

横衝撃荷重を受ける長いはりの弾性挙動 (第2報)

田 中 豊

(受理 昭和51年5月31日)

THE ELASTIC BEHAVIOR OF LONG BEAMS UNDER IMPACT LOADING (Report 2)

Yutaka TANAKA

A series of solutions to the Timoshenko's beam equation is presented. The beam subjected to a transverse impact force by a falling rod at its mid portion, is assumed to be of infinite length. The results has been found numerically by the method of characteristics, by using Kodaka-Nakahara's contact conditions. Agreement with experiment has been good except for the impact portion. Discussion has been included of the influence upon the response of the beam by the discontinuity of shearing force, caused by neglecting inertia force at the impact portion of the beam, which propagates with speed $\sqrt{\frac{k'G}{\rho}}$.

1. ま え が き

横衝撃荷重をうけるはりの挙動を解析するに当って基礎式として通常はりの横振動方程式が用いられるがこの方程式には2種類のもが考えられる。一つははり断面の回転慣性とせん断変形を省略した Bernoulli-Euler の方程式であり、いま一つはこれらを考慮した Timoshenko の方程式である。このうち Bernoulli-Euler の方程式は波動が無限大の速度で伝ばするという物理的不合理を含むにもかかわらず、その解の計算が比較的簡単であるために多くの研究者によって用いられてきた。一方 Timoshenko の方程式は曲げ波およびせん断波の伝ばを示す波動方程式でもあるので、非常に鋭い衝撃、あるいは、はり断面の寸法が長さに比べて大きな場合など、又、波動をともなう衝撃現象の解析において、はりの挙動をより正確に与える適切な方程式であると考えられる。この方程式にもとづき M. A. Denglら¹⁾ は中央に横衝撃荷重をうける無限長はりを、又 B. A. Boleyら²⁾ は一端に種々の衝撃条件を与えた半無限長はりをそれぞれラプラス変換を用いて解析した。しかし、その結果得られた解はいずれも数値計算上やっかいな性質をもつ定積分で与えられ、衝撃点付近を除いてその計算は非常に困難なものとなり実用的でないとしてされている。その後 W. Flüggeら³⁾ によりこの計算の実用化に関する試みがなされてきたが未

だ有効な手段は示されていない。

これに対して、Timoshenko の方程式を特性曲線法を用いて近似解を求める方法が R. W. Leonardら⁴⁾ および H. J. Plass^{5), 6)} によって示された。この方法は Timoshenko の方程式が双曲線形偏微分方程式であることを利用して、特性曲線群を求め、これらによって囲まれる微小要素についての数値積分を特性曲線に沿って逐次行っていくもので、計算量がぼう大であることが欠点とされていた。しかし、電子計算機の性能が向上した現在ではこの方法は Timoshenko の方程式解法の有効な手段であるといえよう。

本報告は、中央に弾性棒による横衝撃荷重をうける無限長はりの弾性挙動を Timoshenko の方程式にもとづき、小高・中原⁷⁾ の接触条件を考慮して特性曲線法により数値解を求め、実験結果と対比してその有用性につき検討を加えたものである。

2. 基 礎 式

はり断面の回転慣性およびせん断変形を考慮したはりの横振動方程式は図1に示すように座標軸を設定し曲げモーメント、せん断力は矢印方向を正にとると

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + \rho I \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \rho A \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1b)$$

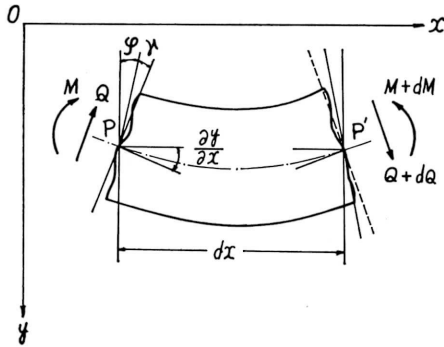


図1.

はり材料の弾性域における曲げおよびせん断に対する力学的性質は

$$EI \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - k' \angle G \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0 \tag{2b}$$

又、連続の式は

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + \omega = 0 \tag{3b}$$

ここで x ; はりの軸方向の座標, t ; 時間, E, G, ρ ; はり材料の縦弾性係数, 横弾性係数, 密度, M, ω, I, A ; はり断面のモーメント, 角速度, 二次モーメント, 面積, Q ; せん断力, v ; はりのたわみ速度, K, γ ; 曲率, せん断ひずみ, k' ; 断面の平均せん断応力と最大せん断応力との比である。

3. 特性曲線による解析

6個の量 $M, \omega, K, Q, v, \gamma$ は x と t の関数であるので

$$\left. \begin{aligned} dM &= \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial t} dt & dQ &= \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \\ d\omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt & dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \\ dK &= \frac{\partial K}{\partial x} dx + \frac{\partial K}{\partial t} dt & d\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

前述の (1) (2) (3) 式の6個の一階偏微分方程式は双曲線形偏微分方程式を構成するので、これらを (4) 式と組合せ $\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ の係数からなる行列式

