場を重視した結果ではないかと考える．この場合，もっぱら一般的に採用される振動方程式は，振動たわみが曲げモーメントのみでおこるとしたもっとも簡単な運動方程式である．これは通常 Bernoulli-Euler の方程式と呼ばれているが，ここでは，以後，この運動方程式を簡単のために単純曲げ振動方程式と呼ぶことにする．

本報告書はこの単純曲げ振動方程式を採用した場合，はりが自由振動をしているときに，両端の支持点に生ずる支点抗力について述べたものである．すなわち，たわみ振動をしているはりの端末モーメントや端末せん断力および端末変位の，相互間に成立すべき関係式を求めたものであり，本報告書ではそれらを振動端末条件式として示している．

2. 従来の研究

はりの振動問題は一般の境界値問題，もしくは固有値問題と呼ばれる分野に属するものであり，自由振動の場合，振動方程式の解として得られた正規関数の積分定数を，まず境界条件により決定する必要がある．ところがこの際，正規関数の積分定数のうち一個は未定のままに残り，その代りに振動に対する固有値として固有振動数が決定される．

このように，はりや軸の自由振動を一般の固有値問題の解法に従って解いて行く場合，すべての積分定数を決定して振動変位を確定させるためには，さらに初期条件の設定を明確にする必要がある．初期条件は初期変位と初期速度を，はりの長手方向の各場所につい

て指定すればよいわけであるが，これは任意性を持ち，かつ振動変位の計算にも手数を要する．

したがって従来の研究においては，自由振動時の支点抗力を理論的に求めたものがほとんど見当たらず，固有振動数の算定のみに主眼がおかれている．特に前述の単純曲げ振動方程式を採用した場合でも，低次振動に対しては，軸やはりの固有振動数を正確に求めることができる．しかし，重量軽減を目的とした溶接構造物などでは高次振動が発生しやすく，このような高次振動に対しては，単純曲げ振動方程式は正確な固有振動数を与えない．

このため，はりの衝撃問題を取扱う場合と同様に，高次振動を対象とするときには，せん断と断面回転慣性などの影響を考慮に入れた Timoshenko の方程式[1]が採用される． この Timoshenko の方程式で振動を取扱う場合のはりは，Timoshenko ばり[2] と呼ばれており， 最近では Timoshenko ばりに対する振動研究が多数実施されている．たとえば，Traill-Nash と Collar[3] は Timoshenko ばりに対する固有振動数を求めて，これを単純曲げ振動方程式による値と比較しており，金沢[4] もまた同様に Timoshenko ばりを取扱っている．

また Flügge[5] は Timoshenko ばりについて，曲げモーメント波とせん断波の二種類の弾性波が独自に伝播することを指摘し，これにつづいて Schirmer[6] も同様にはりの弾性波の伝播を取扱っているが，Dengler および Goland[7] は横衝撃を受ける Timoshenko ばりの弾性波を取扱っており，このほか同種類の研究は多数見受けられる．

さらに，Alice W. Mathewson[8)9)] は電子計算機によりせん断と回転慣性を考慮に入れた船体の固有振動数を算定しており，最近発表される船体振動に対する多数の研究ではほとんど電子計算機が使用されている．また，basic function を用いて振動方程式の解法を示したのが Inglis[10] であり，つづいて J. E. Rechards[11] や J. W. Ramsay[12] もこの basic function を用いているが，いずれも船体の固有振動数の算定法について述べたものである．

以上のように，これまでの研究においては，固有振動数を求めるのに主たる目的がおかれているため，使用する境界条件は物理的な推測などにより，すべてあらかじめ与えられたものとして理論解析が実施されている．しかしながら，はりが振動をおこすとき，いかなる端末条件が成立していなければならないか，ということを求めるのに主目的をおいて振動問題を考察して行けば，物理的な推察などを用いることなしに，振動時の端末条件のうち一部は理論的に算定できる性質のものであり，振動時におけるはりの端末条件と固有振動数との，理論的な対応関係が明確にできるはずである．

本報告書においては，もっとも簡単な単純曲げ振動方程式から出発して，固有振動数とそれに対応する端末条件とを理論的に求める方針を取ることにする．

3. 振動方程式とその解

長さ l, 曲げ剛性 EI, 単位長さあたりの質量 ρ_l の一様断面ばりが横振動をするとき，たわみを w で表わし，図1のように x 軸をはりの軸方向にとり，w 軸をこれに直角に取る．

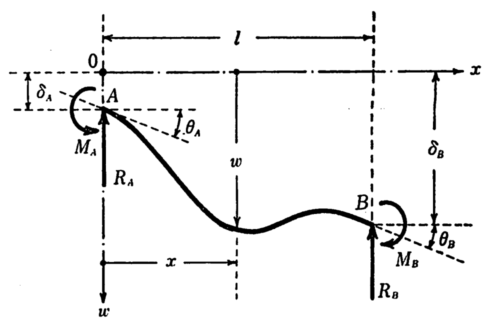

図 1

断面回転慣性とせん断による影響を無視した単純曲げによる振動方程式は

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho_l\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

となるが，両辺を EI で割ると，上式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\rho_l}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

のようになる．本式の解を

$$w=\varphi(x)\cdot\sin(\omega_n t+\alpha_n) \qquad \cdots\cdots(3)$$

とおけば

$$\varphi(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x \qquad \cdots\cdots(4)$$

