

# 二次元の自由表面を持つポテンシャル流体と 弾性容器との連成問題の数値解析

皆川 洋一\*

Dynamic Interactive Behavior Between a Potential Fluid and Elastic Container  
in Large Deformation

Two Dimensional Interaction Problems of Potential Fluid and Elastic Bar

Youichi MINAKAWA\*

Liquid-filled tanks on a shaking table showed some vibratory responses that were contradiction to expectation of elementary tank theory. The author has been studying to analyze the responses that might be caused by dynamic geometric nonlinear behavior of the system, and showed a Lagrangian function that governed the interactive behavior between the potential fluid and elastic container in large deformations. Here, applying ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian Element) to the to the functional of two dimensional model, we propose a new procedure to analyze the problem, and get various nonlinear vibration responses corresponding to vibratory responses observed in the experiment on shaking table.

**Keywords :** nonlinear response of tank, interactive behavior, fluid and elastic container,

1/2 subharmonic oscillation, summed combination resonance

## 1. はじめに

液体と弾性容器の連成問題は、液体の質量効果を弾性容器に付加する定式化が 1950 年代まで用いられていた。その後、ポテンシャル流体と弾性容器の微小変形場における連成問題の汎関数が開発され、これに基づく線形理論が定式化され、工学的に有用な知見が得られている。J.C.Luke<sup>1)</sup>はポテンシャル流体の圧力式を流体場で積分する関数がこの流体の運動を支配する厳密な Lagrange 関数となることを示した。これを利用して、剛なタンクに入った液体の非線形振動応答が解析され、実験値との整合性が報告されている。有限要素法、境界要素法を利用して、流体と弾性容器の連成問題に生ずる条件の処理と解析が報告<sup>13)</sup>されている。有限要素法は移動する境界

における流体の処理に困難があり、境界要素法は数値解析における解の安定性確保に工夫が必要となる。

著者は容器の弾性変位に伴う流体場の変形を考慮すると、ポテンシャル流体と弾性容器の大変形動的連成問題における厳密な汎関数<sup>3,4)</sup>が得られることを示した。誘導された汎関数を解析すれば、円筒タンクの実験から得られる非線形振動応答が理論的に解析できると確信し、この汎関数に基づいて、系を離散化し、解析<sup>2)</sup>することを試みた。ポテンシャル流体の圧力積分は Euler の方法で表示され、弾性容器は通常 Lagrange の方法で表示されるので、流体と弾性容器の相互作用面が変形・移動することを的確に処理することが困難であった。

1990 年代に入って、移動する参照座標を導入する ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 要素<sup>13)</sup>等が開発

---

2012 年 8 月 17 日 受理

\*建築学専攻

され、流体の運動を流体粒子の運動とは独立した座標系を用いて計測することが可能となった。

流体を非粘性、渦なしのポテンシャル流体に限定すれば、自由表面を持つ流体と弾性体の相互作用問題を支配する汎関数が存在するので、離散化された場の方程式を誘導することができる。まず、この汎関数の第一変分を誘導し、適切な基礎式、および境界条件を与えることを示す。次に、流体の移動節点を導入し、ポテンシャル流体と弾性容器の大変形動的連成問題における厳密な汎関数を離散化する直接法の定式化を示す。

水の入った円筒タンクへ周期的な地動を作用させると、ある外力振動数領域において、分数調波振動等が分岐し、大きな振動に成長する非線形振動応答が生起する。著者は円筒タンクに生起する強烈的な分数調波振動応答を実験的に研究<sup>5,7)</sup>して来た。

本論文は、二次元の流体と弾性容器の連成問題における容器の応答に発生する分数調波振動に焦点を合わせた数値解析を行い、外力振動数と分岐する分数調波振動応答、および振動モードの関係を分析し、提案する解析手法の有用性を実証する。

## 2. ポテンシャル流体と弾性容器の大変形連成場における汎関数と離散化手法

### 2.1 ポテンシャル流体と弾性容器の連成場の汎関数

自由表面を有するポテンシャル流体を内蔵する弾性容器が、速度  $\mathbf{v}_0$  で運動する基盤の上に在る系を考える。基盤の上に立つ観察者が観測する流体へ速度ポテンシャル  $\varphi$ 、および流体の運動を測定する移動座標の速度  $\hat{\mathbf{v}}$  を導入すると、著者が示したポテンシャル流体と弾性容器の大変形連成場における汎関数  $I_m(\varphi, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})$ <sup>3,4)</sup> は次式のように表される。

$$I_m = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \iint_{A_L(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})} \rho_L \{ \dot{\varphi} + \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(y - y_f) \} dA_L - \int_0^t \{ \rho_E A_E \dot{\mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}/2 + \mathbf{v}_0) - \Pi(\mathbf{u}) \} ds \right] \quad (1)$$

ここに、 $\dot{\mathbf{v}}_0$ : 基盤の加速度、 $\boldsymbol{\eta}$ : 自由表面の波高ベクトル、 $\mathbf{u}$ : 弾性容器の変位ベクトル、 $\mathbf{r}$ : 変形後の位置ベクトル、 $\Pi$ : 弾性容器のポテンシャルエネルギー、 $A_L$ : 流体領域、 $\rho_L$ : 流体質量密度、 $A_E$ : 容器断面積、 $y_f$ : 自由表面の  $y$  座標値、 $\rho_E$ : 容器質量密度、 $g$ : 重力

加速度を意味する。

(1)式の第一変分<sup>3,4,5)</sup>は次式のように表される。

$$\delta I_m = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{S_f} \delta\varphi \rho_L (\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{i}_y) \mathbf{n}_L ds - \iint_{A_L(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})} \delta\varphi \rho_L \nabla^2 \varphi dA_L + \int_{S_f} \delta\eta \rho_L \{ \dot{\varphi} + \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(y - y_f) \} \mathbf{n}_L ds + \int_{S_i} \rho_L \delta\varphi (\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n}_L ds + \int_{S_0} \rho_L \delta\varphi (\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{n}_L ds + \int_{S_i} \rho_L \delta\mathbf{u} \{ \dot{\varphi} - \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(y - y_f) \} \mathbf{n}_L ds + \int_0^t \delta\mathbf{u} \{ \rho_E A_E (\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}_0) - \partial\Pi/\partial\mathbf{u} \} ds \right] \quad (2)$$

ここに、記号  $\mathbf{n}_L$ : 各境界における流体外向きの法線方向ベクトル、 $S_f$ : 流体自由表面、 $S_i$ : 流体と容器の相互作用面、 $S_0$ : 固定境界面を示す。

(2)式の第1変分から得られる流体領域、および各境界における境界条件式を整理する。

$$1) \text{ 流体内部 } A_L \text{ の条件: } \nabla^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

2) 流体自由表面  $S_f$ :

$$(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{i}_y) \mathbf{n}_L \big|_{y=y_f+\eta} = 0 \quad (4)$$

$$\{ \dot{\varphi} - \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g\eta \mathbf{i}_y \} \mathbf{n}_L \big|_{y=y_f+\eta} = 0 \quad (5)$$

$$3) \text{ 流体固定境界 } S_0: (\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{n}_L = 0 \quad (6)$$

4) 流体と容器の相互作用面  $S_i$ :

$$(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n}_L = 0 \quad (7)$$

$$\rho_L \{ \dot{\varphi} - \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(y - y_f) \} \mathbf{n}_L \big|_u + \{ \rho_E A_E (\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}_0) + \partial\Pi/\partial\mathbf{u} \} = 0 \quad (8)$$

(3)式は流体の基礎式である。流体の速度は移動速度を持つ座標系で観測されているので、固定された座標で観測される速度は  $\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}}$  と表される。

(4)式は自由表面において、流体速度と波高速度の流体法線方向成分が一致すること、(5)式は流体表面の法線方向において、流体圧力成分がゼロであることを表す。(6)式は固定境界の法線方向の速度がゼロであることを表す。(7)式はこの境界の法線方向において、流体速度と容器の速度が一致することを表す。(8)式は容器の法線方向に流体圧力が作用して、弾性容器とつりあう力学的条件を表す。汎関数は物理的に適切なこれら基礎式、および境界条件を与える。

ここでは、二次元の容器に納められたポテンシャル流体が正弦波の水平地動を受ける連成系モデルの定式化と解析手法を示す。この系の容器は初期自由表面と底部が平行であり、流体の左右側面は直線の容器を持つ。この系へ ALE 要素を採用した直接法を適用して、(1)式を離散化する。

## 2.2 移動境界

自由表面 $S_f$ に波を発生する流体は、波高に応じて弾性容器との境界(相互作用面)上を移動する。流体運動を流体要素座標の移動と連動して速度を定義すると、流体速度に座標の移動速度が紛れ込む。流体速度を Euler 表示の速度に変換するために、流体運動とは独立に定められる流体節点の移動速度を参照座標<sup>12)</sup>とした表現が(1)式である。

流体の変形(流体座標の移動)と、変位する容器とが常に密着するという条件を満足する変位、波高、および流体場を作成して、(1)式の汎関数を離散化し、第一変分を算定すれば、流体と弾性容器の動的連成問題の離散化された場の方程式が誘導される。

移動境界を持つ二次元のモデルとして、底部と流体領域の初期形状に巨視的に合わせた斜交格子状の領域(Fig.1に破線で示す)に分割する。この流体節点は流体の運動と連動する点ではなく流体運動を測定する参照座標を形成する。この格子の交点を以後「流体節点」と記述する。

流体場の両側面は相互作用面であり、弾性容器は弾性直線材からなるモデルを採用する。相互作用面 $S_i$ は2つ存在するので、 $S_{i\alpha}$ と区別する。右側の相互作用面を添え字 $\alpha=1$ と表し、左側を相互作用面を $\alpha=2$ とする。簡単のために、相互作用面 $S_{i1}$ の変形後の形態を Fig.1 に図示した。この図の検討を演繹して、両者を考慮した定式化を得ることができる。