を作りこれを0とおくと

$$\begin{vmatrix} dx dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx dt & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k'AG \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を展開して整理すると

$$(dx)^2 \{ \rho(dx)^2 - E(dt)^2 \} \{ \rho A(dx)^2 - k'AG(dt)^2 \} = 0 \tag{5}$$

(5) 式から次の6群の特性曲線が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} dx &= 0 \text{ (二重根)} \\ dx &= \pm C_M dt \\ dx &= \pm C_Q dt \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

ここで $C_M = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $C_Q = \sqrt{\frac{k'G}{\rho}}$ である。

図2は $x-t$ 平面上に等間隔に画かれた特性曲線群を示す。実線で画かれた斜線は $dx = \pm C_M dt$, 破線は $dx = \pm C_Q dt$ 又、 t 軸に平行な実線は $dx = 0$ の特性曲線群である。

(6) 式の各直線に沿って、つぎの特性方程式が求め

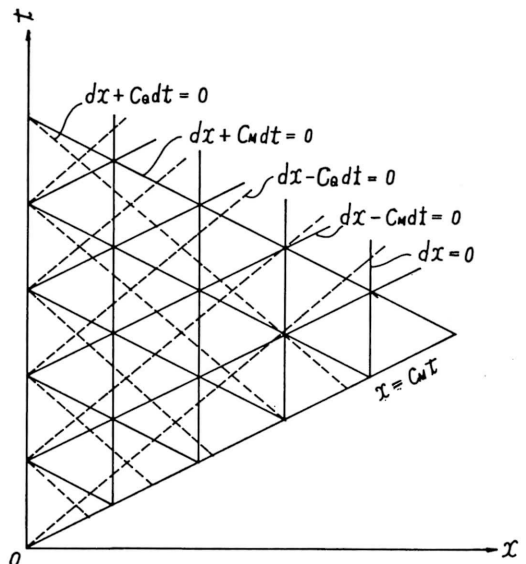


図2. 特性曲線群

られる。

$$EI dK - dM = 0 \quad (dx = 0) \quad (7a)$$

$$k'AG d\gamma - dQ = 0 \quad (dx = 0) \quad (7b)$$

$$dM + \rho IC_M d\omega - C_M Q dt = 0 \quad (dx = C_M dt) \quad (7c)$$

$$dM - \rho IC_M d\omega + C_M Q dt = 0 \quad (dx = -C_M dt) \quad (7d)$$

$$dQ - \rho AC_Q dv + \rho AC_Q^2 \omega dt = 0 \quad (dx = C_Q dt) \quad (7e)$$

$$dQ + \rho AC_Q dv + \rho AC_Q^2 \omega dt = 0 \quad (dx = -C_Q dt) \quad (7f)$$

いま (7) 式の諸物理量を次式に従って無次元化する。

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{C_M t}{r}, \quad \bar{M} = \frac{Mr}{EI}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{EA}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega r}{C_M}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{C_M}, \quad \bar{K} = rK, \quad \frac{E}{k'G} = \beta \quad \dots (8)$$

ここで r は、はり断面の回転半径である。これらの無次元量を用いて (6), (7) 式を書き改めると、特性曲線群は

$$d\xi = 0 \text{ (二重根)}, \quad d\xi = \pm d\tau, \quad d\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\tau \quad (6)'$$

又 (7) 式は

$$d\bar{K} - d\bar{M} = 0 \quad (d\xi = 0) \quad (7a)'$$

$$d\tau - \beta d\bar{Q} = 0 \quad (d\xi = 0) \quad (7b)'$$

$$d\bar{M} + d\bar{\omega} - \bar{Q} d\tau = 0 \quad (d\xi = d\tau) \quad (7c)'$$

$$d\bar{M} - d\bar{\omega} + \bar{Q} d\tau = 0 \quad (d\xi = -d\tau) \quad (7d)'$$

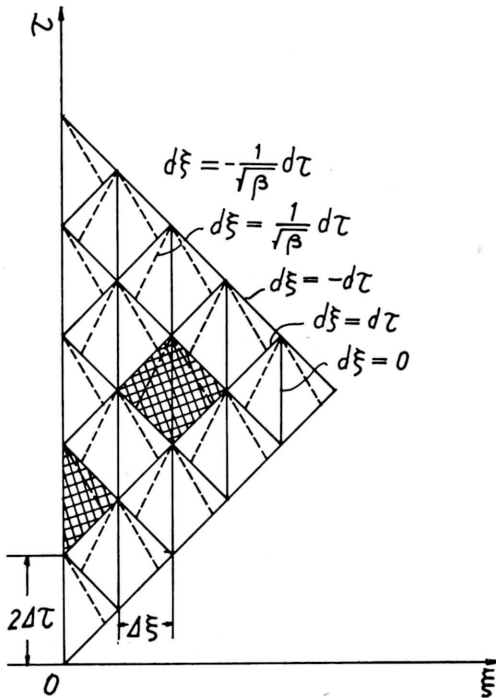


図3. 無次元化した特性曲線群

$$d\bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\bar{v} + \frac{1}{\beta} \bar{\omega} d\tau = 0 \quad \left(d\xi = \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\tau \right) \quad (7e)'$$

$$d\bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\bar{v} + \frac{1}{\beta} \bar{\omega} d\tau = 0 \quad \left(d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} d\tau \right) \quad (7f)'$$