で表わされる．ここで

$$\lambda=\sqrt[4]{\frac{\rho_l}{EI}\omega_n^2} \qquad \cdots\cdots(5)$$

であるから，λ の値がわかれば，固有円振動数 ω_n が

求められ，この λ は振動次数，つまり振動モードを与えることになる．

さて，図示のように，左端 A の支持反力を R_A，支持モーメントを M_A とし，またこの A 点のたわみを δ_A，たわみ角を θ_A とすれば，(4) 式の積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 は次のように境界条件できまる．ただし，抗力 R_A, M_A および変位 δ_A, θ_A は A 点に生ずる端末抗力と端末変位の最大振幅とする．なおまた，上層圧縮の曲げモーメントを正とし，左上り右下りのせん断力を正と約束すると

（i） $[\varphi]_{x=0}=\delta_A$ より，$C_1+C_3=\delta_A$

$$\therefore\ C_3=\delta_A-C_1 \qquad \cdots\cdots(6)$$

（ii） $\left[\dfrac{d\varphi}{dx}\right]_{x=0}=\theta_A$ より，$\lambda C_2+\lambda C_4=\theta_A$

$$\therefore\ C_4=\frac{\theta_A}{\lambda}-C_2 \qquad \cdots\cdots(7)$$

(iii) $\left[EI\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}\right]_{x=0}=M_A$ より，$EI\lambda^2(C_1-C_3)=-M_A$

$$\therefore\ C_1-C_3=-\frac{M_A}{EI\lambda^2} \qquad \cdots\cdots(8)$$

(iv) $\left[EI\dfrac{d^3\varphi}{dx^3}\right]_{x=0}=-R_A$ より，$EI\lambda^3(C_2-C_4)=R_A$

$$\therefore\ C_2-C_4=\frac{R_A}{EI\lambda^3} \qquad \cdots\cdots(9)$$

となる．よって，(6) 式～(9) 式から C_1, C_2, C_3, C_4 を求めると

$$C_1=\frac{(EI\lambda^2)\delta_A-M_A}{2EI\lambda^2},\quad C_2=\frac{(EI\lambda^2)\theta_A+R_A}{2EI\lambda^3}$$

$$C_3=\frac{(EI\lambda^2)\delta_A+M_A}{2EI\lambda^2},\quad C_4=\frac{(EI\lambda^2)\theta_A-R_A}{2EI\lambda^3}$$

となり，これらを (4) 式に代入すれば

$$\varphi(x)=\frac{1}{2EI\lambda^3}\{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\cos\lambda x +[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\sin\lambda x+\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A +M_A]\cosh\lambda x+[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\sinh\lambda x\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

が得られる．

4. 振動端末条件式と振動次数方程式

右端 B において，たわみとなわみ角を δ_B, θ_B とし，支持反力 R_B と支持モーメント M_B を図示のように仮定すれば，(10) 式により両端末における抗力と変位の満足すべき条件式が次のように得られる．すなわち

（i） $[\varphi]_{x=l}=\delta_B$ より

$$\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]}{2EI\lambda^3}\cos\lambda l+\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]}{2EI\lambda^3}\sin\lambda l +\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]}{2EI\lambda^3}\cosh\lambda l +\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]}{2EI\lambda^3}\sinh\lambda l=\delta_B \qquad \cdots\cdots(11)$$

（ii） $\left[\dfrac{d\varphi}{dx}\right]_{x=l}=\theta_B$ より

$$-\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]}{2EI\lambda^2}\sin\lambda l +\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]}{2EI\lambda^2}\cos\lambda l +\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]}{2EI\lambda^2}\sinh\lambda l +\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]}{2EI\lambda^2}\cosh\lambda l=\theta_B \qquad \cdots\cdots(12)$$

(iii) $\left[EI\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}\right]_{x=l}=M_B$ より

$$\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]}{2\lambda}\cos\lambda l +\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]}{2\lambda}\sin\lambda l -\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]}{2\lambda}\cosh\lambda l -\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]}{2\lambda}\sinh\lambda l=-M_B \qquad \cdots\cdots(13)$$

(iv) $\left[EI\dfrac{d^3\varphi}{dx^3}\right]_{x=l}=R_B$ より

$$-\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]}{2}\sin\lambda l +\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]}{2}\cos\lambda l -\frac{\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]}{2}\sinh\lambda l -\frac{[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]}{2}\cosh\lambda l=-R_B \qquad \cdots\cdots(14)$$

などが得られる．

さて，(11) 式と (13) 式を辺々加えた場合，および (12) 式と (14) 式を辺々加えた場合を計算してみると，$\cosh\lambda l$ と $\sinh\lambda l$ が消去されるので，次の (15) 式を得る．

$$\left.\begin{aligned}&\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\cos\lambda l+[(EI\lambda^2)\theta_A +R_A]\sin\lambda l=\lambda[(EI\lambda^2)\delta_B-M_B]\\&[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\cos\lambda l-\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A -M_A]\sin\lambda l=[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]\end{aligned}\right\}\cdots(15)$$