$x$ は水平方向、 $y$ は逆鉛直方向であり、自由表面の $y$ 座標を $y_f$ と表現している。流体節点の移動は斜交格子の2方向のベクトル( $k_{\mu\nu}$ 点の方向ベクトル $i_\mu, j_\nu$ を Fig.1 に示す)を利用して定める。

流体節点は5種類に分類される。

1. 流体自由表面、および相互作用面上に在る節

点 $k_{f\alpha}$ を(以後「2移動境界の節点」と記述する。

2. 流体自由表面上の節点を点 $k_{f\mu}$ と表す。
3. 相互作用面上 $S_{i\alpha}$ の節点を点 $k_{i\alpha\nu}$ と表す。
4. 初期座標から変形しない流体固定境界面上 $S_0$ の節点がある。底部節点がこれに対応する。
5. 流体の内部にあり、境界と全く接しない内部節点 $k_{\mu\nu}$ がある。

流体領域に、自由表面の波高、および両側の相互作用面における弾性容器の変位を独立変数とする変位が生起する。まず、これら境界上の流体節点の位置を定め、これらに整合するように、内部節点の座標移動を適宜に定め、遷移座標を構成する。各節点の位置を次のように定義する。

- 1) 相互作用面の流体節点の移動

弾性直線材の位置座標は直線材断面の図心における座標(容器の底部からの距離) $s_\alpha$ を用いて定義する。2移動境界上の節点 $k_{f\alpha}$ は弾性体の座標系で測定すると、初期座標 $s_{\alpha f}$ を有し、変形後に弾性体の座標 $s_{\alpha f} + \eta_\alpha$ へ移動すると定義する。すなわち、この点の「波高」 $\eta_\alpha$ は弾性体の図心位置の接線ベクトル方向 $i_{\alpha s}$ への移動量として定義される。弾性体の座標 $s_{\alpha f} + \eta_\alpha$ の変位ベクトル $u_\alpha(s_{\alpha f} + \eta_\alpha)$ を考慮すると、この2移動境界上の点の変形前後の移動は次式のように定義される。

$$\Delta r_{f\alpha} = r(s_{\alpha f} + \eta_\alpha) - r(s_{\alpha f}) + u_\alpha(s_{\alpha f} + \eta_\alpha) \quad (9)$$

2移動境界上の節点 $k_{f\alpha}$ の変形後の位置は、この点の移動位置となる。

(9)式は2移動境界上の節点の変形後も直線材上に存在することを担保する。直線材の図心と相互作用面との間に、材厚の1/2程度の距離がある。この距

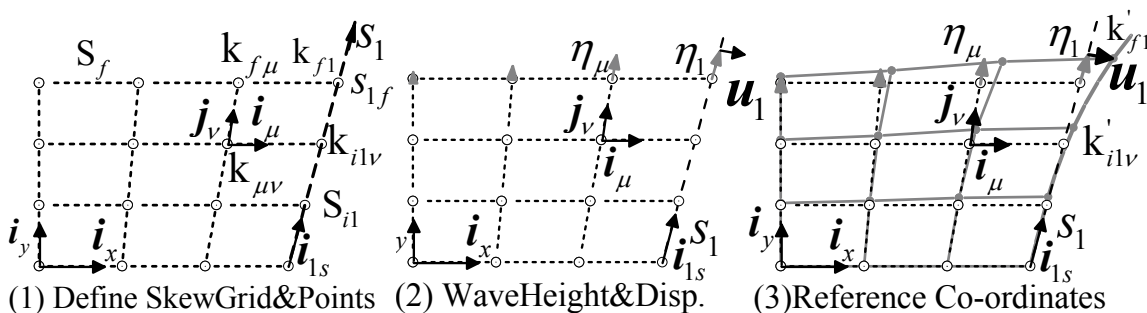


Fig.1 Reference Coordinates of Two Dimensional Tank

離を考慮することは可能である。ここでは、この距離は一般に小さいと仮定して無視する。波高 $\eta_\alpha$  ( $\alpha=1,2$ )をベクトル表示した記号 $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ を利用する。これは全波高ベクトル $\boldsymbol{\eta}_e$ の部分集合である。

同様に、相互作用面上にある他の節点 $\mathbf{k}_{iav}$  (初期 $y$ 座標、および $s_\alpha$ 座標をそれぞれ $y_v$ 、および $s_{av}$ とする)の変形後の位置は、この点のタンク底からの高さ $s_{av}$ と自由表面の高さの内分比を利用して、次式のように定義する。

$$\Delta \mathbf{r}_{av} = (\eta_\alpha y_v / y_f) \mathbf{i}_{as} + \mathbf{u}_\alpha (s_{av} + \eta_\alpha y_v / y_f) \quad (10)$$

この手続きを用いると、変形後の流体節点と弾性体が、流体節点位置で密着する運動学的 (適合) 条件を満たすことが出来る。すなわち、流体節点が相互作用面上の異なる弾性体要素上に移動することも処理できる。(10)式は変形後の流体節点位置における弾性体の変位表現を用いている。流体節点の位置と弾性体の節点位置は同一位置ではないが、弾性体の節点ベクトルを用いて変位が定められるならば、弾性体の節点位置は問題にならない。

## 2) 自由表面の節点の移動

2 移動境界上の節点を除く他の自由表面の流体節点 $\mathbf{k}_{f\mu}$  (初期 $x$ 座標を $x_\mu$ とする)は波高 $\eta_\mu \mathbf{j}_\mu$ 方向に移動すると仮定する(Fig.1.2)。水平方向の移動は、2移動境界上の節点 $\mathbf{k}_{f1}$ の水平方向の移動を左側の相互作用境界の初期座標との間で内分して、次式のように定義する。

$$\Delta \mathbf{r}_{f\mu} = \eta_\mu \mathbf{j}_\mu + \{\mathbf{u}_1 (s_{1f} + \eta_1) \cdot \mathbf{i}_\mu (x_\mu / X_\mu) + \mathbf{u}_2 (s_{2f} + \eta_2) \cdot \mathbf{i}_\mu (1 - x_\mu / X_\mu)\} \mathbf{i}_\mu \quad (11)$$

ここに、 $X_\mu$ は自由表面の幅であり、最後の項は相互作用面 $\alpha=2$ に対応する項である。

## 3) 内部節点の移動

内部節点 $\mathbf{k}_{\mu v}$  (初期座標 $\mathbf{r}_{\mu v} = (x_\mu, y_v)$ )の移動は次式のように定義される。斜交格子の水平方向 $\mathbf{i}_\mu$ の移動は、同じ水位 (レベル) を持つ両端の相互作用面上にある2節点の水平変位を $x$ 座標に応じて内分した量、および対応する斜交格子の上下方向 $\mathbf{j}_v$ の移動は、自由表面の波高 $\eta_\mu$ を容器底との間で内分した量を用いたベクトル和だけ移動する (Fig.1.3)。

$$\Delta \mathbf{r}_{\mu v} = \eta_\mu (y_\mu / y_f) \mathbf{j}_v + \{\mathbf{u}_1 (s_{1v} + \eta_1 / y_\mu / y_f) \cdot \mathbf{i}_\mu (x_\mu / X_\mu) + \mathbf{u}_2 (s_{2v} + \eta_2 / y_\mu / y_f) \cdot \mathbf{i}_\mu (1 - x_\mu / X_\mu)\} \mathbf{i}_\mu \quad (12)$$

ここに、最後の項は追加された項であり、相互作用面 $\alpha=2$ に対応する。

## 2.3 離散化手法

有限要素法を利用して、流体内部の任意位置を定義する。流体の速度ポテンシャルに4節点4辺形要素を利用する。各流体節点 $i$ の形状関数は $\xi_1$ - $\xi_2$ 座標系を用いて、次式のように表される。

$$N_i(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1 \xi_i)(1 + \xi_2 \xi_{2i}) / 4, \quad i = 1, \dots, 4, -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1 \quad (13)$$

4節点の初期 $x$ 、および $y$ 座標ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_e$ 、および $\mathbf{y}_e$ と表現すると、次式が成立する。

$$\mathbf{r}_0 = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_e, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}_e \quad (14)$$

弾性容器はLagrange表示された直線要素を利用し、全ひずみエネルギーを定義する。変位ベクトル $\mathbf{u}(s_\alpha)$ は次式のように表される。

$$\mathbf{u} = \{u, v\} \quad (15)$$

ここに、 $u$ :軸方向変位、 $v$ :法線方向変位。

この要素の変位関数はそれぞれ1次、および3次の代数関数を用いる。直線材の軸ひずみ $\epsilon_s$ 、曲率変化 $\kappa_s$ は次式を利用する。軸歪の非線形項を採用する。

$$\epsilon_s = u_{,s} + v_{,s}^2 / 2, \quad \kappa_s = -v_{,ss} \quad (16)$$

ここに、線材の接線ベクトルと全体座標の $x$ 方向の為す角を $\theta_\alpha$ (反時計回り正)とする。流体節点の移動に伴い、ひとつの流体移動節点と接触する直線材要素が隣接する要素に移動することを考慮する。

各流体要素は、各相互作用面で直線材と2点で接触する。各流体移動節点位置における容器の変位は、この流体節点を材上に持つ直線材要素の端部2節点の一般化座標 (節点変位ベクトル)を用いて定義される。流体要素は直線材と2点で接するので、流体節点の移動を定めるためには、少なくとも2点、最大4点の節点変位ベクトルが必要となる。系全体では相互作用面は左右両側面にあるので、各流体要素の4節点の移動量を一義的に定めるために、最小で4点、最大で8点の節点変位ベクトル (各節点の自由度は3である)が必要となる。これらの節点変位

ベクトル、および2移動境界上の節点の波高 $\eta_\alpha$ をパラメータとして、直線材の変位ベクトルは次式のように定められる。

$$\mathbf{u}_\alpha = (u_{\alpha x}, u_{\alpha y}), \quad (17)$$

$$u_{\alpha x} = \mathbf{C}_x(s_\alpha, \eta_\alpha) \mathbf{d}_e, u_{\alpha y} = \mathbf{C}_y(s_\alpha, \eta_\alpha) \mathbf{d}_e$$