4. 数値計算法

いま $\xi-\tau$ 平面上に等間隔で画かれた特性曲線群による network を図3に示す。 $\xi-\tau$ 平面上には $d\xi = \pm d\tau$ なる特性曲線群によって τ 軸を含む多くの三角形要素と、これ等に接続して $d\xi = d\tau$ 方向に配置された菱形要素が見られる。図中の破線は $d\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\tau$ なる特性曲線である。特性曲線法は $\xi = \tau$ なる特性曲線上、 τ 軸上および原点に適当な境界値を与え、これにもとづいて各要素毎に $d\xi = d\tau$ なる特性曲線に沿って逐次数値積分を行っていくものである。次に各要素の数値計算法について述べる。

4-1 菱形要素の数値計算

図3の network の中から $d\xi = \pm d\tau$ によって囲まれた一つの菱形要素 $PABC$ をとり出しこれを図4に示す。図中の破線は前述のように $d\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\tau$ の特性曲線である。(7)' 式はこの菱形要素の各辺に沿って成り立つので数値計算のために (7)' 式を差分方程式で置きかえ、更に A' 点 (又は C' 点) における諸量の値を点 A および点 B (又は点 C および点 B) における諸量の値から線形補間によって求めると (7)' 式はつぎの6個の連立方程式となる。

$$\bar{K}_P - \bar{K}_B = \bar{M}_P - \bar{M}_B \quad (8a)$$

$$\tau_P - \tau_B = \beta(\bar{Q}_P - \bar{Q}_B) \quad (8b)$$

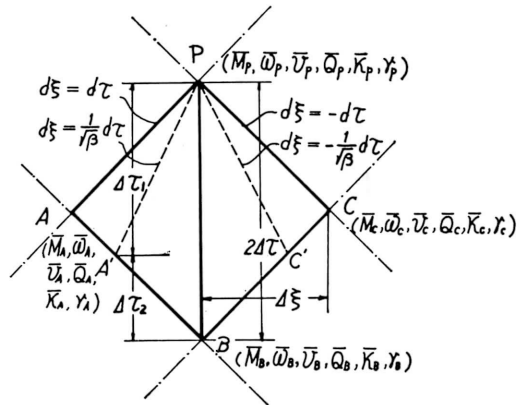


図4. 菱形要素

$$\bar{M}_P + \bar{\omega}_P = \bar{M}_A + \bar{\omega}_A + \frac{\bar{Q}_A + \bar{Q}_P}{2} \Delta\tau \quad (8c)$$

$$\bar{M}_P - \bar{\omega}_P = \bar{M}_C - \bar{\omega}_C - \frac{\bar{Q}_C + \bar{Q}_P}{2} \Delta\tau \quad (8d)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_P - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \bar{v}_P &= (1-\alpha)\bar{Q}_B + \alpha\bar{Q}_A - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \{ (1-\alpha)\bar{v}_B + \alpha\bar{v}_A \} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} \{ (1-\alpha)\bar{\omega}_B + \alpha\bar{\omega}_A + \bar{\omega}_P \} (2-\alpha) \Delta\tau \quad (8e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_P + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \bar{v}_P &= (1-\alpha)\bar{Q}_B + \alpha\bar{Q}_C + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \{ (1-\alpha)\bar{v}_B + \alpha\bar{v}_C \} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} \{ (1-\alpha)\bar{\omega}_B + \alpha\bar{\omega}_C + \bar{\omega}_P \} (2-\alpha) \Delta\tau \quad (8f) \end{aligned}$$

ここで $\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{\beta}}$, 又, 式中諸量の右下の添字はそれぞれの諸量に対応する頂点を示している. いま A, B, C 点の諸量の値が定まると P 点における6個の未知量 $\bar{M}_P, \bar{\omega}_P, \bar{K}_P, \dots$ は (8) なる連立方程式を解くことによって求めることができる.

4-2 境界を含む三角形要素の数値計算

図5に示すような τ 軸を含む三角形要素については (8a), (8b), (8d), (8f) が成り立つので, これら4式から τ 軸上の P 点における6個の未知数を定めるためには τ 軸上すなわち衝撃点において更に2個の境界条件を与える必要がある. 本報告では無限長はりの中央点に弾性棒を衝突させて横衝撃荷重を与えた場合をとり扱っている所以对称の条件から衝撃点 $\xi = 0$ すなわち τ 軸上ではり断面の回転は0, 従って $\bar{\omega}_P = 0$ となる. いま一つの条件はつぎの接触条件から求められる.