そこで，この (15) 式の第1式の両辺に$\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]$を乗じ，また第2式の両辺に$[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]$を乗じてこれらを加えると，$\cos\lambda l$の項が求められる．次に全く同様にして第1式の両辺に$[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]$を乗じ，また第2式には$-\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]$を乗じてそれらを加えると$\sin\lambda l$の項が求められ，それぞれの結果は次の (16) 式となる．

$$\left.\begin{array}{l}\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]^2+[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^2\}\cos\lambda l\\ \quad=\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B-M_B][(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\\ \qquad+[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B][(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\\ \{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]^2+[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^2\}\sin\lambda l\\ \quad=\lambda\{[(EI\lambda^2)\delta_B-M_B][(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\\ \qquad-[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B][(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\}\end{array}\right\}\cdots\text{(16)}$$

さらに，いまと全く同じ手順を踏襲して，(11) 式から (13) 式を引き算した場合と，また (12) 式から (14) 式を引き算した場合とを計算してみると，それぞれ

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\cosh\lambda l\\ \quad+[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\sinh\lambda l=\lambda[(EI\lambda^2)\delta_B+M_B]\\ [(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\cosh\lambda l\\ \quad+\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\sinh\lambda l=[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]\end{array}\right.$$

の式が得られる．そこで，$\sinh\lambda l$を消去するために，第1式の両辺に$\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]$を乗じ，また第2式の両辺に$-[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]$を乗じて加えた場合を計算し，なおかつ，$\cosh\lambda l$の項をおとすために，これらの第1式の両辺に$[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]$を乗じ，また第2式の両辺に$-\lambda[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]$を乗じて加えると，それぞれの結果として次の (17) 式を得る．すなわち

$$\left.\begin{array}{l}\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]^2-[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^2\}\cosh\lambda l\\ \quad=\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B+M_B][(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\\ \qquad-[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B][(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\\ \{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]^2-[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^2\}\sinh\lambda l\\ \quad=\lambda\{-[(EI\lambda^2)\delta_B+M_B][(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\\ \qquad+[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B][(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\}\end{array}\right\}\cdots\text{(17)}$$

が得られる．

はりの固有振動数は (16) 式と (17) 式で表わされる4個の式を同時に満足するλ，つまりλlの値を求めると得られるわけであるが，このとき$\cos^2\lambda l+\sin^2\lambda l=1$の関係があるので，いま (16) 式の二つを2乗して加えると

$$\begin{array}{l}\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]^2+[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^2\}^2\\ \quad=\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B-M_B][(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\\ \qquad+[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B][(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\}^2\\ \qquad+\lambda^2\{[(EI\lambda^2)\delta_B-M_B][(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\\ \qquad-[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B][(EI\lambda^2)\delta_A-M_A]\}^2\end{array}\quad\cdots\cdots\text{(18)}$$

となり，これは (16) 式のうちいずれかの式からλlを求めて，別の式に代入したことにあたる．したがって，(18) 式の中のλは既知の値であると考えてよく，(18) 式は実質上では両端末における変位，支点反力および支持モーメントの間に成立すべき関係を示す．λは振動のモードすなわち振動次数を与えるものであるから，(18) 式はその振動次数に対応する端末条件を表わし，(16) 式の2個のうち，いずれか1個はこの (18) 式で代用できることになる．

また，$\cosh^2\lambda l-\sinh^2\lambda l=1$の関係があるので，(17) 式の2つの式を2乗して引くと

$$\begin{array}{l}\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]^2-[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^2\}^2\\ \quad=\{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B+M_B][(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\\ \qquad-[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B][(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\}^2\\ \qquad-\lambda^2\{-[(EI\lambda^2)\delta_B+M_B][(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\\ \qquad+[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B][(EI\lambda^2)\delta_A+M_A]\}^2\end{array}\quad\cdots\cdots\text{(19)}$$

となり，これは (17) 式のうち，いずれかの式の代りに採用できる．つまり，(19) 式もある特定の振動次数に対応する端末条件を表わすことになる．

このように，(18) 式と (19) 式を使用することにすれば，(16) 式のうちの1個の式と (17) 式のうちの1個の式は必要としないことになり，振動次数λlは (16) 式のうちのいずれか1個と，(17) 式のうちのいずれか1個の都合2個の式を，同時に満足するように決定すればよいということがわかる．すなわち，固有振動数を求めるためには，(16) 式と (17) 式の4個の式全部を必要とするわけではない．しかし，ここでは便宜上，(16) 式と (17) 式をひっくるめて振動次数方程式と呼ぶことにする．これに対して，(18) 式と (19) 式の端末条件は，(16) 式と (17) 式のいずれか1個あてを使用して求めた振動次数に対応するものであるから，以後 (18) 式と (19) 式を振動端末条件式と呼ぶことにする．

5. 端末条件と対応振動次数

はりの端末支持状態は通常，支持端，固着端，自由端の各形式に分類されている．これらの形式を組み合わせた各種のはりに対して，(18) 式と (19) 式とを適用し，振動時における端末条件を求めると次のようになる．

なお，固有振動数は (16) 式のうちの1個と，(17) 式のうちの1個とを，組み合わせた適切な二つの式によれば求められるわけである．しかし，そのことは省略することにして，ここでは得られた端末条件と振動次数との対応性を明確にする意味で，(10) 式に境界条件を適用し，従来の固有値問題の解法手順にしたがって，振動数方程式を求めておくことにする．よって以下には，上記の各種端末支持状態のはりについて，それぞれの振動数方程式を求め，そのあと引きつづいて，その時の端末条件を求めてみることにした．