$\mathbf{d}_e$ :直線材節点変位ベクトル、 $\mathbf{C}_x$ 及び $\mathbf{C}_y$ :直線材の変位関数である。流体要素の変形後の節点座標は波高 $\eta_\alpha$ の関数となる。

(17)式において、2移動境界上の流体節点の方向余弦を利用する。この節点が載る直線材要素の回転 $v_s$ を用いて、方向余弦の変化を次式のように厳密に定義する。

$$\cos \Delta\theta_\alpha = 1/\sqrt{1+v_s^2}, \quad \sin \Delta\theta_\alpha = v_s/\sqrt{1+v_s^2}$$

(18)

内部節点の移動は、(12)式、および(17)式を用いて、次式のように表される。

$$\mathbf{u}_{mj} = (u_{xm}, u_{ym}), \quad (19)$$

$$u_{xm} = E_{xm}\eta_m + C_{xm}d_e, \quad u_{ym} = E_{ym}\eta_m + C_{ym}d_e$$

上式において、 $E_{xm}$ および $E_{ym}$ は各点の初期座標を用いて表される。これらの節点の移動量や変位を(14)式の座標系へ代入すると、変形後の流体内の任意点の位置ベクトル $\mathbf{r} = \{x, y\}$ は、波高ベクトル $\boldsymbol{\eta}_e$ 、および線材の節点変位ベクトル $\mathbf{d}_e$ を用いて、次式のように表される。

$$x = N\{x_e + \mathbf{E}_x\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{C}_x\mathbf{d}_e\}, y = N\{y_e + \mathbf{E}_y\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{C}_y\mathbf{d}_e\} \quad (20)$$

これらを次式のように表現する。

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e \quad (21)$$

$$\text{ここに、} \mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} Nx_e \\ Ny_e \end{Bmatrix}, \mathbf{B}_\eta = \begin{bmatrix} N\mathbf{E}_x(\mathbf{d}_e) \\ N\mathbf{E}_y(\mathbf{d}_e) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} N\mathbf{C}_x(\boldsymbol{\eta}_\alpha) \\ N\mathbf{C}_y(\boldsymbol{\eta}_\alpha) \end{bmatrix}$$

$x$ - $y$ 座標から流体要素 $\xi_1$ - $\xi_2$ 座標系への積分変換を行う。次式のヤコビアン行列 $\mathbf{J}$ を定義する。

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi_1 \\ \partial/\partial\xi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi_1} & y_{,\xi_1} \\ x_{,\xi_2} & y_{,\xi_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e) \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

これを用いて、演算子 $\nabla$ は次式のように表される。

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e) \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi_1 \\ \partial/\partial\xi_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

形状関数を用いて、速度ポテンシャル $\varphi$ を表す。

$$\varphi = N\boldsymbol{\varphi}_e \quad (24)$$

これを(23)式に代入して、次式を得る。

$$\nabla\varphi = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\xi_2} & -y_{,\xi_1} \\ -x_{,\xi_2} & x_{,\xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\varphi/\partial\xi_1 \\ \partial\varphi/\partial\xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e \quad (25)$$

$$\text{ここに、} \mathbf{A}_e = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\xi_2} & -y_{,\xi_1} \\ -x_{,\xi_2} & x_{,\xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{,\xi_1} \\ N_{,\xi_2} \end{Bmatrix} \quad \circ$$

ヤコビアン行列式 $|\mathbf{J}| = |\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e)|$ は、波高ベクトル $\boldsymbol{\eta}_e$ 、および弾性体の節点変位ベクトル $\mathbf{d}_e$ の関数である。また、流体節点の移動を反映した流体要素座標の速度が移動速度となる。故に、ALE要素における参照座標の移動速度 $\hat{\mathbf{v}}$ は、(21)式を用いて次式のように表される。

$$\hat{\mathbf{v}} = \partial\mathbf{r} / \partial t = \dot{\mathbf{r}} \quad (26)$$

これら未知量の表現式を(1)式へ代入し、積分を流体要素座標に変換すると、離散化された汎関数の表現を得る。

$$\begin{aligned} I_m^{ALE}(\boldsymbol{\varphi}_e, \boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e) &= \int_0^t \left[ \sum_{m_i=1}^t \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L (N\dot{\boldsymbol{\varphi}}_e |\mathbf{J}| - \boldsymbol{\varphi}_e' \mathbf{A}_e' \dot{\mathbf{r}}) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2|\mathbf{J}|} \boldsymbol{\varphi}_e' N' N \boldsymbol{\varphi}_e + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} |\mathbf{J}| + \varrho(y - y_f) |\mathbf{J}|) \left. \right\} d\xi_1 d\xi_2 \\ &- \sum_m \sum_\alpha \int_0^t \left\{ \rho_E A_E \left( \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^2 + \dot{\mathbf{v}}^2) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \right) - \Pi(\mathbf{u}) \right\} ds dt \end{aligned} \quad (27)$$

ここに、 $\Pi(\mathbf{u}) = \frac{EA}{2}(u_{,s} + \frac{1}{2}v_{,s}^2)^2 + \frac{EI}{2}v_{,ss}^2$ は弾性体のひずみエネルギー、基盤の加速度 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}_0$ を用いた。

(27)式において、汎関数は流体速度ポテンシャル $\boldsymbol{\varphi}_e$ 、波高ベクトル $\boldsymbol{\eta}_e$ 、および弾性体の節点変位ベクトル $\mathbf{d}_e$ を変関数とする。これを考慮して、汎関数の変関数 $\boldsymbol{\varphi}_e, \boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e$ に関する第一変分を評価すれば、離散化された場の方程式を得ることが出来る。

また、行列式 $|\mathbf{J}|$ はスカラー量である。(17)式の $\mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e$ は列ベクトルであり、変関数 $\boldsymbol{\varphi}_e, \boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e$ に関する増分表現を次のように行列表示することができる。

$$\begin{aligned} \Delta|\mathbf{J}| &= \mathbf{D}_\eta \Delta\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{D}_\alpha \Delta\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{D}_e \Delta\mathbf{d}_e \\ \Delta(\mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e) &= \mathbf{A}_e \Delta\boldsymbol{\varphi}_e + \mathbf{S}_\eta \Delta\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{S}_\alpha \Delta\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{S}_d \Delta\mathbf{d}_e \\ \Delta(\mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e) &= \mathbf{B}_\eta \Delta\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{T}_\eta \Delta\mathbf{d}_e, \quad \Delta(\mathbf{B}_d \mathbf{d}_e) = \mathbf{B}_d \Delta\mathbf{d}_e + \mathbf{B}_\alpha \Delta\boldsymbol{\eta}_\alpha \\ \mathbf{B}_r &= \mathbf{B}_d + \mathbf{T}_\eta \end{aligned} \quad (28)$$

これらを利用すれば、(27)式の1項から4項に対する変分式を表現することができる。簡単のために、要素の総和記号は省略する。弾性容器の非線形項は4項に含まれている。

$$\begin{aligned}
& \rho_L \delta \iint_A (\dot{\varphi} - \nabla \varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}) dx dy = \rho_L \delta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e |J| - \boldsymbol{\varphi}'_e A'_e \dot{\mathbf{r}}) d\xi_1 d\xi_2 \\
& = -\delta \boldsymbol{\varphi}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(N^t \mathbf{D}_\eta + A'_e \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e + (N^t \mathbf{D}_\alpha + A'_e \mathbf{B}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha \\
& + (N^t \mathbf{D}_e + A'_e \mathbf{B}_d) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 + \delta \boldsymbol{\eta}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_\eta^t N + \mathbf{B}_\eta^t A'_e) \boldsymbol{\varphi}_e \\
& + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_\eta^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_\alpha - \mathbf{S}_\eta^t \mathbf{B}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha \\
& + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_\eta^t \mathbf{B}_d) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \boldsymbol{\eta}'_\alpha \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_\alpha^t N + \mathbf{B}_\alpha^t A'_e) \boldsymbol{\varphi}_e + (\mathbf{B}_\alpha^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_\alpha^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\
& + (\mathbf{B}_\alpha^t \mathbf{S}_\alpha - \mathbf{S}_\alpha^t \mathbf{B}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha + (\mathbf{B}_\alpha^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_\alpha^t \mathbf{B}_d) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \mathbf{d}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_e^t N + \mathbf{B}_e^t A'_e) \boldsymbol{\varphi}_e + (\mathbf{B}_e^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_e^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\
& + (\mathbf{B}_e^t \mathbf{S}_\alpha - \mathbf{S}_e^t \mathbf{B}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha + (\mathbf{B}_e^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_e^t \mathbf{B}_d) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \quad (29.1)$$

$$\begin{aligned}
& \rho_L \delta \frac{1}{2} \iint_A \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \varphi dx dy = \delta \boldsymbol{\varphi}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A'_e A'_e / |J|) d\xi_1 d\xi_2 \boldsymbol{\varphi}_e \\
& + \delta \boldsymbol{\eta}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_\eta^t A'_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}'_\eta (\boldsymbol{\varphi}'_e A'_e A'_e \boldsymbol{\varphi}_e) / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \boldsymbol{\eta}'_\alpha \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_\alpha^t A'_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}'_\alpha (\boldsymbol{\varphi}'_e A'_e A'_e \boldsymbol{\varphi}_e) / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \mathbf{d}'_e \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_d^t A'_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}'_e (\boldsymbol{\varphi}'_e A'_e A'_e \boldsymbol{\varphi}_e) / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \quad (29.2)$$

$$\begin{aligned}
& \rho_L \delta \iint_A \mathbf{a}' \cdot \mathbf{r} dx dy = \delta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r} |J| + g(y - y_f) |J|) d\xi_1 d\xi_2 \\
& = \delta \boldsymbol{\eta}'_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_\eta^t |J| + \mathbf{D}_\eta^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \cdot \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \boldsymbol{\eta}'_\alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_\alpha^t |J| + \mathbf{D}_\alpha^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \cdot \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2 \\
& + \delta \mathbf{d}'_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_d^t |J| + \mathbf{D}_e^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \cdot \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \quad (29.3)$$