小高, 中原によれば, はりに衝突した棒を材質, 断面共に一様な弾性棒と考えると棒とはりとの接触面に生じた圧縮応力 σ' は, 棒の直下のはり部分の

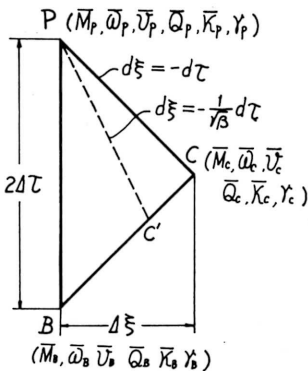


図5. 三角形要素

変形を無視すると,

$$\sigma' = E' \left(V - \frac{dw_0}{dt} \right) / C_{M'} \quad (9)$$

ここで $E', C_{M'}$ は棒材料の縦弾性係数, 縦波の伝ば速度, V は衝突直前の棒の速度, $\frac{dw_0}{dt}$ は棒とはりが衝突後密着して z 方向に運動する速度である. いま, はりと棒との接触面積を A' とすると, 図6から明らかのように $A'\sigma'$ なる圧縮力は, はり断面に働かせん断力 Q_0 および棒直下部分の慣性力とつり合わなければならない. いま, 直下部分の慣性力を無視すると

$$A'E' \left(V - \frac{dw_0}{dt} \right) / C_{M'} + 2Q_0 = 0 \quad (10)$$

ここで $\frac{A'E'C_M}{2AEC_M'} = \lambda, \frac{dw_0}{dt} = v_0$ とおき上式を無次元化する化と

$$\lambda(\bar{V} - \bar{v}_0) + \bar{Q}_0 = 0 \quad (11)$$

棒直下部分とはり部分の境界でせん断力および速度が連続であるとする

$$\begin{aligned} \bar{Q}_P &= \bar{Q}_0, \quad \bar{v}_P = \bar{v}_0 \quad \text{したがって (11) 式は} \\ \lambda(\bar{V} - \bar{v}_P) + \bar{Q}_P &= 0 \quad (12) \end{aligned}$$

結局三角形要素における差分の式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_P - \bar{K}_B &= \bar{M}_P - \bar{M}_B \\ \gamma_P - \gamma_B &= \beta(\bar{Q}_P - \bar{Q}_B) \\ \bar{M}_P &= \bar{M}_C - \bar{\omega}_C - \frac{\bar{Q}_C + \bar{Q}_P}{2} \Delta\tau \\ \bar{Q}_P + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \bar{v}_P &= (1-\alpha)\bar{Q}_B + \alpha\bar{Q}_C \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \{ (1-\alpha)\bar{v}_B + \alpha\bar{v}_C \} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} \{ (1-\alpha)\bar{\omega}_B + \alpha\bar{\omega}_C + \bar{\omega}_P \} (2-\alpha) \Delta\tau \\ \lambda(\bar{V} - \bar{v}_P) + \bar{Q}_P &= 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

(13) 式を解くと τ 軸の P 点における $\bar{M}, \bar{K}, \bar{Q}, \bar{v}, \gamma$

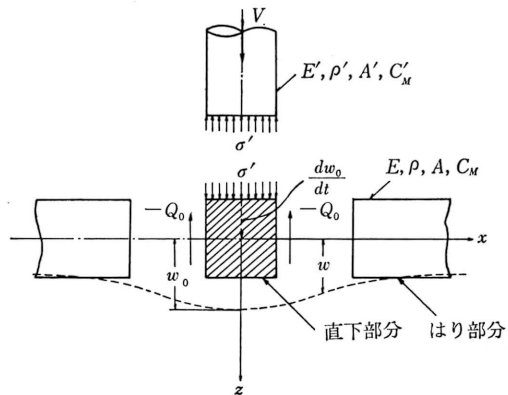


図6. 接触条件

を求めることができる。

4-3 原点における初期値の決定

(12) 式は $\tau \rightarrow 0$, すなわち衝撃直後においても成立するものであるからそのときのせん断力, 速度をそれぞれ \bar{Q}^*, \bar{v}^* とすると衝撃直後原点では

$$\lambda(\bar{V} - \bar{v}^*) + \bar{Q}^* = 0 \tag{14}$$

(14) 式から明らかなように \bar{Q}^* と \bar{v}^* は同時に 0 となり得ないので衝撃直後 \bar{Q}^* と \bar{v}^* とは有限の値をもつことになる。この \bar{Q}^*, \bar{v}^* の不連続量を $[\bar{Q}^*], [\bar{v}^*]$ で表わすと (14) 式は

$$\lambda(\bar{V} - [\bar{v}^*]) + [\bar{Q}^*] = 0 \tag{15}$$

ここで $[\bar{v}^*]$ と $[\bar{Q}^*]$ の関係を求める。図 7 (a) は、はりの微小部分をせん断波頭が通過しつつある状態を示している。せん断波の到達前の部分は before 部分として (b) で、通過した部分は after 状態として (a) で、それぞれの部分のせん断力および速度を $Q_b, v_b; Q_a, v_a$ とすると、せん断波頭が微小部分の左端から右端まで dt なる時間で通過するものとする、その間の

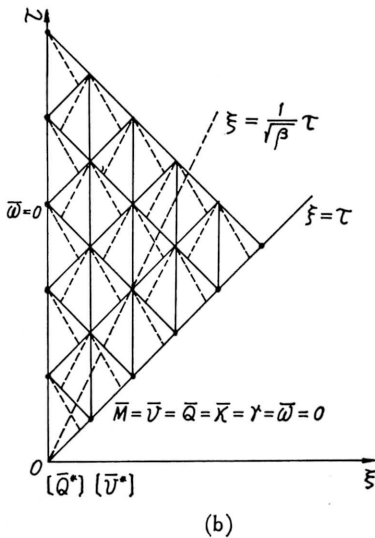
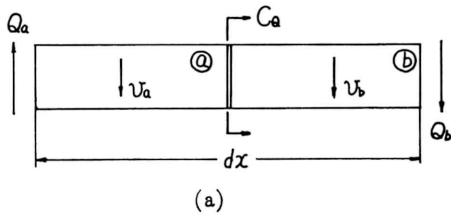