［1］ 両端支持ばり

はりの両端が支持されている場合には

$$\delta_A=\delta_B=0,\quad M_A=M_B=0 \qquad \cdots\cdots(20)$$

の条件があらかじめ与えられている．まず，従来の固有値問題の解法手順をそのまま踏襲して振動数方程式を求めておく．すなわち，(10) 式に $\delta_A=0$, $M_A=0$の条件を適用すると

$$\varphi(x)=\frac{1}{2EI\lambda^3}\{[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\sin\lambda x + [(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\sinh\lambda x\}$$

となるが，本式へさらに $\delta_B=[\varphi]_{x=l}=0$ および $M_B=[EI(d^2\varphi/dx^2)]_{x=l}=0$ の条件を適用すれば

$$\left.\begin{array}{l}[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\sin\lambda l\\ \quad+[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\sinh\lambda l=0\\ -[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]\sin\lambda l\\ \quad+[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]\sinh\lambda l=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(21)$$

を得る．よって上式は

$$\left\{\begin{array}{l}(EI\lambda^2)\theta_A(\sinh\lambda l+\sin\lambda l)\\ \qquad -R_A(\sinh\lambda l-\sin\lambda l)=0\\ (EI\lambda^2)\theta_A(\sinh\lambda l-\sin\lambda l)\\ \qquad -R_A(\sinh\lambda l+\sin\lambda l)=0\end{array}\right.$$

となり，第1式より $R_A/(EI\lambda^2)\theta_A$ を求めると

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A}=\frac{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}>0 \qquad \cdots\cdots(22)$$

が得られ，第2式からは

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A}=\frac{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}>0 \qquad \cdots\cdots(23)$$

を得る．ゆえに (22) 式と (23) 式の右辺を等しくおくと

$$\frac{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}=\frac{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}$$

となるので，本式を計算して整理すれば

$$4\sinh\lambda l\cdot\sin\lambda l=0$$

となる．振動問題の場合には $\lambda l>0$, すなわち $\sinh\lambda l>0$ と考えるべきであるから，上式を満足するためには

$$\sin\lambda l=0 \qquad \cdots\cdots(24)$$

となり，本式が両端支持ばりの振動数方程式である．以上の計算手順が従来から採用されている固有値問題の解法に従った振動数方程式の求め方[13]であるが，たわみの式 $\varphi(x)$ の積分定数がすべて具体的に θ_A, R_A などの端末変位や端末反力で表わされている点が，従来の方法とはやや異なるところである．

なお，(24) 式によれば振動数方程式 $\sin\lambda l=0$ の関係が成立するので，(22) 式と (23) 式は

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A}=1 \qquad \cdots\cdots(25)$$

の形でなければならないことがわかる．本式はまた

$$R_A-(EI\lambda^2)\theta_A=0 \qquad \cdots\cdots(26)$$

のように表わすこともできる．そこでいま，この(26)式の両辺に $2(EI\lambda^2)\theta_A$ を加えてみると

$$R_A+(EI\lambda^2)\theta_A=2(EI\lambda^2)\theta_A$$

を得る．ところが，両端支持ばりでは $\theta_A\fallingdotseq 0$ とすべきであるから，上式よりこの場合には

$$R_A+(EI\lambda^2)\theta_A\fallingdotseq 0 \qquad \cdots\cdots(27)$$

の関係が成立していなければならない．(26) 式と (27) 式の関係は図1でわかるように，はりが支点 A のごく近傍で鉛直下方にたわむとき，支点反力は鉛直上方に働くことを意味する．

さて，(20) 式の条件を (18) 式に適用すると

$$[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^4 =[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]^2[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^2$$

となるが，(27) 式によれば $(EI\lambda^2)\theta_A+R_A\fallingdotseq 0$ の関係があるので，これを両辺からおとすと，上式から

$$[(EI\lambda^2)\theta_A+R_A]^2=[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]^2 \qquad \cdots(28)$$

を得る．また，(20) 式の条件を (19) 式に適用すれば

$$[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^4 =[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]^2[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^2$$

を得るが，本式は

$$(EI\lambda^2)\theta_A-R_A=0 \quad \cdots\cdots(29)$$

の関係が成立するか，もしくは

$$[(EI\lambda^2)\theta_A-R_A]^2=[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]^2 \quad \cdots\cdots(30)$$

の関係が成立するとき満足され，(29) 式の関係は前に述べた (26) 式と一致する．ところが，(29) 式つまり (26) 式は両端支持ばりの振動中，常に成立している関係を示し，かつそれは (30) 式の左辺と同じものであるから，このことを考慮すれば (30) 式の右辺より

$$(EI\lambda^2)\theta_B+R_B=0 \quad \cdots(31)$$

の関係が常に成立することになる．すなわち，(29) 式と (30) 式は同一条件を表わす式となる．このことは (31) 式の条件を前提とすれば，(19) 式は (30) 式で代用してもさしつかえないことを意味する．ただし，(29) 式と (31) 式の λ は (24) 式の振動数方程式で求められる．