第4項は良く知られた離散化された両側の弾性容器の運動方程式となる。

$$\begin{aligned}
& -\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{s_0}^{s_1} \{ \rho_E A_E (\dot{\mathbf{u}}' \cdot \dot{\mathbf{u}} / 2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) - \Pi(\mathbf{u}) \} ds dt \\
& = \delta \mathbf{d}'_e \{ \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{d}_e + \mathbf{f}_e(\mathbf{a}, \mathbf{d}_e) \}
\end{aligned} \quad (29.4)$$

ここに、 $\mathbf{M}_d$ :容器質量行列、 $\mathbf{K}_d$ :容器剛性行列、 $\mathbf{f}_e$ :容器の外力項である。剛性行列、および外力項は一般化座標を含む。

これらは、有限要素法を用いて (1)式の変形前の座標系に基づき、変形後の波高や容器の弾性変位を計測し、変形後の流体領域における汎関数を評価し、これを離散化した諸式に対応する。すなわち、(29)式は利用した流体要素、および線材要素の下で、(3)式-(9)式を近似的に離散化した場の方程式を与える。得られたこの系の場の方程式は一般に次式のように表現される。

$$\begin{bmatrix} 0 & R_1 & R_2 \\ -R_1' & R_\eta & R_{12} \\ -R_2' & -R_{12}' & R_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\varphi & K_1 & K_2 \\ K_1' & K_\eta & K_{12} \\ K_2' & K_{12}' & K_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_\eta \\ \mathbf{f}_d \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

ここに、 $R_\eta = -R_\eta$ ,  $R_d = -R_d$ 、ベクトル  $\mathbf{f}_\varphi$ , 及び  $\mathbf{f}_\eta$  は外

力項であり、非線形項を含む。行列  $\mathbf{M}_d$  をコレスキー分解し、次式の置換を行う。

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{W}' \mathbf{W}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{W} \mathbf{d}_e \quad (31)$$

ここに、行列  $\mathbf{W}$  は上三角行列である。(31)式を用いて、(29.4)式の行列  $\mathbf{M}_d$  を変換し、一般に次式を得る。

$$\begin{bmatrix} 0 & R_1 & R_2 & 0 \\ -R_1' & R_\eta & R_{12} & 0 \\ -R_2' & -R_{12}' & R_d & \mathbf{W}' \\ 0 & 0 & -\mathbf{W} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\varphi & K_1 & K_2 & 0 \\ K_1' & K_\eta & K_{12} & 0 \\ K_2' & K_{12}' & K_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_\eta \\ \mathbf{f}_d \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (32)$$

ここに、線形項は行列を用い、非線形項は外力項に含めて表現した。(32)式を次式のように略記する。

$$\mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (33)$$

(33)式において、行列  $\mathbf{R}$  は実の交代行列、行列  $\mathbf{K}$  は実対称行列である。これらの行列は一般化座標ベクトル  $\boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e$  を含む行列である。この式の非線形項を無視し、周期解  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \text{EXP}(i\omega t)$  を仮定すれば、次式の固有値問題を得る。

$$[i\omega \mathbf{R} + \mathbf{K}] \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (34)$$

この系は実数の固有振動値  $\omega$  を持つ。しかしながら、行列  $i\mathbf{R}$  は純虚数の行列であり、この式に基づき実数の演算のみを利用して、固有振動数を数値解析に用いることは困難であり、工夫が必要となる。

### 3. つりあい式の解法

離散化された場の方程式(30)を解析する現実的な手法を示す。

#### 3.1 固有振動数の解析方法

初期形状での系の固有振動数を算定する方法として、現時点では次に示すものが優れている。初期形状において、すべての一般化座標がゼロのとき、非線形項はゼロとなり、(30)式非ゼロの成分を示すと次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} 0 & R_1 & R_2 \\ -R_1' & 0 & 0 \\ -R_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & K_\eta & K_{12} \\ 0 & K_{12}' & K_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_d \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (35)$$

上式において  $\det \mathbf{K}_\varphi = 0$  であり、次式が成立する。

$$\mathbf{K}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \{1, \dots, 1\} \quad (36)$$

ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}_0$  は流体場の一様な移動(剛体変形)<sup>6)</sup>を意味する。このベクトルと未知ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}_e$  は直交する次式の付帯条件式へ組み込む

$$\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varphi}'_e \cdot \boldsymbol{\varphi}_e = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}: \text{Lagrange 乗数} \quad (36)$$

(36)式を(35)式へ導入して、次式を得る

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & R_1 & R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1^t & 0 & 0 & 0 \\ -R_2^t & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_e \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{d}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_\phi & \phi_0 & 0 & 0 \\ \phi_0^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_a & K_{12} \\ 0 & 0 & K_{12}^t & K_d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_e \\ \lambda \\ \eta_e \\ d_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_d \ddot{d}_e \end{Bmatrix} = 0 \quad (37)$$

(37)式から、ベクトル  $\{\phi_e, \lambda\}$  を求める。

$$\begin{Bmatrix} \phi_e \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_\phi & \phi_0 \\ \phi_0^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_e \\ \dot{d}_e \end{Bmatrix} \quad (38)$$

この両辺を時刻で微分し、(37)式へ代入して、次式を得る。なお、(37)式と同等の表現を得る方法は幾つか存在する。

$$[\bar{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_e \\ \ddot{d}_e \end{Bmatrix} + [\bar{K}] \begin{Bmatrix} \eta_e \\ d_e \end{Bmatrix} = 0 \quad (39)$$

ここに、 $[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K_\eta & K_{12} \\ K_{12}^t & K_d \end{bmatrix}$ 、

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_\phi & \phi_0 \\ \phi_0^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(39)式から、次式の実対称行列の一般固有値問題へ誘導することができる。

$$\bar{K}\phi = \omega^2 \bar{M}\phi \quad (40)$$

この固有値問題を解き、得られた固有振動数  $\omega^2$  に小さい方から番号を付け、対応する固有ベクトル  $\phi_k$  を次式のように正規化する。

$$\bar{K}\phi_k = \omega_k^2 \bar{M}\phi_k, \quad \phi_k^t \phi_k = 1 \quad (41)$$

### 3.2 減衰項

弾性容器の減衰はレーリー減衰を仮定して、振動数  $\omega_c$  に対して最小臨界減衰比  $h_c$  となる減衰項を(32)式の第3行に次式の項を追加する。

$$R_d = h_c (M\omega_c + K_d / \omega_c) \quad (42)$$

流体の復元力に比例する減衰を仮定し、振動数  $\omega_\eta$  に対する臨界減衰比  $h_\eta$  を用いて、(32)式の第2行に次式の項を追加する。

$$R_\eta = 2h_\eta / \omega_\eta K_\eta \quad (43)$$

減衰に関しては、応答解析の項で追記する。

### 3.3 時間積分

時間積分に用いる解法の実験の選択は重要な判断事項のひとつである。この問題に適用しやすく、安定性があるとして流体の解析に広く利用されている Crank・Nicolson(クランク・ニコルソン)法<sup>6,14)</sup>を採用する。 $n$  ステップの諸量が既知として、この方法を(33)式へ

適用すると、 $(n+1)$ ステップのつりあい式は次式のよう表現される。

$$(R_{n+1} + R_n) \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} + (K_{n+1} q_{n+1} + K_n q_n + f_{n+1} + f_n) = 0 \quad (44)$$

この式は、ステップ中央における諸量(平均値)を用いてステップ間の速度を定めることを表す。流体と弾性容器の大変形動的連成問題であり、非線形性が高いと予測される。各ステップにおいて、ニュートン・ラプソン法を用いた収束演算を行う。 $(n+1)$ ステップの  $\gamma$  回目の近似値を  $q_{n+1}^\gamma$ 、次回の増分を  $\Delta q_{n+1}$  とすると、増分式は形式的に次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(R_{n+1} + R_n)}{\Delta t} + \frac{\partial R_{n+1}}{\partial q^t} \frac{q_{n+1}^\gamma - q_n}{\Delta t} + K_{n+1} + \frac{\partial K_{n+1}}{\partial q^t} q_{n+1}^\gamma + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q^t} \right] \Delta q_{n+1} \\ & = - \left\{ (R_{n+1} + R_n) \frac{q_{n+1}^\gamma - q_n}{\Delta t} + (K_{n+1} q_{n+1}^\gamma + K_n q_n + f_{n+1} + f_n) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

(45)式を用いて、応答を得る。

$$q_{n+1}^{v+1} = q_{n+1}^v + \Delta q_{n+1}, \quad \dot{q}_{n+1} = (q_{n+1}^{v+1} - q_n) / \Delta t \quad (46)$$

収束演算を数回行い  $(n+1)$ ステップの解とする。

## 4 数値解析

### 4.1.1 数値解析モデル

二次元の流体領域は幅 0.9m、高さ 0.6m の矩形を有し、容器の底、および側壁の容器に納められる。左右の側壁は同一板厚の鋼板(高さ 0.99m、ヤング率  $E = 205.8 \text{ GPa}$ ) からなる。鋼、および流体の質量密度は  $\rho_e = 7850 \text{ kg/m}^3$ 、および  $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$  とする。有限要素法のモデルは高さ方向に 8 要素、水平方向に 16 要素、容器は 2 次元直線材 12 要素にモデル化(Fig.2)される。直線材は底部で固定されている。このモデルに、正弦波の外力、地動加速度(振幅  $a_x$ ) を作用させる。応答解析の時間間隔  $\Delta t$  は 0.005sec を基本とし、異なる間隔を用いるときはその都度明示する。また、系に減衰項を導入し、数値解析の安定性を確保する。臨界減衰比  $h_c = h_\eta = 0.0075$  を採用する。レーリー減衰が最小になる振動数は  $\omega_c = 6.0 \text{ rad/sec}$ 、 $\omega_\eta = 5.76 \text{ rad/sec}$  とした。