図 7. (a) せん断波頭が通過しつつあるはり要素 (b) $\xi\tau$ 平面上におけるその通路

せん断力による力積は $(Q_a - Q_b)dt$, 又は微小部分の運動量の変化は $\rho A dx(v_a - v_b)$ である。いま速度は下向きを正にとると

$$(Q_a - Q_b)dt = -\rho A dx(v_a - v_b)$$

$$\frac{dx}{dt} = C_Q \text{ であるので}$$

$$(Q_a - Q_b) = -\rho A C_Q(v_a - v_b) \tag{16}$$

いま $Q_a - Q_b = [Q^*], v_a - v_b = [v^*]$ とし (16) 式は無次元化して

$$[\bar{Q}^*] = -\frac{1}{\sqrt{\beta}}[\bar{v}^*] \tag{17}$$

(15), (17) 式から $[\bar{Q}^*], [\bar{v}^*]$ を求めることができる。又、原点は τ 軸上にあるので $\bar{w} = 0$, いま原点に \bar{M} , \bar{w} の不連続量が生じたとし、これを $[\bar{M}^*], [\bar{w}^*]$ とすると上述の $[\bar{Q}^*]$ と $[\bar{v}^*]$ の場合と同様の議論から

$[\bar{M}^*] = -[\bar{w}^*]$ しかるに $[\bar{w}^*] = 0$ であるので $[\bar{M}^*] = 0$, したがって原点には \bar{M} の跳躍量は生じないので $[\bar{M}^*] = 0$ と考えてよい。このことから原点では $[\bar{M}^*] = [\bar{w}^*] = 0$ 又、 $\bar{v} = [\bar{v}^*], \bar{Q} = [\bar{Q}^*]$ となる。

4-4 leading wave front 上での境界値

前記のように原点には \bar{M} および \bar{w} の不連続量は生じないので \bar{M} および \bar{w} の不連続量の通路である $\xi = \tau$ なる leading wave front 上の各頂点における \bar{M}, \bar{w} の値は 0 となる。又、 \bar{Q}^* と \bar{v}^* は $\xi = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tau$ なる特性曲線に沿って伝ばするので、同じく $\xi = \tau$ なる leading wave front 上で $\bar{Q} = \bar{v} = 0$ である。

これですべての境界値が決定されたので図 7 (b) に示すように原点および τ 軸を含む三角形要素から $\xi = \tau$ 直線に沿って計算を実行すればよいことになる。なお、原点に生じた $[\bar{Q}^*]$ は $\xi = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tau$ の特性曲線に沿って伝ばするので、この伝ばの影響を考慮する場合の計算では $\xi = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tau$ 直線と交わる要素の方程式にはこの不連続量を加味する必要がある。

5. 数値計算結果と実験結果との比較

5-1 数値計算結果

特性曲線法による計算を実行するに当たって、まず差分間隔の計算結果におよぼす影響を調査し、適切な差分間隔を決定する必要がある。この目的のために $\bar{V} = 1.0, \beta = 4.0$ とし、差分間隔 $\Delta\tau (= \Delta\xi) = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.5$ の場合についてそれぞれ計算を行い、安

定した計算値を得る差分間隔を数値実験的に求めることにした。ただしこの計算には不連続量の伝ばは除外してある。その結果を図8に示した。図中点線は $\Delta\tau = 0.1$ 、実線は0.25、破線は1.0、一点鎖線は2.5として計算したものである。差分間隔0.5のものは0.25の場合とほとんど一致しているの図には示されていない。図によると $\Delta\tau = 2.5$ の場合は他の計算結果に比べて曲率の変化がゆるやかで ξ の値が大きくなるにつれてその傾向は著しくなり、 $\xi = 60$ のときには他の曲線との間にかかなりの差異を生じ、明らかに鈍い応答を示している。又、 $\Delta\tau = 1.0$ の場合は2.5の場合ほどではないが ξ の増大につれて応答が鈍る傾向が見られる。これに対して $\Delta\tau = 0.25, 0.5$ の場合は曲率変化の大きな所でわずかに0.1の場合が大きくなる程度で他は全体に亘って両波形はよく一致しており、計算値が安定していることを示している。したがって、これ

以上差分間隔を短縮しても波形に大きな変化を生ずるとは考えられない。このことから本計算では、差分間隔は0.25ないし0.5程度で十分精度は確保し得ると考え、以下の計算においてはすべて $\Delta\tau (= \Delta\xi) = 0.25$ を使用した。

図9、図10はこのように計算された衝撃点のモーメントおよび弾性棒に生じた圧縮応力の時間的変化が示されている。図10における実線で画かれた曲線ははり断面の回転慣性とせん断変形を省略した場合のもので衝撃直後を除き両者の大きさはよく一致していることがわかる。

