

断面積一定の管内を流れる二つの亜音速流れの中を伝ばする圧力波*

与那嶺 牧子^{*1}, 山脇 猛 愛^{*2}, 宮里 義 昭^{*1}
益田 光 治^{*1}, 片野田 洋^{*3}, 松尾 一 泰^{*3}Pressure Waves Propagating against Two Parallel Subsonic
Streams in a Constant Area Straight DuctMakiko YONAMINE^{*4}, Takeyoshi YAMAWAKI, Yoshiaki MIYAZATO,
Mitsuharu MASUDA, Hiroshi KATANODA and Kazuyasu MATSUO^{**} Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University,
6-1 Kasuga-Kouen, Kasuga-shi, Fukuoka, 816-8580 Japan

The characteristics of a pressure wave propagating against two parallel subsonic streams in a constant-area straight duct have been investigated experimentally and numerically. Optical observations by the schlieren method as well as wall pressure measurements have been performed to clarify both the structure and the propagation velocity of the pressure wave. Computations have been carried out by two-dimensional Euler equations using the Chakravarthy-Osher-type TVD scheme. The effects of the static pressure ratio across the pressure wave on the propagation velocity are shown and discussed.

Key Words: Compressible Flow, Flow Visualization, Internal Flow, Compound Waves, Compound Choking

1. ま え が き

単一の作動気体が先細ノズル内で等エントロピー膨張してノズル出口でチョークすると、背圧をそれ以下に下げてもノズル出口より上流の流れはまったく影響を受けない。これはノズル出口より下流の変化が上流へ伝ばする速度(音速)がちょうどノズル出口における流速と等しいため、背圧の影響が上流へさかのぼることができないためである⁽¹⁾。一方、速度の異なる二つの流れが先細ノズルに流入し、背圧まで膨張する場合においても、二つの流れの貯気圧をそれぞれ一定にし、背圧をある圧力まで下げるとチョークが発生する。このような流れのチョークは複合チョーク⁽²⁾と呼ばれ、超音速エゼクタ^{(3)~(5)}、スクラムジェットエンジン^{(6)~(10)}、ノズル内の非一様流の効果によるチョーク^{(11)~(15)}に関連して研究が行われている。

Bernsteinら⁽²⁾は、ラバルノズル内で異なる速度を

もつ複数の亜音速流れが混合せずに膨張し、ノズルスロートでチョークする流れを解析した。その結果、チョークしたときのスロート断面にわたるマッハ数は1ではなく、亜音速と超音速からなる分布になると結論し、このときのチョークを複合チョークと呼んだ。しかしこの場合、スロートでの流速分布に亜音速領域を含むため、流れはチョークしているにもかかわらず、スロート下流の変化は、亜音速領域を通して上流に及ぶことが考えられる。2章で述べるように、この矛盾を回避するため Bernsteinらは複合音波の概念を導入し、スロート下流の変化は局所音速ではなく、複合音波の速度で伝わるとし、複合チョークが生じたときのスロートの流速は複合音速に等しいと推察した。また彼らは、複合チョークがちょうど起こったときの背圧からさらに背圧を下げると、ノズルの末広部に複合衝撃波が生じると予測している。しかし、複合音波や複合衝撃波については不明な点が多く、実験的な検証はまったくないのが現状である。

Sajben⁽¹⁶⁾は、断面積一定の管内において非一様な速度分布をもつ流れの中を伝ばする圧力波について、波の前後の速度分布と密度分布が相似であるという仮定に基づいて検査体積法による解析を行った。その解析により、波の前後に非一様な速度分布がある場合の

* 原稿受付 2003年9月29日。

^{*1} 正員,九州大学大学院総合理工学府(☎816-8580)春日市春日公園6-1。^{*2} 日本アイ・ビー・エム(株)(☎103-8510)東京都中央区日本橋箱崎町19-21。^{*3} 正員,北九州市立大学国際環境工学部(☎808-0135)北九州市若松区ひびきの1-1。