### 4.1.2 応答データの整理

応答解析の時刻歴の応答ベクトル  $q_n$  を用いて、挙動を表現する。この応答を有限フーリエ変換して得られる応答のフーリエスペクトル、すなわち振動数

成分も利用する。さらに、この応答を固有振動数に対応する各固有振動モードを用いて、次式のように振動モードに分解して、図表化する。

$$q_n = \zeta_1 \phi_1 + \dots + \zeta_m \phi_m \quad (47)$$

上式の一般化座標  $\zeta_k (k=1, \dots, m)$  は応答における、固有振動モード  $\phi_k$  の成分の大きさを表す。

解析モデルは左右対称の形状を持つので、固有振動モードを容器の中央 2 等分線を対称軸とする逆対称モード、あるいは対称モードに区別してそれぞれ添え字 a、あるいは s を付して表す。すなわち、逆対称振動モード、および対称振動モードの最小の固有振動数をそれぞれ  $\omega_{a1}$ 、および  $\omega_{s1}$  と表す。これらに対応する固有振動モードをそれぞれ  $\phi_{a1}$  あるいは  $\phi_{s1}$  と表し、A1 モード、あるいは S1 モードと記述する。固有振動数の大きさに応じて  $\omega_{s1} \leq \omega_{s2} \leq \dots$ 、および  $\omega_{a1} \leq \omega_{a2} \leq \dots$  を満たすように番号を付す。

#### 4.2 固有振動数

容器の板厚を 3 種類 (5 mm、10 mm、30 mm) 採用して得られた固有振動数、および剛な容器の固有振動数を Table.1 に示す。水が入らない容器のみの最小固有振動数 (左右の容器がそれぞれ同一の値を持つ) を同表に示す。逆対称振動モード、および対称振動モードのそれぞれ小さい方から 9 番、および 10 番までの固有振動数に記号を付した。板厚 30mm のモデルと、剛の容器の固有振動数の相違は最大で

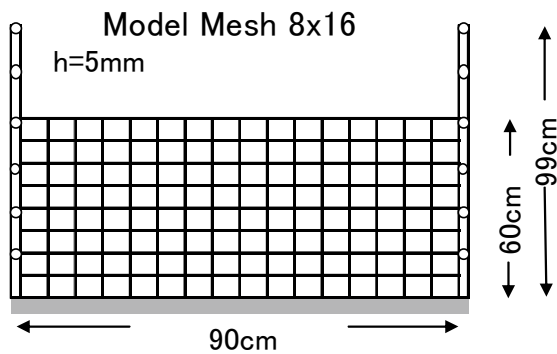


Fig.2 Model Mesh for Analysis

0.15%程度であり、ほぼ同一である。

板厚 30mm、および 10 mm のモデルにおいて、容器変位が主要となる振動モードは固有振動数  $\omega_{a9}$ 、および  $\omega_{s10}$  に対応する。流体の質量効果を受けて、それらは容器のみの値より約 3%、および 6% 小さい。一方、板厚 5 mm の時、流体と容器の連成が表に示した固有振動数全体へ広く影響している。表 1 の板厚 5mm のモデルの正規化された逆対称、および対称振動モードの代表的な位置における波高、および変位の値を表 2 に示す。表中の記号 A1、あるいは S1 は、それぞれは固有振動数  $\omega_{a1}$ 、および  $\omega_{s1}$  の添字に対応する。自由表面の右端、中央、および左端に対応する波高が R.End、C.Sur、および L.End であり、自由表面位置での容器の右側、および左側の水平変位は R.Disp.、および L.Disp. と表示した。

記号	5mm	10mm	30mm	Rigid
$\omega_{a1}$	5.40	5.74	5.78	5.78
$\omega_{s1}$	7.05	7.18	7.19	7.20
$\omega_{s2}$	7.96	8.32	8.35	8.36
$\omega_{a2}$	9.92	10.30	10.34	10.35
$\omega_{s3}$	11.66	12.09	12.13	12.14
$\omega_{a3}$	13.28	13.79	13.83	13.85
$\omega_{s4}$	14.86	15.48	15.53	15.55
$\omega_{a4}$	16.39	17.20	17.25	17.28
$\omega_{s5}$	17.97	18.99	19.05	19.07
$\omega_{a5}$	19.42	20.85	20.93	20.95
$\omega_{s6}$	21.07	22.79	22.88	22.92
$\omega_{a6}$	22.55	24.78	24.90	24.93
$\omega_{s7}$	24.39	26.75	26.89	26.93
$\omega_{a7}$	26.08	28.57	28.75	28.79
$\omega_{s8}$	28.04	30.10	30.31	30.35
$\omega_{a8}$	29.69	31.14	31.35	31.39
$\omega_{s9}$	31.14	31.63	31.72	31.77
$\omega_{a9}$	33.19	49.70	154.3	-
$\omega_{s10}$	33.52	50.92	155.8	-
only Container				
$\omega_{oc1}$	26.48	52.96	158.9	-

Table 2 Natural Frequencies and Key Values of Vibration Mode(h=5mm)

notation	A1	S1	S2	A2	S3	A3	S7	A7	S8	A8	S9	A9	S10
Frequency	5.40	7.05	7.96	9.92	11.66	13.28	24.39	26.08	28.04	29.69	31.14	33.19	33.52
R.End	0.505	0.427	-0.462	-0.469	0.458	-0.443	0.038	-0.092	0.112	0.166	-0.114	-0.479	0.473
C.Sur.	0.000	0.174	0.302	0.000	0.287	0.000	0.341	0.000	0.363	0.000	0.391	0.000	0.042
L.End	-0.505	0.427	-0.462	0.469	0.458	0.443	0.038	0.092	0.112	-0.166	-0.114	0.473	0.479
R.Disp.	0.032	0.023	-0.027	-0.027	0.026	-0.027	0.026	0.020	-0.016	-0.012	0.008	0.019	-0.021
L.Disp.	0.032	-0.023	0.027	-0.027	-0.026	-0.027	-0.026	0.020	0.016	-0.012	-0.008	0.019	0.022



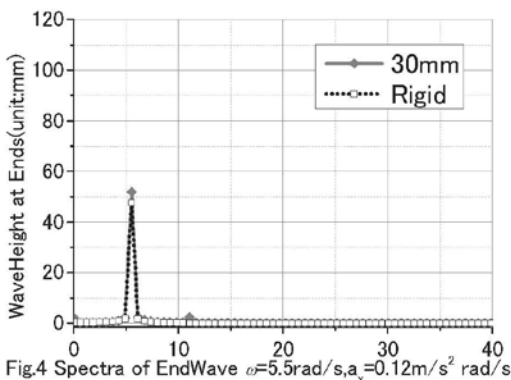
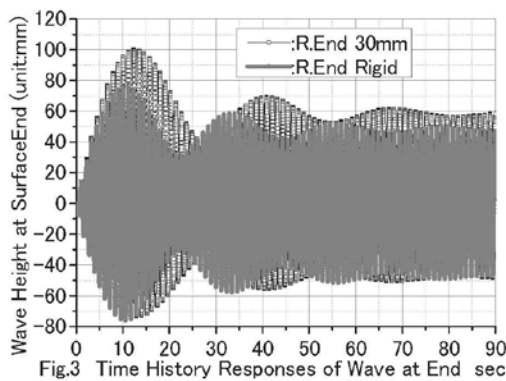
### 4.3 容器の基本的な応答

#### 4.3.1 剛性の大きな容器の応答

水の振動が主となる外力振動数領域における、板厚 30mm とした容器、および剛な容器が水平外力を受ける時の応答を解析、検討する。

外力振動数（基本振動数） $5.5\text{rad/sec}$ 、正弦波外力加速度振幅  $a_x=0.12\text{m/s}^2$  とし、板厚 30mm、および剛な容器（Fig.2）の応答を時間間隔  $\Delta t=0.01\text{sec}$  としして解析した。自由表面端部波高の 90sec までの時刻歴応答を Fig.3 に示す。外力振動数は最小固有振動数近傍なので、初期応答は時刻に比例して増大する。その過渡応答が収束する過程の応答が観察できる。

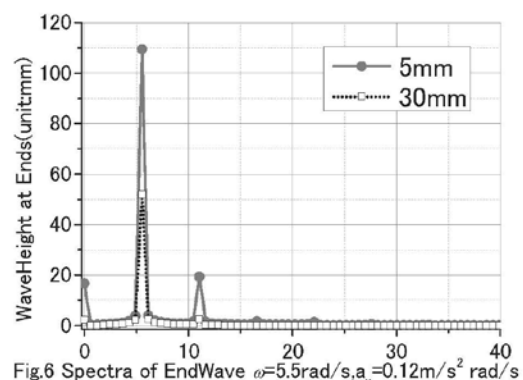
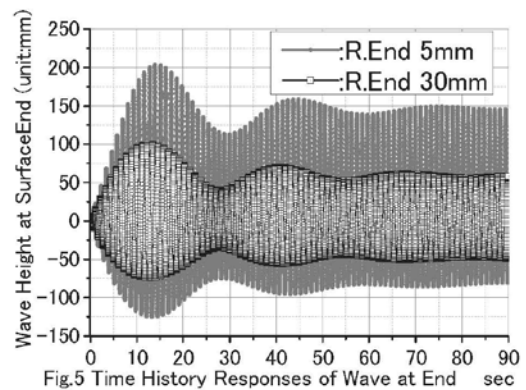
時刻歴  $t=80\text{-}90\text{sec}$  の時間間隔  $\Delta t=0.01\text{sec}$  の応答データ 1024 個を用いて得られた有限フーリエ係数(以後、フーリエ・スペクトルと表現する)を Fig.4 に示す。基本振動数近傍の振動数  $5.59\text{rad/sec}$  における弾性容器と剛な容器の主要フーリエ・スペクトルは  $52\text{mm}$ 、および  $48\text{mm}$  と算定された。剛な容器の応答スペクトルは現実的に基本振動数のみである。板厚 30mm のそれもほぼ同様であるが、振動数  $11.04\text{rad/sec}$  に  $2.8\text{mm}$  の 2 倍高調波振動のスペクトルが観察できる。両者容器の差異は定常応答では小さいようである。