このようにして，(18) 式より (28) 式が得られ，また (19) 式より (30) 式が得られたので，いま (29) 式と (31) 式から R_B と R_A を求めて，(28) 式に代入すれば，(28) 式は

$$\theta_A{}^2=\theta_B{}^2 \quad \cdots\cdots(32)$$

となり，逆にまた (29) 式と (31) 式から θ_A と θ_B を求めて (28) 式に代入すれば

$$R_A{}^2=R_B{}^2 \quad \cdots\cdots(33)$$

が得られる．(32) 式と (33) 式は両端支持ばりが振動するとき，振動次数とは無関係に成立すべき関係を示し，これら (32) 式と (33) 式が両端支持ばりの振動端末条件である．そしてこのとき，R_A と R_B はそれぞれ (29) 式と (31) 式でわかるように，θ_A と θ_B できまる．したがって，この場合は (29) 式と (31) 式で示した

$R_A=(EI\lambda^2)\theta_A$，および $R_B=-(EI\lambda^2)\theta_B$

の関係も端末条件とみなしてもさしつかえがない．

[2] 両端固着ばり

両端が固着されたはりの場合には

$$\delta_A=\delta_B=0,\quad \theta_A=\theta_B=0 \quad \cdots\cdots(34)$$

の条件が与えられている．まず (10) 式に $\delta_A=0, \theta_A=0$ の条件を適用すると

$$\varphi(x)=\frac{1}{2EI\lambda^3}(-\lambda M_A\cos\lambda x+R_A\sin\lambda x +\lambda M_A\cosh\lambda x-R_A\sinh\lambda x)$$

を得るが，本式にさらに $\delta_B=[\varphi]_{x=l}=0$，および $\theta_B=[d\varphi/dx]_{x=l}=0$ の条件を適用すれば

$$\left\{\begin{aligned}&-\lambda M_A\cos\lambda l+R_A\sin\lambda l\\&\qquad+\lambda M_A\cosh\lambda l-R_A\sinh\lambda l=0\\&\lambda M_A\sin\lambda l+R_A\cos\lambda l\\&\qquad+\lambda M_A\sinh\lambda l-R_A\cosh\lambda l=0\end{aligned}\right.$$

となる．よって

$$\left.\begin{aligned}&\lambda M_A(\cosh\lambda l-\cos\lambda l)\\&\qquad-R_A(\sinh\lambda l-\sin\lambda l)=0\\&R_A(\cosh\lambda l-\cos\lambda l)\\&\qquad-\lambda M_A(\sinh\lambda l+\sin\lambda l)=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(35)$$

が得られる．第1式より $R_A/(\lambda M_A)$ を求めると

$$\frac{R_A}{\lambda M_A}=\frac{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}>0 \quad \cdots\cdots(36)$$

となり，第2式より $R_A/(\lambda M_A)$ を求めると

$$\frac{R_A}{\lambda M_A}=\frac{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}>0 \quad \cdots\cdots(37)$$

となる．ゆえに，(36) 式と (37) 式の右辺を等しくおいて

$$\frac{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}=\frac{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}$$

を得るが，本式を計算して整理すれば

$$\cos\lambda l\cdot\cosh\lambda l=1 \quad \cdots\cdots(38)$$

のように振動数方程式が得られる．

なお，(36) 式および (37) 式の右辺から判断して，$R_A/(\lambda M_A)\fallingdotseq 1$ でなくてはならないが，このことはまた

$$\lambda^2M_A{}^2/R_A{}^2\fallingdotseq 1,\ \text{すなわち}\ \lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2\fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots(39)$$

であることを意味する．

さて，(34) 式の条件を (18) 式に適用すると

$$(\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2)^2=(\lambda^2M_AM_B-R_AR_B)^2+\lambda^2(M_BR_A+M_AR_B)^2 \quad \cdots\cdots(40)$$

を得るが，これを計算して整理すれば

$$(\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2)[\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2-(\lambda^2M_B{}^2+R_B{}^2)]=0$$

となり，両端固着ばりでは $\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2\fallingdotseq 0$ とすべきであるから，上式より

$$\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2=\lambda^2M_B{}^2+R_B{}^2 \quad \cdots\cdots(41)$$

が得られる．全く同様にして，(34) 式の条件を，(19) 式に適用すれば

$$(\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2)^2=(\lambda^2M_AM_B+R_AR_B)^2-\lambda^2(M_BR_A+M_AR_B)^2 \quad \cdots\cdots(42)$$

を得るが，これを計算して整理すると

$$(\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2)[\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2-(\lambda^2M_B{}^2-R_B{}^2)]=0$$

となる．(39) 式によれば，$\lambda^2 M_A{}^2 - R_A{}^2 \fallingdotseq 0$ の関係があるので，これを両辺からおとすと，上式は

$$\lambda^2 M_A{}^2 - R_A{}^2 = \lambda^2 M_B{}^2 - R_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(43)$$

となる．そこで，(41) 式と (43) 式を辺々加えると

$$M_A{}^2 = M_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(44)$$

が得られ，また (41) 式から (43) 式を引くと

$$R_A{}^2 = R_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(45)$$

が得られる．したがって，両端固着ばりの振動時には，両端の支持モーメントと支持反力の2乗はそれぞれ相等しくなければならない．(44) 式と (45) 式が両端固着ばりの振動中における端末条件であり，これらの条件は振動次数とは無関係に常に成立することがわかる．

なお，(44) 式の $M_A{}^2 = M_B{}^2$ の端末条件は一様長柱の弾性座屈時にも成立する[14]．しかしながら，振動時の振動数方程式が (38) 式の1個の式で表わされるのに対し，座屈時には $M_A - M_B = 0$, $M_A + M_B = 0$ の端末条件に対して，それぞれ異なった座屈次数方程式が成立する．