E-mail: yonamine@ence.kyushu-u.ac.jp

ランキン・ユゴニオの式に相当する簡便な関係式を導いている。またこの関係式から、波の前後の静圧比が1のときの圧力波の伝ば速度(Sajbenの仮定による音速)を求め、Bernsteinらの提唱した複合音波の伝ば速度と比較した結果、Sajbenの仮定による音波の速度は、複合音波の伝ば速度より小さくなることを報告している。しかし実際の管内の流れでは波の通過によって流れは複雑に変化するため、波の前後について相似の仮定は適用できないことが予想される。

上述した Bernstein らと Sajben の解析では、いずれも検査体積法が用いられているため、波の伝ば速度は求められるが、波の構造の詳細についてはまったく不明である。また、複合チョーク現象の特性を明らかにするためには、管内の流速が異なる複数の流れの中を伝ばする圧力波の構造を調べる必要があると思われるが、このような研究はこれまで行われていない。したがって本研究では、最も基本的な場合、すなわち断面積一定のダクト内で二つの異なる亜音速平行流に対して下流から伝ばする圧力波の特性を、実験および数値計算により調べたので報告する。

2. Bernstein ら⁽²⁾による複合音波の解析モデル

図1に示すように、断面積一定の管内において、圧力 p は等しいが比熱比 γ 、密度 ρ 、速度 u 、断面積 A の異なる完全気体が上部 ($\gamma_1, \rho_1, u_1, A_1$) と下部 ($\gamma_2, \rho_2, u_2, A_2$) で二つに分離している気体中を微小振幅の圧力波が左方向に伝ばする流れ場を考える。静止座標系における上部と下部の圧力波の伝ば速度をそれぞれ a_1 と a_2 とすれば、 a_1 と a_2 は一般に異なるが、Bernstein らは上部と下部の波の界面を介しての干渉によりそれらは等しくなると仮定し ($a_1 = a_2 = a$)、この波を複合音波と定義した。また複合音波が通過することによる圧力上昇 δp は上部と下部で同じと仮定し、複合音波の通過前と通過後で二つの気体は混合せず、上部と下部の間の界面や壁面の摩擦力は無視する。さ

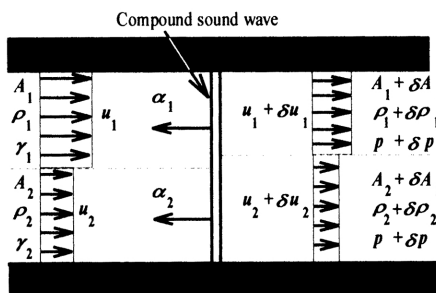


Fig. 1 Compound sound wave

らに複合音波通過後の上部と下部の圧力上昇 δp と誘起速度 δu_1 と δu_2 および断面積変化 δA_1 と δA_2 は微小で、上部と下部におけるそれぞれの流れは等エントロピー変化すると仮定する。まず、上部の流れについて考える。複合音波を固定した座標系を考え、複合音波の波頭と波尾を含むように検査体積を十分大きくすると、質量保存則より

$$(\rho_1 + \delta\rho_1)(\alpha + u_1 + \delta u_1)(A_1 + \delta A_1) = \rho_1(\alpha + u_1)A_1 \dots\dots\dots (1)$$

運動量保存則より⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned} &(\rho_1 + \delta\rho_1)(\alpha + u_1 + \delta u_1)^2(A_1 + \delta A_1) \\ &\quad - \rho_1(\alpha + u_1)^2 A_1 \\ &= pA_1 + p\delta A_1 - (p + \delta p)(A_1 + \delta A_1) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

等エントロピー流れの仮定より

$$\frac{\delta p}{\delta\rho_1} = \gamma_1 \frac{p}{\rho_1} \dots\dots\dots (3)$$

式(1)の二次以上の微小項を省略すると

$$\delta u_1 = -(\alpha + u_1) \left(\frac{\delta A_1}{A_1} + \frac{\delta\rho_1}{\rho_1} \right) \dots\dots\dots (4)$$

式(3)と式(4)より

$$\delta u_1 = -(\alpha + u_1) \left(\frac{\delta A_1}{A_1} + \frac{\delta p}{\gamma_1 p} \right) \dots\dots\dots (5)$$