5-2 計算結果と実験結果との比較

図11, 12, 13は計算結果と実験結果との比較を示したものである。実験装置、方法等は第一報に詳しいのでここでは省略する。比較に供した実験結果は、はり

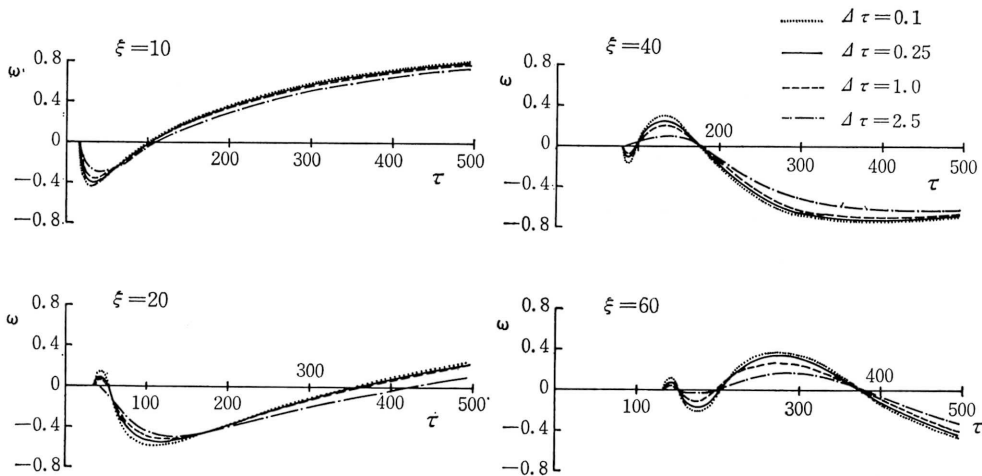


図8. 差分間隔の影響

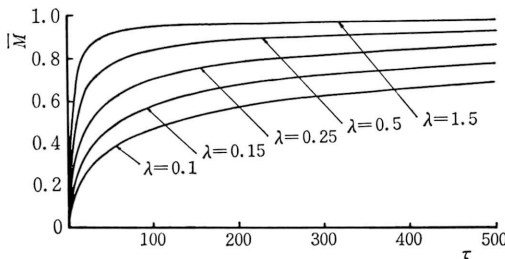


図9. はりの衝撃点の応力

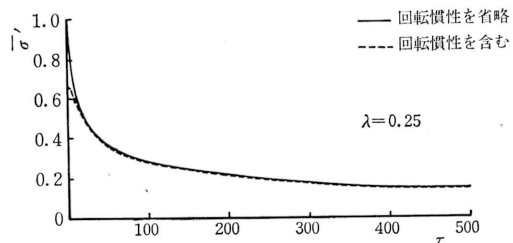


図10. 弾性棒の応力

III (22 mm 角の鋼製) についてのものである。図中の実線は実験波形、破線および一点鎖線はそれぞれ不連続波の伝ばを省略した場合と考慮した場合の特性曲線法による計算値である。又点線は小高・中原のラプラス変換による解析結果の定積分をシンプソン積分法を用いて倍精度で計算したもので $x = 200$ mm 以上の場所では計算値が安定しないため $x = 50$ mm, $x = 100$ mm についてのみ計算したもので、いずれもせん断波到達以後の計算だけがなされている。

まず各図における点線と一点鎖線の波形を比較することにより、ラプラス変換による計算波形と特性曲線法による計算波形の一致度を知ることが出来る。どの図の場合もせん断波到達直後の波形の落ちこむ部分では両波形の間に若干の差異が認められるが時間の経過と共にその差異は薄れ遂には一致する様子が読みとれる。

つぎに実験波形と計算値との比較について述べる。

図 11, 12, 13 は第一報に示したように 22 mm 角の鋼製角棒をそれぞれ鋼, 黄銅, アルミニウムの角棒で

衝撃したときのはりの各点における表面ひずみの時間的変化を示したものである。不連続波の伝ばを省略した特性曲線法による計算値は衝撃点における立ち上り部分を除いて全般的に大きさ、位相とも実験結果とよく一致している。これに対して不連続波の伝ばを考慮した計算値はせん断波到達後実験値と若干の差異が認められるが、間もなく回復し時間の経過と共に不連続波を考慮しない場合の波形曲線に一致するようになる。又、衝撃点から離れた $x = 400$ mm および $x = 600$ mm あたりではせん断波到達前の波形のとび上りを除いては実験結果とよく一致していることがわかる。又、不連続波を考慮しない計算値と実験値がせん断波の到達直後も一致していることは不連続波の伝ば現象があらわれないこと、すなわち原点におけるせん断力又は速度の不連続量が発生しないことを示している。このような理論と実験とのくいちがいは、理論解析において衝撃棒直下部分の慣性力を無視したために生じたもので、この慣性力を考慮した解析を行うとより完全な理論に近づくことが考えられる。