［3］ 片持ばり

A 端自由，B 端固着の場合とすれば

$$M_A = 0,\ R_A = 0,\ \delta_B = 0,\ \theta_B = 0 \qquad \cdots\cdots(46)$$

の条件があらかじめ与えられている．まず (10) 式に $M_A = 0, R_A = 0$ の条件を適用すると

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\lambda}(\lambda\delta_A \cos\lambda x + \theta_A \sin\lambda x + \lambda\delta_A \cosh\lambda x + \theta_A \sinh\lambda x)$$

となるが，本式へさらに $\delta_B = [\varphi]_{x=l} = 0$, $\theta_B = [d\varphi/dx]_{x=l} = 0$ の条件を適用すれば

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\delta_A(\cosh\lambda l + \cos\lambda l) + \theta_A(\sinh\lambda l + \sin\lambda l) = 0 \\ &\lambda\delta_A(\sinh\lambda l - \sin\lambda l) + \theta_A(\cosh\lambda l + \cos\lambda l) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(47)$$

が得られる．第1式より $\theta_A/(\lambda\delta_A)$ を求めると

$$\frac{\theta_A}{\lambda\delta_A} = -\frac{\cosh\lambda l + \cos\lambda l}{\sinh\lambda l + \sin\lambda l} < 0 \qquad \cdots\cdots(48)$$

となり，第2式より $\theta_A/(\lambda\delta_A)$ を求めると

$$\frac{\theta_A}{\lambda\delta_A} = -\frac{\sinh\lambda l - \sin\lambda l}{\cosh\lambda l + \cos\lambda l} < 0 \qquad \cdots\cdots(49)$$

となる．よって，(48) 式の右辺と (49) 式の右辺を等しくおけば

$$\frac{\cosh\lambda l + \cos\lambda l}{\sinh\lambda l + \sin\lambda l} = \frac{\sinh\lambda l - \sin\lambda l}{\cosh\lambda l + \cos\lambda l}$$

を得るので，本式を計算して整理すると

$$\cos\lambda l \cdot \cosh\lambda l = -1 \qquad \cdots\cdots(50)$$

のように振動数方程式が得られる．

なお，(48) 式と (49) 式の右辺から判断して，$\theta_A/(\lambda\delta_A) \fallingdotseq 1$ でなくてはならないが，このことはまた

$$\lambda^2\delta_A{}^2/\theta_A{}^2 \fallingdotseq 1,\ すなわち\ \lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2 \fallingdotseq 0 \quad \cdots(51)$$

であることを意味する．

さて，(46) 式の条件を (18) 式に適用すると

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2(EI\lambda^2)^2\delta_A{}^2 + (EI\lambda^2)^2\theta_A{}^2\}^2 \\ &\quad = \{\lambda^2(-M_B)(EI\lambda^2)\delta_A - R_B(EI\lambda^2)\theta_A\}^2 \\ &\qquad + \lambda^2\{(-M_B)(EI\lambda^2)\theta_A + R_B(EI\lambda^2)\delta_A\}^2 \\ &\therefore\ (EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 + \theta_A{}^2)^2 \\ &\quad = (\lambda^2 M_B\delta_A + R_B\theta_A)^2 + \lambda^2(-M_B\theta_A + R_B\delta_A)^2 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(52)$$

を得る．本式を計算して整理すれば

$$(EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 + \theta_A{}^2)^2 = (\lambda^2\delta_A{}^2 + \theta_A{}^2)(\lambda^2 M_B{}^2 + R_B{}^2)$$

となるが，両辺から $\lambda^2\delta_A{}^2 + \theta_A{}^2 (\fallingdotseq 0)$ をおとすと

$$(EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 + \theta_A{}^2) = \lambda^2 M_B{}^2 + R_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(53)$$

となる．また，(46) 式の条件を (19) 式に適用すると

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2(EI\lambda^2)^2\delta_A{}^2 - (EI\lambda^2)^2\theta_A{}^2\}^2 \\ &\quad = \{\lambda^2 M_B(EI\lambda^2)\delta_A - R_B(EI\lambda^2)\theta_A\}^2 \\ &\qquad - \lambda^2\{(-M_B)(EI\lambda^2)\theta_A + R_B(EI\lambda^2)\delta_A\}^2 \\ &\therefore\ (EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2)^2 = (\lambda^2 M_B\delta_A - R_B\theta_A)^2 \\ &\qquad - \lambda^2(-M_B\theta_A + R_B\delta_A)^2 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(54)$$

を得る．本式を計算して整理すれば

$$(EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2)^2 = (\lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2)(\lambda^2 M_B{}^2 - R_B{}^2)$$

となり，(51) 式によれば $\lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2 \fallingdotseq 0$ の関係があるので，これを両辺からおとすと

$$(EI\lambda^2)^2(\lambda^2\delta_A{}^2 - \theta_A{}^2) = \lambda^2 M_B{}^2 - R_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(55)$$