次に、板厚 5mm の容器に同一の外力を作用させて得られた自由表面端部の波高の時刻歴応答と板厚 30mm のそれを共に Fig.5 に示す。両者の同一時刻の応答から得られたフーリエ・スペクトルを Fig.6 に示す。板厚 5mm の自由表面端部の波高応答に、基本振動数成分  $109.5\text{mm}$ 、2 倍高調波振動成分  $19.4\text{mm}$ 、3 倍高調波振動成分  $1.7\text{mm}$ 、定数項  $16.7\text{mm}$  等のスペクトルが観察される。

板厚 5mm の容器における逆対称振動モードと対称振動モードの応答に相違が見られる。応答をこれらの振動モードに分解し、逆対称振動モード A3,A4,A6、および対称振動モード S3,S6,S8 に対応するフーリエ・スペクトルをそれぞれ Fig.7、および Fig.8 に示す。

逆対称振動モードの応答スペクトルは基本振動数成分の他、3 倍高調波振動成分、5 倍、7 倍の奇数次の高調波振動成分を持つ。一方、対称振動モードは 2 倍、4 倍、6 倍の偶数次の高調波振動成分、および定数項成分を有する。対称振動モードの応答の定数項は振動にドリフトが生起すること、すなわち振動の平均値が水平面ではないことを表す。これらの応答スペクトルは後述する分数調波振動応答が分岐しない限り変化しないようである。



流体と弾性容器の連成を考慮して得られる容器の変位と応力を検討する。

板厚 5mm と板厚 30mm の容器の自由表面位置(レベル)における水平変位応答、および容器底部の固

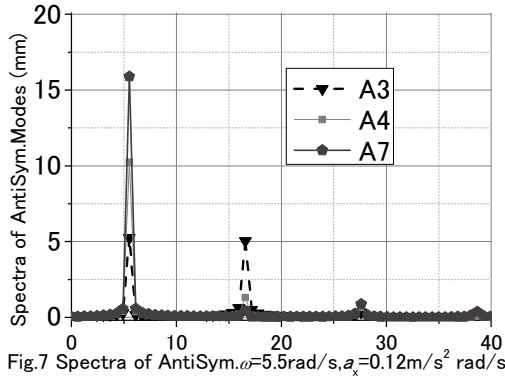


Fig.7 Spectra of AntiSym.  $\omega=5.5\text{rad/s}$ ,  $a_x=0.12\text{m/s}^2$  rad/s

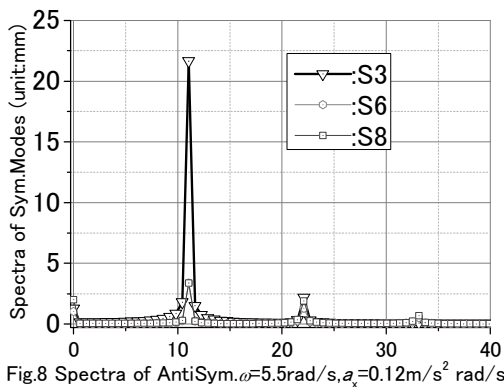


Fig.8 Spectra of AntiSym.  $\omega=5.5\text{rad/s}$ ,  $a_x=0.12\text{m/s}^2$  rad/s

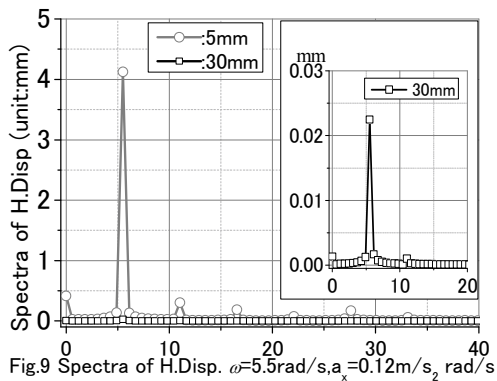


Fig.9 Spectra of H.Disp.  $\omega=5.5\text{rad/s}$ ,  $a_x=0.12\text{m/s}^2$  rad/s

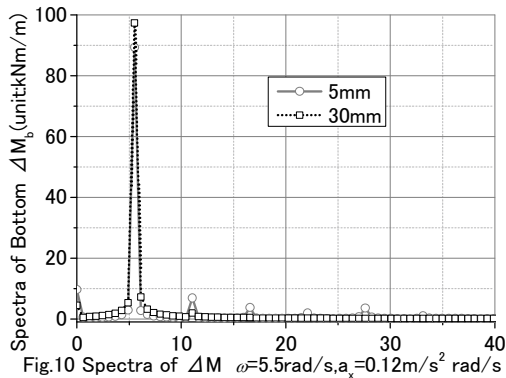


Fig.10 Spectra of  $\Delta M$   $\omega=5.5\text{rad/s}$ ,  $a_x=0.12\text{m/s}^2$  rad/s

定端部における差分曲げモーメント応答のフーリエ・スペクトルをそれぞれ Fig.9、および Fig.10 に示す。板厚 30mm の水平変位スペクトルを図中に拡大して表示した。板厚 5mm の容器の水平変位スペクトルは基本振動数近傍で 4.1mm、2 倍高調波振動近傍で 0.3mm を示す。板厚 30mm の容器のこの振動数の変位スペクトルは 0.022mm を示す。

差分曲げモーメント応答スペクトルは基本振動数成分に対応する 97.3kNm/m が卓越するものの、若干の 2 倍高調波振動数成分が観察される。5mm の容器のそれは基本振動数成分 89.3kNm/m の他、2 倍、3 倍、4 倍、5 倍、および 6 倍の高調波振動成分が観察される。この基本振動数のスペクトルは板厚 30mm の容器それより 10%程度小さい値である。

#### 4.4 容器の応答

流体の入った容器に強烈な非線形振動応答が分岐する現象が報告されている<sup>5,7)</sup>。これらに対応する応答の発生を検討する。

##### 4.4.1 振幅が小さな応答

波高や容器の変位が小さいとき、周期外力の下で系の応答は主に線形振動応答となる。外力振動数  $\omega = 65\text{rad/s}$ 、水平振動加速度  $a_x = 5.5\text{m/s}^2$  とした時刻歴応答を振動モードに分解する。得られた逆対称振動モードの時刻  $t=0-200\text{sec}$ 、および  $t=198-200\text{sec}$  における応答を Fig.11.1、および Fig.11.2 に示す。記号  $A_k$  は 4.1.2 節で示した  $k$  番目の逆対称振動モードに対応する一般化座標  $\xi_{ak}$  の応答であることを表す。過渡応答が減衰して、基本振動成分の周期応答に収束する減衰系の線形振動の応答が観察される。これら  $A1, A2, A3$  モードに分解された応答のフーリエ・スペクトル (時刻  $t=190-200\text{sec}$  近傍の時刻間隔 0.01sec の応答データ 1024 個を用いた) を Fig.12 に示す。応答は基本振動数のスペクトルのみの周期応答を示す。A1 モードのこのスペクトルは 1.44mm である。対称振動モードのスペクトルを Fig.13 に示す。これらは定数項のみであり振動応答の成分を含まない。

自由表面レベルにおける容器の水平方向変位のフーリエ・スペクトルを Fig.14 に示す。ここに、記号 R.Disp.、L.Disp.はそれぞれ右側、左側の容器に対応

することを意味する。これらの応答は主に基本振動数 (1.8mm) と定数項 (0.6mm) のスペクトルを有し、2 倍高調波振動のそれもわずかに観察できる。

容器の左右底部における差分曲げモーメント (kNm/m) の時刻 200sec 近傍の応答  $t=198-200\text{sec}$  の応答曲線を Fig.15 に示す。ここに、記号 R.Mbt, L.Mbt はそれぞれ右側、および左側の容器に対応することを表す。時刻 200sec 近傍の応答における差分曲げモーメントの極値は 46kNm/m 程度である。

この差分モーメント応答のフーリエ・スペクトルを Fig.16 に示す。応答のスペクトルは基本振動成分が主となり、2 倍高調波振動成分が生起している。

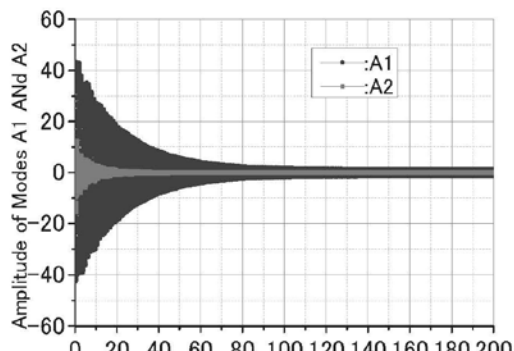


Fig.11.1 Time History Responses  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$

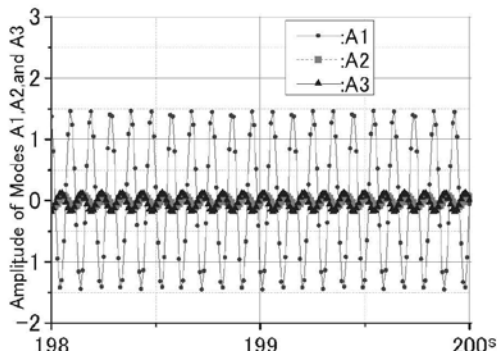


Fig.11.2 Time History Responses  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$