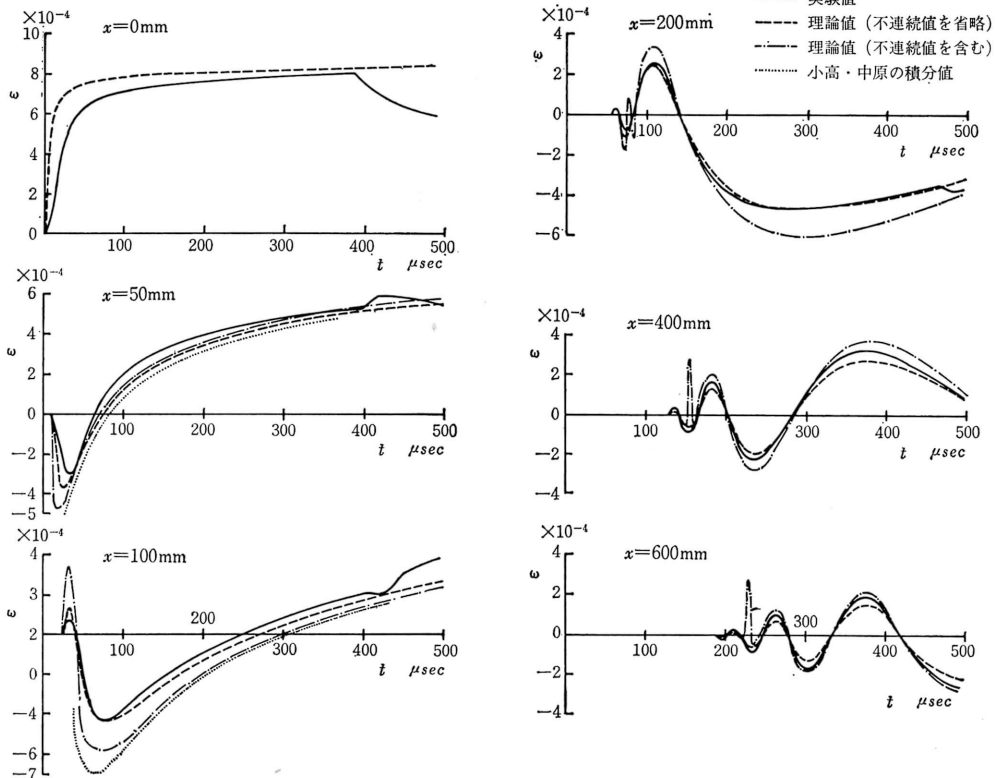


図 11. 各測定点のひずみ (はり III, 衝撃棒; 軟鋼) $V = 241.2$ cm/sec

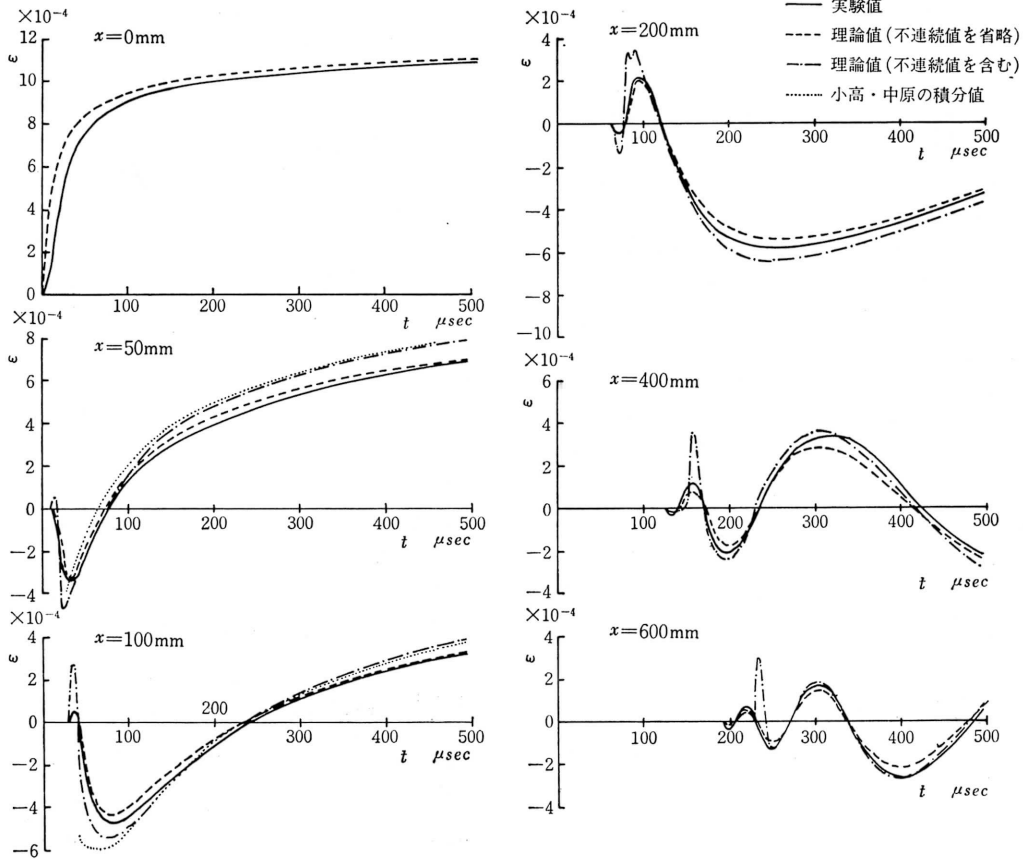


図12. 各測定点のひずみ (はり III, 衝撃棒; 黄銅) $V = 360.2 \text{ cm/sec}$

又、第一報で述べたようにはり断面の回転慣性、せん断変形を無視した横振動方程式にもとづき解析した結果は実験曲線との間に位相のずれを生じている。然し上記の比較に見られるように Timoshenko の方程式にもとづく解と実験曲線の間には上述のような位相のずれは見られない。このことから Timoshenko の方程式がはりの弾性挙動をより正確に表わしていることがわかる。