式(2)も、二次以上の微小項を省略すると

$$\delta u_1 = -\frac{\delta p}{\rho_1(\alpha + u_1)} = -\frac{R_1 T_1 \delta p}{(\alpha + u_1)p} = -\frac{a_1^2 \delta p}{(\alpha + u_1)\gamma_1 p} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 R_1, T_1 および $a_1 = (\gamma_1 p / \rho_1)^{1/2}$ は上部の気体の気体定数、静温度、音速を表す。

以上の式と、管内の断面積が一定であるという条件を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{\gamma_1} \left[\frac{1}{(\alpha/a_1 + u_1/a_1)^2} - 1 \right] \\ &+ \frac{A_2}{\gamma_2} \left[\frac{1}{(\alpha/a_2 + u_2/a_2)^2} - 1 \right] = 0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

上式が Bernstein ら⁽²⁾のモデルによって解析した断面積一定の管内の二つの亜音速流れの中を伝ばする複合音波の伝ば速度 α についての関係式である。なお、本研究では波面前後で微小な圧力差が存在する複合圧力波を取扱う。この場合複合圧力波の伝ば速度は複合音波と異なり、波面前後の圧力比に依存する。

3. 実験装置と方法

本研究で使用した実験装置の模式図を図2に示す。圧縮機によって貯気槽に蓄えられた高圧の乾燥空気は、図2の左端に示す上部および下部の手動バルブを通った後よどみ状態になり、仕切板先端(測定部入口)で合流し、長さ 100 mm の断面積一定の測定部を通過