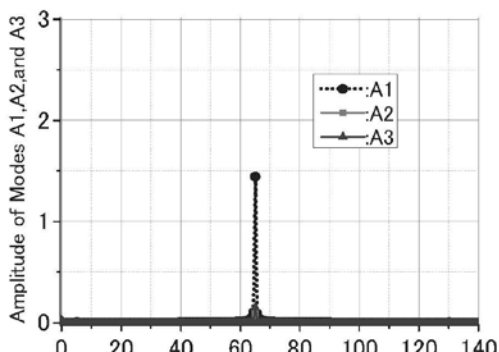


Fig.12 Spectra of Anti-Sym.  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$

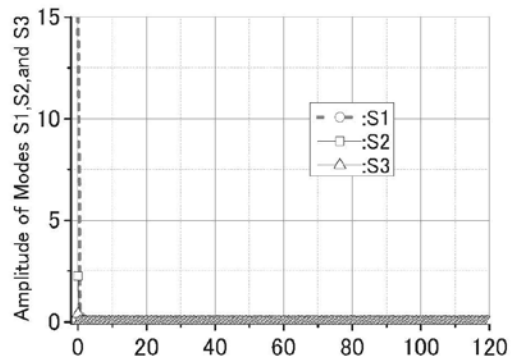


Fig.13 Spectra of Sym.Modes( $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$ )

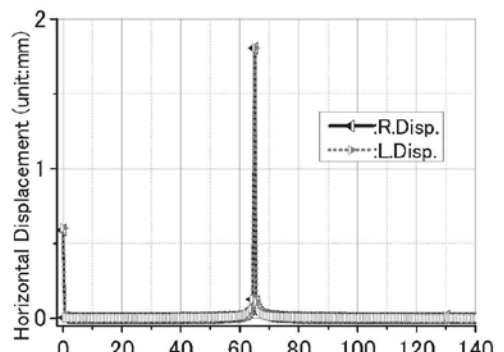


Fig.14 Spectra of H.Disp  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$

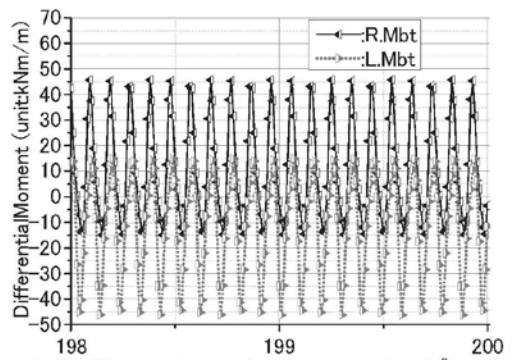


Fig.15  $\Delta$ Moment Curves( $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$ )

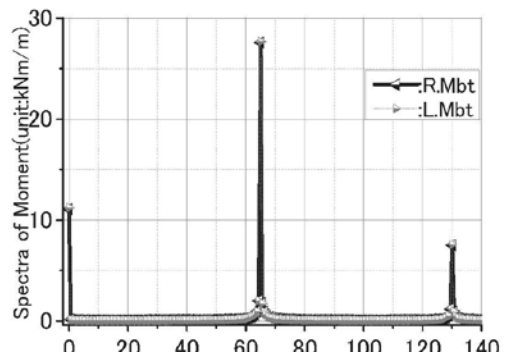


Fig.16 Spectra of Moment  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=5.5\text{m/s}^2$

#### 4.4.2 分数調波振動応答

外力振動数  $\omega = 65 \text{ rad/s}$ 、水平振動加速度  $a_x = 8 \text{ m/s}^2$  としたモデルの応答を検討する。逆対称振動モード A1、および A2 の時刻歴応答  $t=0-200 \text{ sec}$ 、および 198-200sec をそれぞれ Fig.17.1、および Fig.17.2 に示す。逆対称振動モード A1 の応答は時刻と共に収束する傾向を示す。一方、振動モード A2 の応答は 10sec 近傍まで収束する方法で推移するものの、その後、時間と共に増加する。

逆対称振動モード A9、および対称振動モード S10 の時刻歴応答を Fig.18 に示す。これらのモードの応答は上記 A2 と類似するものの、10sec 以降における増加率が大きい。

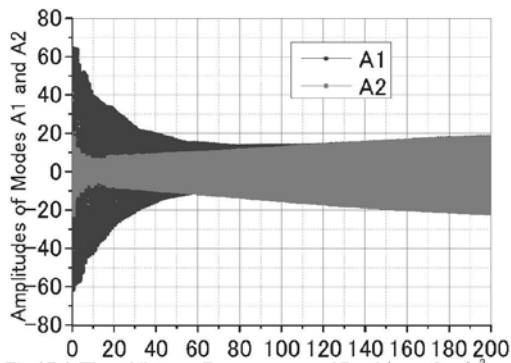


Fig.17.1 Time History Responses  $\omega=65 \text{ rad/s}$ ,  $a_x=8 \text{ m/s}^2$  s

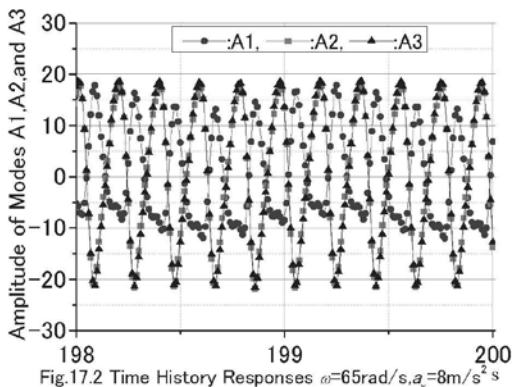


Fig.17.2 Time History Responses  $\omega=65 \text{ rad/s}$ ,  $a_x=8 \text{ m/s}^2$  s

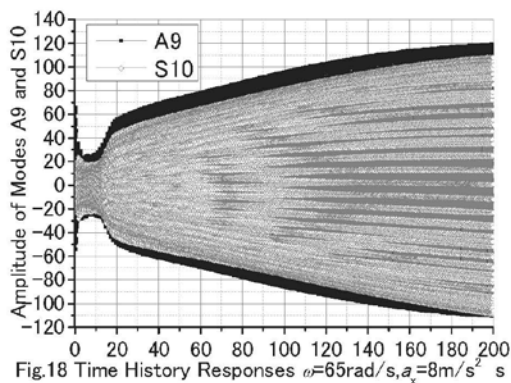


Fig.18 Time History Responses  $\omega=65 \text{ rad/s}$ ,  $a_x=8 \text{ m/s}^2$  s

逆対称振動モード A1, A2, A3 に対応する応答のフーリエ・スペクトルを Fig.19 に示す。A1 モードの基本振動数のスペクトル  $\omega$  は  $4.05 \text{ mm}$  である。A2、および A3 モードの基本振動数のスペクトルはそれぞれ  $4.5 \text{ mm}$ 、および  $3.6 \text{ mm}$  を示す。一方、A1、A2、および A3 モードに  $1/2$  分数調波振動成分が出現し、これらの振幅はそれぞれ基本振動数成分のそのの 2.8 倍、4.0 倍、および 5.2 倍に達する。

対称振動モード S1、S2、および S3 応答に対応するフーリエ・スペクトルを Fig.20 に示す。これらのモードにも  $1/2$  分数調波振動成分の応答が分岐する。定数項スペクトルも増大している。他方、これらのモードに対応する基本振動数のスペクトルは観察できない。振動モード A9、および S10 の応答スペクトルを Fig.21 に示す。これらのスペクトルは主に  $1/2$  分数調波振動成分であり、時間と共に増大している応答 (Fig.18) は、この分数調波振動成分であることが判る。

自由表面レベルにおける容器の水平方向変位の時刻歴 200sec 近傍の応答を Fig.22 に示す。これらのフーリエ・スペクトルを Fig.23 に示す。この応答は基本振動数の他、 $1/2$  分数調波振動成分、定数項成分を持つ。その他、 $3/2$  分数調波振動成分も観察される。この時刻歴応答波形の最大変位は約  $8.2 \text{ mm}$  である。

容器の底部における差分曲げモーメントの時刻歴 200sec 近傍の応答を Fig.24 に示す。この時刻区間における差分曲げモーメントの極値は  $270 \text{ kNm/m}$  である。この値は前項モデルの約 5.9 倍の大きさである。この応答のフーリエ・スペクトルを Fig.25 に示す。 $1/2$  分数調波振動、基本振動、 $3/2$  分数調波振動、および 2 倍高調波振動のスペクトルが生起している。

このモデルに作用する外力加速度の大きさは 4.4.1 項のモデルと比較して約 1.5 倍である。この系では  $1/2$  分数調波振動応答が分岐して、波高、および容器の応答が急激に増大する。波高が主となる振動モード A1 の基本振動数のスペクトルは 2.8 倍を示し、容器の水平変位は最大値で約 3.4 倍、容器底部の差分曲げモーメントは約 5.9 倍となる非線形振動応答が発生している。

この系の応答は未だ成長の途上にあり、今後さらに増大し、応答が変容する可能性がある。

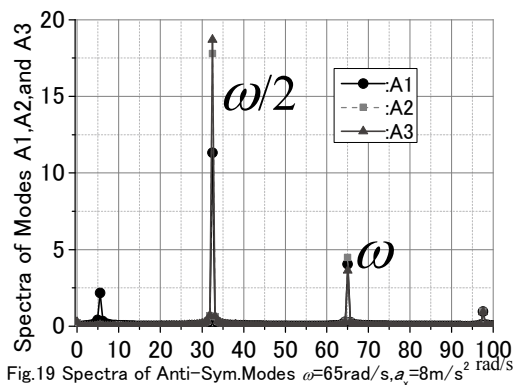


Fig.19 Spectra of Anti-Sym.Modes  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=8\text{m/s}^2$  rad/s