が得られる．そこでいま，(53) 式と (55) 式を辺々加えると

$$M_B{}^2 = (EI\lambda^2)^2\delta_A{}^2 \qquad \cdots\cdots(56)$$

となり，固着端の支持モーメント M_B は自由端のたわみ δ_A できまることがわかる．次に (53) 式から (55) 式を引くと

$$R_B{}^2 = (EI\lambda^2)^2\theta_A{}^2 \qquad \cdots\cdots(57)$$

となり，固着端の支持反力 R_B は自由端のたわみ角 θ_A に比例することがわかる．これら (56) 式と (57) 式が片持ばりの振動時における端末条件であるが，この場合 M_B と R_B は λ を含むので，振動次数によって，支持モーメントと支持反力は異なった値を取ることになる．ただし，λ は (50) 式の振動数方程式から求められる．

なお，(56) 式と (57) 式の比を取れば

$$\frac{M_B{}^2}{R_B{}^2}=\frac{\delta_A{}^2}{\theta_A{}^2}, \text{ すなわち } M_B{}^2=\left(\frac{\delta_A}{\theta_A}\right)^2 R_B{}^2 \quad \cdots(58)$$

となるので，固着端の固着モーメントは自由端のたわみと傾斜角を仲介にして，固着端支持反力で表わされることもわかる．

［4］ 一端固着，他端支持ばり

A 端を固着，B 端を支持とすれば，この場合は

$$\delta_A=0,\ \theta_A=0,\ \delta_B=0,\ M_B=0 \qquad \cdots\cdots(59)$$

の条件が与えられている．まず，$\delta_A=0,\ \theta_A=0$ の条件を (10) 式に適用すると

$$\varphi(x)=\frac{1}{2EI\lambda^3}(-\lambda M_A\cos\lambda x+R_A\sin\lambda x$$
$$+\lambda M_A\cosh\lambda x-R_A\sinh\lambda x)$$

となるが，本式へさらに $\delta_B=[\varphi]_{x=l}=0$，および $M_B=[EI(d^2\varphi/dx^2)]_{x=l}=0$ の条件を適用すれば

$$\begin{cases}-\lambda M_A\cos\lambda l+R_A\sin\lambda l \\ \qquad +\lambda M_A\cosh\lambda l-R_A\sinh\lambda l=0 \\ \lambda M_A\cos\lambda l-R_A\sin\lambda l \\ \qquad +\lambda M_A\cosh\lambda l-R_A\sinh\lambda l=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\lambda M_A(\cosh\lambda l-\cos\lambda l) \\ \qquad -R_A(\sinh\lambda l-\sin\lambda l)=0 \\ \lambda M_A(\cosh\lambda l+\cos\lambda l) \\ \qquad -R_A(\sinh\lambda l+\sin\lambda l)=0\end{cases}$$

が得られる．第1式より $R_A/(\lambda M_A)$ を求めると

$$\frac{R_A}{\lambda M_A}=\frac{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l} \qquad \cdots\cdots(60)$$

となり，全く同様にして第2式より $R_A/(\lambda M_A)$ を求めると

$$\frac{R_A}{\lambda M_A}=\frac{\cosh\lambda l+\cos\lambda l}{\sinh\lambda l+\sin\lambda l} \qquad \cdots\cdots(61)$$

となる．よって，(60) 式と (61) 式の右辺を等しくおけば

$$\frac{\cosh\lambda l-\cos\lambda l}{\sinh\lambda l-\sin\lambda l}=\frac{\cosh\lambda l+\cos\lambda l}{\sinh\lambda l+\sin\lambda l}$$

を得る．本式を計算して整理すれば

$$\cosh\lambda l\cdot\sin\lambda l=\sinh\lambda l\cdot\cos\lambda l$$
$$\therefore \tanh\lambda l=\tan\lambda l \qquad \cdots\cdots(62)$$

のように振動数方程式が得られる．なお，(60) 式と (61) 式の右辺からわかるように，$R_A/(\lambda M_A)\fallingdotseq 1$ でなくてはならないが，このことはまた

$$\lambda^2M_A{}^2/R_A{}^2\fallingdotseq 1,\ \text{すなわち}\ \lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2\fallingdotseq 1 \qquad \cdots\cdots(63)$$

であることを意味する．

さて，(59) 式の条件を (18) 式に適用すると

$$(\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2)^2=\{[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]R_A\}^2$$
$$+\lambda^2\{[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]M_A\}^2$$
$$\therefore (\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2)^2$$
$$=(\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2)[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]^2$$

を得る．両辺から $\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2(\fallingdotseq 0)$ をおとすと

$$\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2=[(EI\lambda^2)\theta_B-R_B]^2 \qquad \cdots\cdots(64)$$

となり，また (59) 式の条件を (19) 式に適用すれば

$$(\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2)^2=\{[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]R_A\}^2$$
$$-\lambda^2\{[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]M_A\}^2$$
$$\therefore (\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2)^2$$
$$=-(\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2)[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]^2$$

が得られる．ところが，(63) 式の $\lambda^2M_A{}^2-R_A{}^2\fallingdotseq 0$ の関係があるので，上式は結局

$$-\lambda^2M_A{}^2+R_A{}^2=[(EI\lambda^2)\theta_B+R_B]^2 \qquad \cdots\cdots(65)$$

となる．そこでいま，(64) 式と (65) 式を加えると

$$R_A{}^2=R_B{}^2+(EI\lambda^2)^2\theta_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(66)$$