6. 結 語

以上 Timoshenko の方程式にもとづき横衝撃をうける無限長はりの挙動を特性曲線法により解析し、数値計算結果を検討し、又実験結果と比較してつぎの結論を得た。

1. Timoshenko の方程式の数値解を求める場合、特

性曲線法は有効な手段である。ただし、安定した計算値を得るために差分間隔は無次元数で 0.5 以下でなければならない。

2. 数値計算の結果と実験結果とは大きさ、位相ともよく合致する。

3. 実験結果にはせん断力の不連続量の伝ばは認められない。したがって理論をより現実的なものにするためには接触条件に直下部分の慣性力を考慮する必要がある。

終りに当って、この研究に対して貴重な御助言を頂いた富武満教授に深甚な謝意を表します。又、工業数学講座の富地豊子助手、機械工学科大学院生山崎和義君の御協力にも厚くお礼申し上げます。

なお、本計算には鹿児島大学計算機室の FACOM 230-45 S を使用したことを付記する。

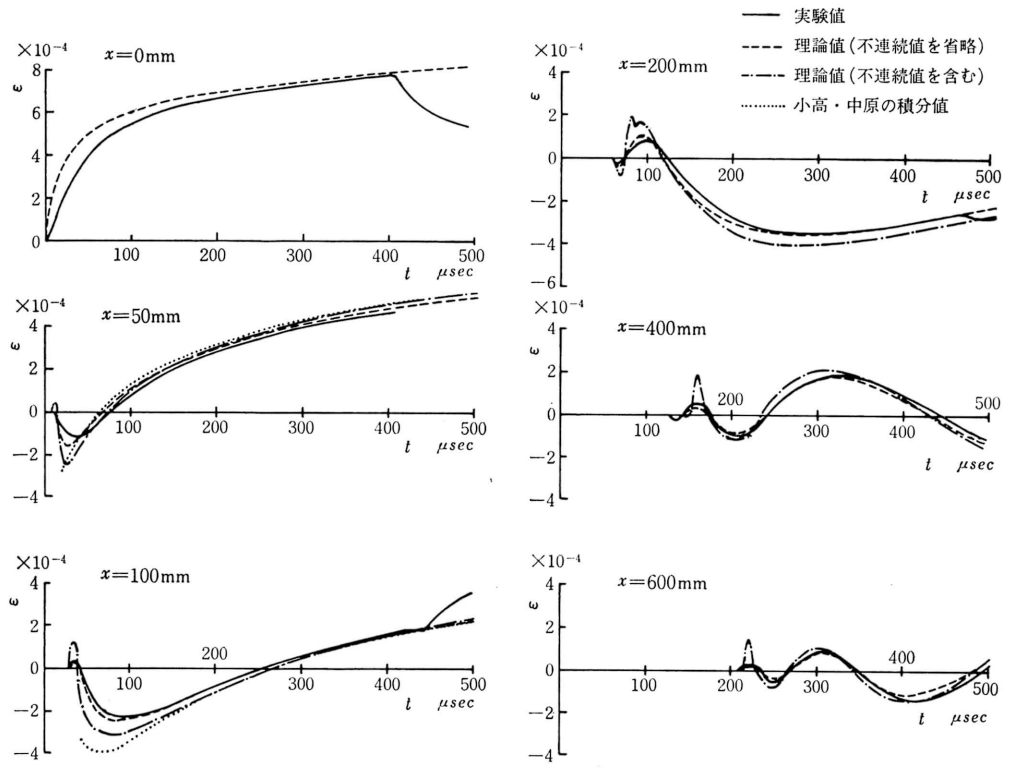


図13. 各測定点のひずみ (はり III, 衝撃棒; アルミニウム) $V = 305.5 \text{ cm/sec}$

参考文献

- 1) Dengler, M. A. and Goland, M. : Proc. 1st U. S. National Congress of Applied Mechanics, (1952).
- 2) B. A. Boley and C. C. Chao : J. Appl. Mech., 22-4, (1955).
- 3) W. Flügge and E. E. Zajac : Ing. Arch., 28 (1959).
- 4) Leonard, R. W. and B. Budiansky : NACA, TN 2874 (1953).
- 5) Plass, H. J., Jr. : Jr. Appl. Mech., 25 (1958).
- 6) Plass, H. J., Jr. : Proc. 2nd Midwestern Conf. on Solid Mech. (1955).
- 7) 小高・中原 : 日本機械学会論文集, 33巻 248号 (昭和42-4).