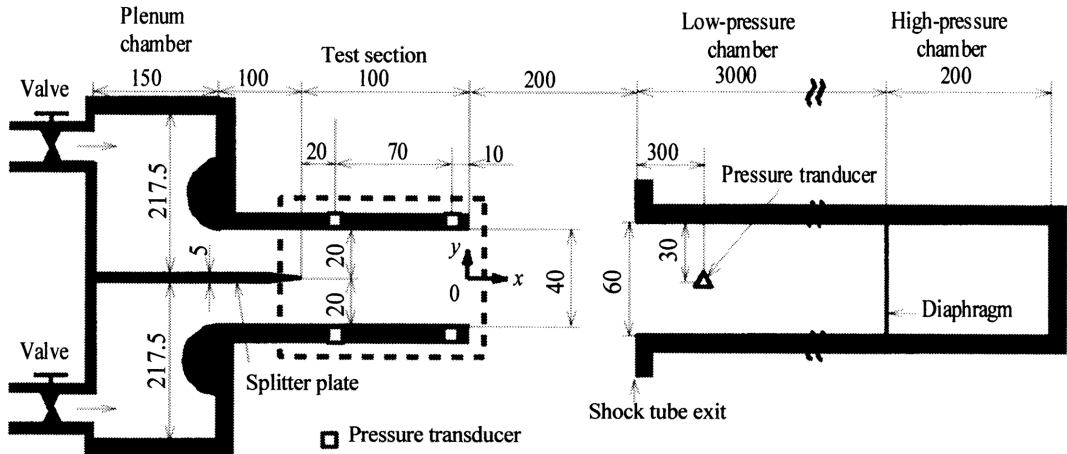


Fig. 2 Schematic diagram of experimental apparatus

後大気に開放される。本実験では測定部上流の上部集合洞のよどみ圧力と下部集合洞のよどみ圧力を手動バルブ上流に取付けたブルドン管圧力計の目盛を見て調節した。測定部入口の高さは上部側と下部側ともに 20 mm、出口の高さは 40 mm である。またバルブ下流のよどみ室および測定部の幅は、すべて 20 mm である。測定部出口から 200 mm 下流にはショックチューブが設置してあり、自然破膜によって発生した圧力波は、高さ 60 mm、幅 60 mm、長さ 3000 mm の断面積一定の低圧室を通った後大気に開放される。図 2 の測定部を囲む破線は、シュリーレン法による流れの可視化範囲を示している。シュリーレン撮影には発光時間約 20 ns のキセノン光源 [(有)ビオレック社製、ナノスパーク NS-1400 P] を用いた。ダクト中心軸上における測定部出口の位置を原点として流れ方向に x 軸ととり、それに垂直に y 軸をとる。壁面圧力測定は、 $x = -10$ mm と -80 mm の上壁と下壁(図 2 の □ 印)およびショックチューブ出口から 300 mm 内側($x = 500$ mm)の低圧室側壁(図 2 の △ 印)に面一に取付けた半導体圧力センサ [TEAC(株)社製、XCS-190] により行った。圧力孔直径は 4 mm、圧力計の直径と感圧部はそれぞれ 3.86 mm と 1.85 mm である。五つの圧力センサからの信号は、増幅器、デジタルストレージスコープ [岩崎通信社製、DS 9121] を通った後、パーソナルコンピュータに入力される。データのサンプリング周波数は 10 MHz、データ点数は 30000 点である。なお、測定部内を伝ばする圧力波を写真撮影するために、低圧室側壁からの圧力信号の一部は、遅延回路を経てシュリーレン光源装置に入力された。また、ショックチューブによって圧力波を発生さ

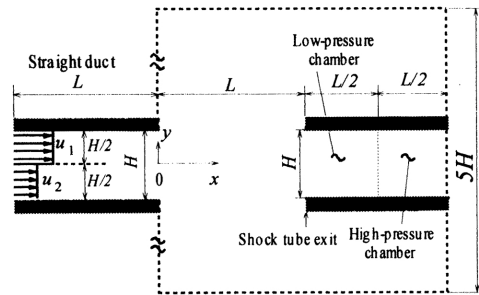


Fig. 3 Computational domain

せる前に、 $x = -80$ mm の位置において、 $y = -16 \sim 16$ mm の範囲を 4 mm 間隔で全圧ピトー管計測し、これより速度分布を求めた。本実験で用いたピトー管⁽¹⁸⁾の先端は、外径 1.0 mm、内径 0.9 mm、長さ 30 mm である。

4. 数値計算方法

数値計算における作動気体は空気で、比熱比 $\gamma = 1.4$ の完全気体とする。対象とする流れ場を図 3 に示す。基礎方程式には二次元オイラー方程式を用いた。空間方向の離散化には Chakravarthy-Osher 型の TVD スキームを採用し、時間積分には 3 段階の Runge-Kutta 法を用いた。TVD 法は衝撃波のような急激な状態量の変化を含む流れ場も安定に計算でき⁽¹⁹⁾、衝撃波による状態変化は 2~3 格子点内で表される。対象とする流れ場は図 3 に示すとおり高さ H 、長さ $L = 3.3 H$ の断面積一定のダクト内部と、高圧室と低圧室の長さが等しいショックチューブ内部および図 3 の破線で示す領域からなる。本計算では、 x 方向

に $-L \sim 2L$, y 方向に $-H/2 \sim H/2$ の領域で等間隔直交格子, それ以外の領域では x 軸から離れるに従って y 方向の間隔が大きくなる不等間隔直交格子を用いた. 格子分割数が計算精度に及ぼす影響を調べた結果, x 方向に 1800 点, y 方向に 360 点の格子をとれば, それ以上格子数を増やしても, 圧力波の伝ば速度は 1% 以下の誤差で一致することを確認した. 境界条件は, ダクト壁面およびショックチューブの壁面で滑り条件, ダクト上流は流入条件, 自由境界面上では各変数のこう配が零となるように設定した. なお, ダクト入口の上部側と下部側の速度分布は一様流とした.

5. 実験結果と考察

5.1 測定部入口近傍の速度分布 $x = -80$ mm の位置の流速分布を図 4 に示す. 座標 x と y は図 2 と同様である. 縦軸の正の範囲 ($y \geq 0$) は高速側流, 負の範囲 ($y \leq 0$) は低速側流を示し, 横軸は x 軸の正方向の流速 u [m/s] を示す. 図 4 より高速側の中心付近の流速は約 100 m/s, 低速側の中心付近の流速は約 70 m/s となる. 本論文では数値計算におけるダクト入口の速度の条件として, 高速側流速 $u_1 = 100$ m/s, 低速側流速 $u_2 = 70$ m/s に設定した.