となり，また (64) 式から (65) 式を引くと

$$M_A{}^2=-2(EI)\theta_BR_B \qquad \cdots\cdots(67)$$

を得る．ここで (66) 式の λ の値は (62) 式から求めることができる．

(66) 式と (67) 式が A 端固着，B 端支持の一様ばりが振動するときに満足すべき端末条件式である．すなわち，固着端の反力の2乗は支持端における反力の2乗とそこのたわみ角の2乗との和で表わされ，また固着端の固着モーメントは支持端における反力と傾斜角できまる．しかも (67) 式は λ を含まないので，振動次数のいかんにかかわらず成立する関係であり，この場合 θ_B と R_B は異符号を取ることがわかる．この θ_B と R_B が異符号をもつということは，図1において支持端 B の近傍ではりが w 軸の負の側にたわむとき，反力は w 軸の正方向に働くことを意味する．

6. 結　論

長さ l，曲げ剛性 EI，単位長さあたりの質量 ρ_l の一様断面ばりがたわみ振動をするとき，両端の A 点，B 点におけるたわみ δ_A, δ_B，たわみ角 θ_A, θ_B と支持モーメント M_A, M_B，支持反力 R_A, R_B との間には (18)式および (19) 式で表わされる端末条件式が成立する．

いま，固有円振動数を ω_n とし，$\lambda=\sqrt[4]{\rho_l\omega_n{}^2/(EI)}$ で振動次数を表わすことにすれば，(18) 式と (19) 式を各種の端末支持状態にある一様ばりに適用した結果は次のようになる．

［1］ 両端支持ばりでは $R_A{}^2=R_B{}^2$，および $\theta_A{}^2=\theta_B{}^2$ の端末条件が振動次数のいかんにかかわらず成立する．なおかつ，支点反力と支点たわみ角との間には

$$R_A=(EI\lambda^2)\theta_A,\quad R_B=-(EI\lambda^2)\theta_B$$

の関係が存在するので，特定の振動次数 λ における支点反力は初期条件により端末たわみ角の値を指定すれば決定できる．ただし，ここで λ の値は振動数方程式から得られるものであり，この場合は $\sin\lambda l=0$ より求められる．

［2］ 両端固着ばりの振動中には，振動次数のいかんにかかわらず，$M_A{}^2=M_B{}^2$，および $R_A{}^2=R_B{}^2$ の端末条件が成立していなければならない．

［3］ A 端自由，B 端固着の片持ばりでは $(M_B/R_B)^2=(\delta_A/\theta_A)^2$ の端末条件が振動数のいかんにかかわらず成立する．さらにまた

$$M_B{}^2=(EI\lambda^2)^2\delta_A{}^2,\quad R_B{}^2=(EI\lambda^2)^2\theta_A{}^2$$

の関係が存在するので，固着モーメント M_B は自由端のたわみ δ_A できまり，支点反力 R_B は自由端のたわみ角 θ_A できまる．ただし，ここで λ の値は $\cos\lambda l\cdot\cosh\lambda l=-1$ を満足する値である．

［4］ A 端固着，B 端支持のはりでは振動次数のいかんにかかわらず $M_A{}^2=-2(EI)\theta_B R_B$ の端末条件が成立する．なおかつ，$R_A{}^2=R_B{}^2+(EI\lambda^2)^2\theta_B{}^2$ の関係が存在するので，固着端 A の固着モーメント M_A およびそこの点の支持反力 R_A は，支持端 B におけるたわみ角 θ_B と支持反力 R_B の両者できまる．ただし，ここで λ は $\tan\lambda l=\tanh\lambda l$ を満足する値である．

参 考 文 献

1) S. Timoshenko: On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross-section, Phil. Mag., 6-43 (1922), 125.
2) B. A. Boley and C. C. Chao: Some Solutions of the Timoshenko Beam Equations, J. appl. Mech., 22 (1955), 579.
3) R. W. Traill-Nash and A. R. Collar: The Effects of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Bending Vibration of Beams, Quart. J. Mech. appl. Math. (1953).
4) 金沢　武：棒の横振動に対する回転慣性および剪断力の影響について，造船協会会報，75（昭28-9）.
5) W. Fllügge: Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben, Z. angew. Math. Mech., 22 (1942), 312.
6) H. Schirmer: Über Biegewellen in Stäben, Ing-Arch., 22 (1952), 247.
7) M. A. Dengler and M. Goland: Transverse Impact of long Beams including Rotary Inertia and Shear Effects, Proc. First U. S. natl. Congr. appl. Mech., (1952), 179.
8) Alice W. Mathewson: Preparation of Data for Computation of Vertical Flexural Modes of Hull Vibration by Digital Process, The David W. Taylor Model Basin Report 632, (1949).
9) Alice W. Mathewson: Calculation of the Normal Vertical Flexural Modes of Hull Vibration by the Digital Process, T. M. B. Rep. 706, (1950).
10) C. E. Inglis: The Determination of critical Speeds, natural Frequencies and Modes of Vibration by Means of Basic Functions, Trans. N. E. Cst. Inst. Engr. Shipb., 61 (1944-45).
11) J. E. Rechards: An Analysis of Ship Vibration using Basic Functions, Trans. N. E. Cst. Inst. Engr. Shipb., 66 (1951-52).
12) J. W. Ramsay: Aspects of Ship Vibration induced by Twin Propellers, Trans. Inst. nav. Arch. Lond., (1956).
13) 前沢成一郎：振動工学，(1973)，212，森北出版.
14) 富　武満：一様長柱の弾性座屈時における端末条件，鹿児島大学工学部研究報告，第18号（昭51-12），5.