5.2 流れの可視化 ショックチューブにより形成された圧力波が測定部内を伝ばするときの代表的なシュリーレン写真(ナイフエッジは流れに垂直)を図 5(a)~(c) に示す. 図 5 では, 測定部入口(仕切板先端)の位置を黒い縦の破線で示している. 図 5(a) は測定部入口における上部と下部の気流速度が零の場合 ($u_1 = u_2 = 0$) の圧力波, 図 5(b), (c) は二つの異なる垂直流速 ($u_1 \approx 100$ m/s, $u_2 \approx 70$ m/s) の上流側に伝ばする圧力波を示す. また図 5(b), (c) の t は, 図 2 の Δ で示す位置を圧力波が通過してからの時間である. 図 5(b) では, 測定部の外を伝ばする圧力波の約 20 mm 後ろに, ダクト中心軸よりわずかに上に分枝

点をもち, ダクトの下壁面に向かって分枝した圧力波が観察できる. また図 5(c) は, この分枝した圧力波がほぼ同じ形状を保ったまま上流方向に伝ばしていることを示している. このような波系を本研究では複合圧力波と呼ぶ. なお, 図 5(c) の $x = -50$ mm 近傍に現れている第 2 の波は, ショックチューブから放出された圧力波が噴流による変形を受け発生したものと考えられる.

5.3 壁面静圧分布 図 6 に $x = -10$ mm および -80 mm の位置で測定した伝ばする圧力波の壁面静圧の時間履歴を示す. 図 6(a) は上壁面の, (b) は下壁面の静圧を示す. 縦軸は絶対圧 p [kPa], 横軸の時間 t [ms] は, 5.2 節と同様, 図 2 の Δ で示す位置を圧力波が通過してからの時間である. 図 6 中の実線と破線はそれぞれ $x = -10$ mm と -80 mm の位置で計測した圧力波形である. また, 図 5(c) のシュリーレン写真と, 図 6 の圧力計測結果を考慮して描いた圧力波の模式図を図 7 に示す. 図 7 中の記号 A~G は図 6

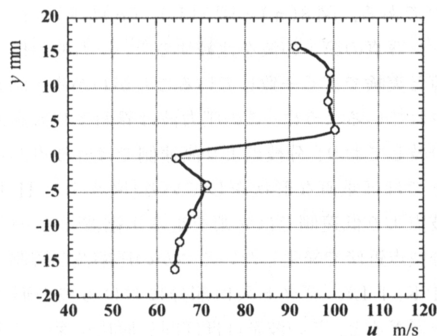


Fig. 4 Velocity distribution in test section

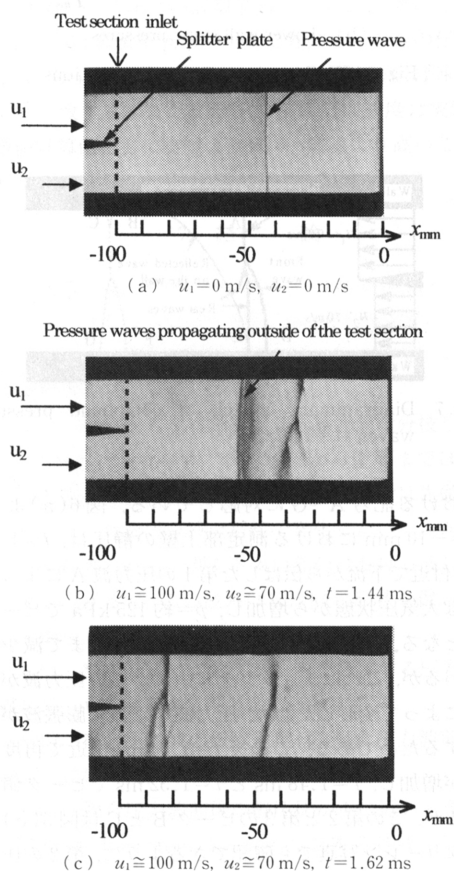
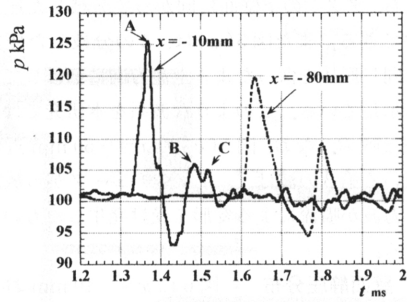
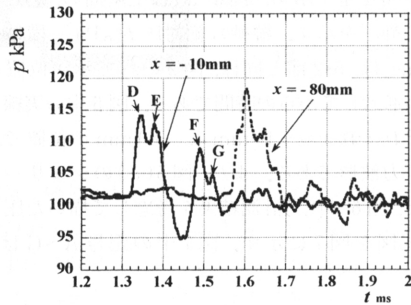


Fig. 5 Typical schlieren photographs (vertical knife edge)



(a) Upper wall static pressures



(b) Lower wall static pressures

Fig. 6 Wall static pressure distributions ($u_1 \cong 100$ m/s, $u_2 \cong 70$ m/s)

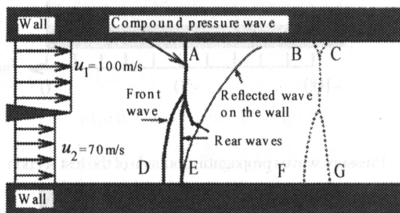
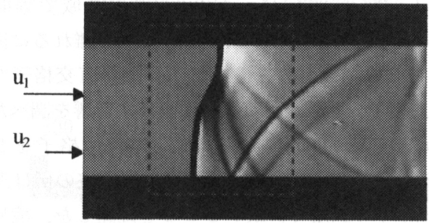
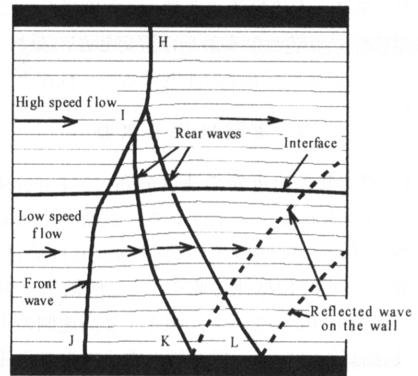


Fig. 7 Diagrammatic sketch of compound pressure waves ($t = 1.62$ ms)

における記号 A~G に対応している。図 6(a)より、 $x = -10$ mm における測定部上壁の静圧は、 $t = 1.33$ ms 付近で下流から伝ばした第 1 の圧力波 A によってほぼ大気圧状態から増加し、 $p \cong 125$ kPa でピーク値となる。その後 $t = 1.42$ ms 付近で負圧まで減少しているが、これはショックチューブからの圧力波が噴流によって変形したため、圧力波の下流に膨張波が発生するためである。この後 $t = 1.44$ ms 付近で再度圧力が増加し、 $t = 1.48$ ms と $t = 1.52$ ms でピーク値となるが、この第 2 と第 3 のピーク B と C は図 5(c) のシュリーレン写真でも確認できるように、第 2 の圧力波によるものである。 $x = -80$ mm における測定部上壁面静圧についても $x = -10$ mm における上壁面静



(a) Schlieren image



(b) Stream lines and pressure wave diagram

Fig. 8 Computed result

圧とほぼ同様なことがいえる。図 6(b) の下壁面静圧分布の D と E および F と G で示すピーク値は、図 7 に示すように、第 1 と第 2 の圧力波が低速流側で二つに分枝していることによる。

6. 数値計算結果と考察

6.1 圧力波の構造 断面積一定のダクト内において、ダクト入口の上部と下部の気流速度をそれぞれ $u_1 = 100$ m/s と $u_2 = 70$ m/s としたときの数値計算結果を図 8 に示す。図 8(a) はダクト内を伝ばする圧力波のシュリーレン表示、図 8(b) は図 8(a) において破線で示す範囲の流線表示に圧力波の模式図を加えたものである。図 8(a) と図 5(b), (c) に示すシュリーレン写真の第 1 の波を比較すると、圧力波の構造は計算と実験でよく一致していることがわかる。図 8 に示されているように、この圧力波は界面よりも高速側で分枝しており、分枝点より高速側では分枝点から壁面までほぼ垂直な形状をしている [図 8(b), H-I]。分枝点より低速側では先頭を走る圧縮波 [I-J] の背後に分枝点近傍で発生したいくつかの圧縮波が観測される (I-K, I-L)。ダクト入口部分における波の形成過程を過ぎると、この波系はほぼ同じ形状を保ってダクト内を上流側に伝ばする。

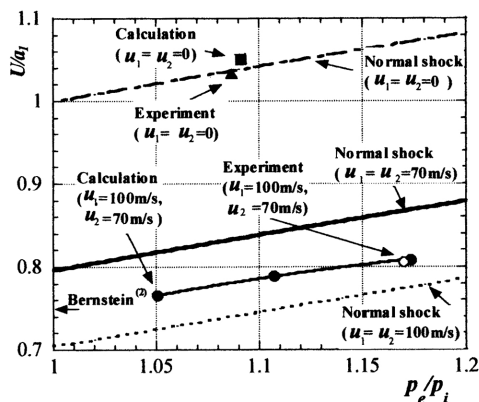


Fig.9 Propagation velocity of compound pressure waves

速度差のある超音速流れ場において、二つの流れの界面に波が入射した場合、界面において流れ方向と静圧が同じになるためには入射波の一部が透過し、一部が反射しなければならない⁽²⁰⁾、図5と図8に示されている界面近傍における波の分枝はこれと同様の機構で発生したものと考えられる。すなわち、流れに逆らって上流へ伝ばする圧力波はダクトの上下壁で流れが壁に沿い、かつ圧力波通過後の界面において流れ方向が等しく静圧も一致しなければならない。これらの条件により、圧力波は図に示されるような分枝した二次元構造をとると考えられる。本論文では、以降、このような圧力波を複合圧力波と呼ぶことにする。

Bernstein ら⁽²⁾は複合音波の概念の導入にあたりその構造を推測することはなかったが、この音波が二次元構造を有する可能性を排除していない。先に述べたように、その後、境界層に関連して複合音波が関与する研究が行われてきたが⁽¹⁶⁾、その詳細な構造はこれまでに明らかにされていなかった。本実験における波は前後の圧力比が1.17の圧力波で音波とは異なるが、圧力比が小さいことと圧力比1.05の数値計算も同様の結果を示していることから、著者らは複合音波も図5と図8と同様の二次元構造をとると考えている。

6・2 圧力波の伝ば速度 速度差のある流れに逆らって断面積一定の管内を伝ばする複合圧力波の伝ば速度を図9に示す。縦軸は圧力波の伝ば速度 U を測定部入口における高速流側の音速 a_1 で無次元化した値を表し、横軸は圧力波直後のピーク圧力 p_e (図6の点A, D, Eの平均値)と直前の圧力 p_i (ほぼ大気圧)との比 p_e/p_i を表す。なお、複合圧力波の波頭位置を、圧力波形において圧力上昇開始部近傍における変曲点での接線と、圧力上昇開始前の圧力の平均値を示す線(ほぼ大気圧)の交点として定義した。また、伝ば速度

U はこの位置とセンサ間の距離(70 mm)とから算出された。図9中の一点鎖線、実線、破線は、ダクト上流の流れが断面にわたって一様と仮定したときの圧力波の伝ば速度の計算値である。これらは、上流の速度をそれぞれ0, 70, 100 m/sとし、圧力波前後の静圧比と圧力波上流の音速から一次元非粘性垂直衝撃波理論によって求められた。また、流れのない管内を伝ばする圧力波についての実験値を▲、数値計算値を■で示し、速度差のある二つの流れに逆らって管内を伝ばする圧力波(複合圧力波)の伝ば速度についての実験値を○、数値計算値を●で示す。図9中の縦軸に左向き矢印で示す値は、2章の式(10)から求めた Bernstein ら⁽²⁾のモデルによる複合音波の伝ば速度 α を示す。なおこの値は、Sajben らのモデル⁽¹⁶⁾による計算値ともほぼ一致する。

図9より、ダクト内に流れがない場合、圧力波の伝ば速度は実験値、数値計算値ともに一次元理論による垂直衝撃波の伝ば速度の値とほぼ一致する。次にダクト内に異なる二つの超音速流れが存在する場合、複合圧力波の伝ば速度の計算値は、 p_e/p_i に比例して増加し、この計算値を $p_e/p_i=1$ まで外挿したときの伝ば速度は、Bernstein らの提唱した複合音波の伝ば速度によく一致する。また複合圧力波の伝ば速度は実験値、数値計算値ともに実線より低く、破線より高いことがわかる。

7. 結 論

断面積一定の管内において二つの異なる平行な超音速流れに逆らって伝ばする圧力波(複合圧力波)の特性を、実験および数値計算により調べた。得られた結果を要約すると以下のとおりである。

(1) 複合圧力波は界面よりも高速側で分枝しており、分枝点より高速側では分枝点から壁面までほぼ垂直な形状をしている。分枝点より低速側では先頭を走る圧縮波の背後に分枝点近傍で発生したいくつかの圧縮波が観測される。ダクト入口部分における波の形成過程を過ぎると、この波系はほぼ同じ形状を保ってダクト内を上流側に伝ばする。

(2) 数値計算によるダクト内を伝ばする圧力波の構造は、可視化実験結果とよく一致する。

(3) 複合圧力波の伝ば速度は、複合圧力波前後の静圧比にほぼ比例して増加する。

(4) 複合圧力波前後の静圧比が1に近いときの伝ば速度は、Bernstein らの提唱した複合音波の伝ば速度に一致する。

実験装置の製作にあたり、本研究室の矢野榮宣助手、

大学院生の福本健太郎氏と牛島孝則氏の助力を得た。
また本研究は、日本学術振興会の科学研究費補助金
(特別研究員奨励費)の援助を得た。ここに深謝する。

文 献

- (1) 松尾一泰, 圧縮性流体力学, (1994), 65, 理工学社.
- (2) Bernstein, A., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **34** (1967), 548-554.
- (3) Pearson, H., ほか 8 名, *J. R. Aeronaut. Soc.*, **62** (1958), 746-751.
- (4) Hoge, H. J. and Segars, R. A., *AIAA J.*, **3**-12 (1965), 2177-2183.
- (5) Clark, L. T., *AIAA Paper*, No. 95-0645 (1995).
- (6) Lewis, M. J. and Hastings, D. E., *AIAA Paper*, No. 87-2079 (1987).
- (7) Sato, T. and Kaji, S., *AIAA Paper*, No. 92-5102 (1992).
- (8) 佐藤哲也・梶昭次郎, 日本航空宇宙学会誌, **41**-476 (1993), 515-523.
- (9) 文献(8)の524-530ページ.
- (10) Schindel, L., *J. Prop. Power*, **15**-2 (1999), 363-364.
- (11) Fage, E. L., *AIAA Paper*, No. 74-1176 (1974).
- (12) Fage, E. L., *AIAA J.*, **14**-5 (1976), 681-683.
- (13) Decher, R., *J. Aircraft*, **15**-7 (1978), 416-421.
- (14) Decher, R., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **117** (1995), 617-622.
- (15) 権真脚・ほか 5 名, 機論, **68**-675, B (2002), 2960-2967.
- (16) Sajben, M., *J. Aircraft*, **5**-2 (1968), 154-157.
- (17) Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, (1953), 224, The Ronald Press Company.
- (18) Katanoda, H., ほか 3 名, *Shock Waves*, **10** (2000), 95-101.
- (19) Yee, H. C., *NASA Tech. Mem.*, 89464 (1987).
- (20) Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, (1953), 461, The Ronald Press Company.