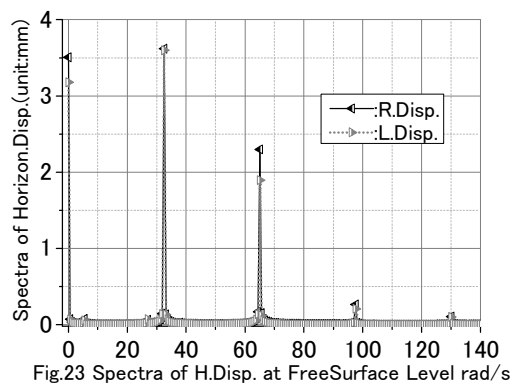


Fig.23 Spectra of H.Disp. at FreeSurface Level rad/s

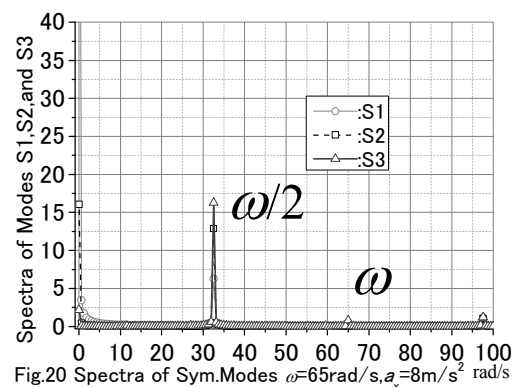


Fig.20 Spectra of Sym.Modes  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=8\text{m/s}^2$  rad/s

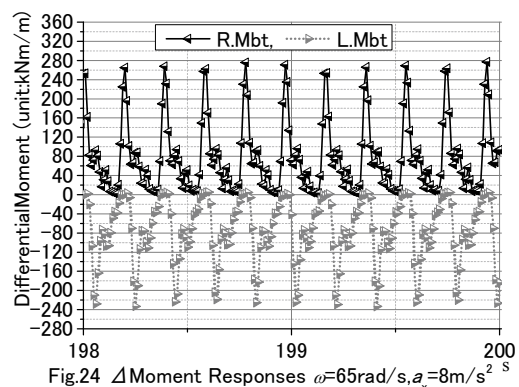


Fig.24  $\Delta$ Moment Responses  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=8\text{m/s}^2$  s

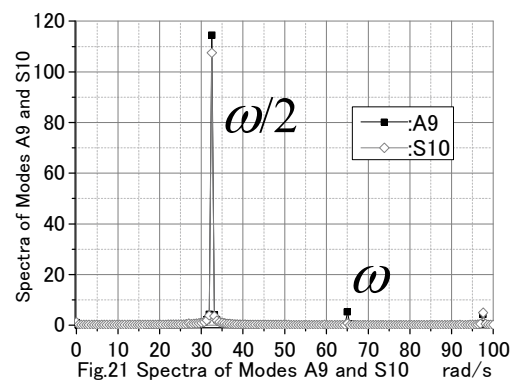


Fig.21 Spectra of Modes A9 and S10 rad/s

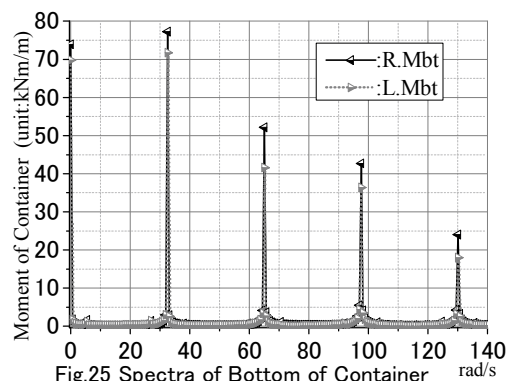


Fig.25 Spectra of Bottom of Container rad/s

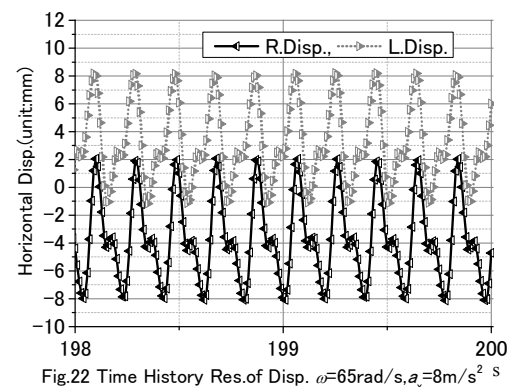


Fig.22 Time History Res.of Disp.  $\omega=65\text{rad/s}, a_x=8\text{m/s}^2$  s

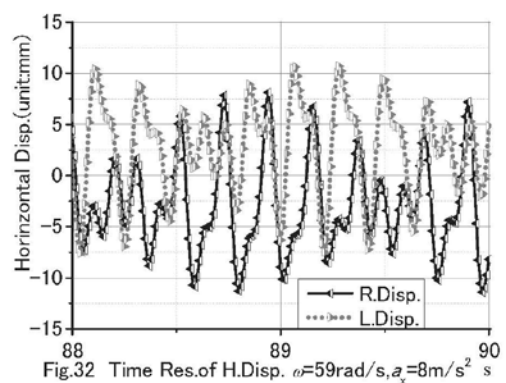
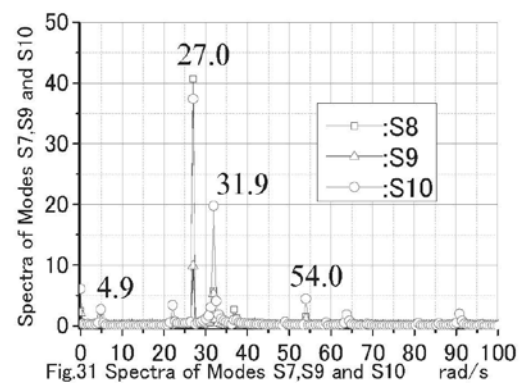
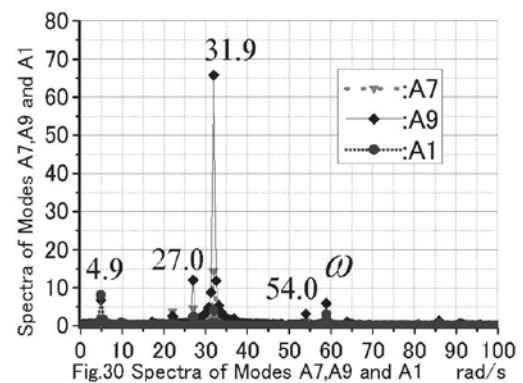
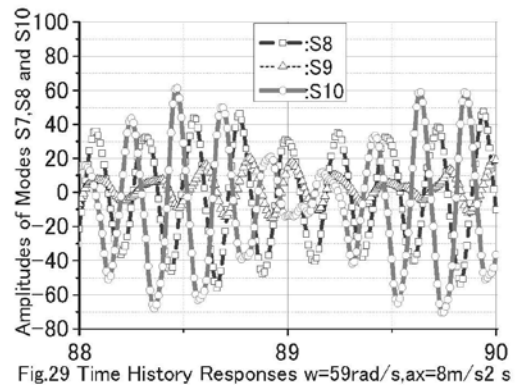
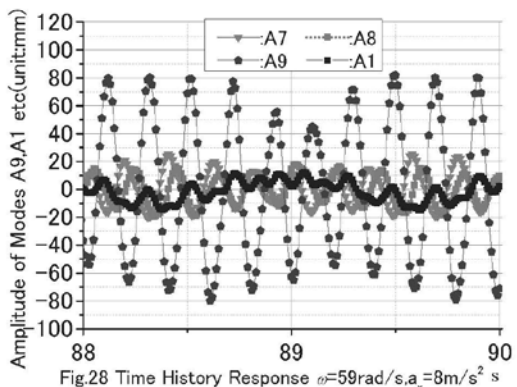
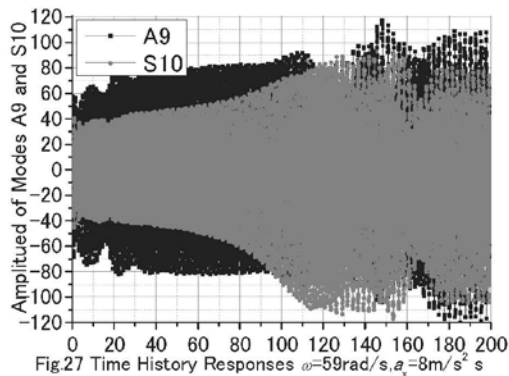
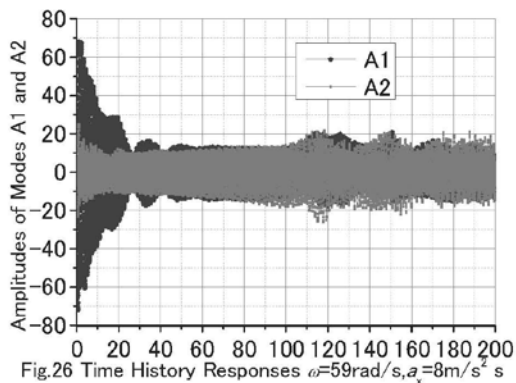
#### 4.4.3 概周期振動応答

外力振動数  $\omega=59\text{rad/s}$ 、水平振動加速度  $a_x=8\text{m/s}^2$  としたモデルにおいて、本質的に概周期の振動応答となるうなり振動を伴う分数調波振動応答が生起する。逆対称振動モード A1、および A2 の時刻歴応答  $t=0\text{-}200\text{sec}$  を Fig.26 に示す。また、同モード A9 と対称振動モード A10 の時刻歴応答を Fig.27 に示す。これらの応答は、初期の過渡応答が時刻歴 30sec 以後、時刻 100sec 近傍まで、安定した振幅増加の応答を示し、その後 180sec 近傍まで不安定な応

答を示す。その後、再度安定した応答が見えるので、時刻 90sec 近傍、および時刻 200sec 近傍で応答を分析する。

まず、時刻応答 90sec 近傍の応答を示す。逆対称振動モード A7,A8,A9、および A1 の時刻歴  $t=88-90\text{sec}$  の応答を Fig.28 に示す。対称振動モード S7,S8、および S10 の同一の時刻歴応答を Fig.29 に示す。両方の振動モードの応答とも、うなり振動を示す。これら応答に対応するフーリエ・スペクトルをそれぞれ Fig.30、および Fig.31 に示す。

これらを整理して、応答スペクトルの特徴を示す。



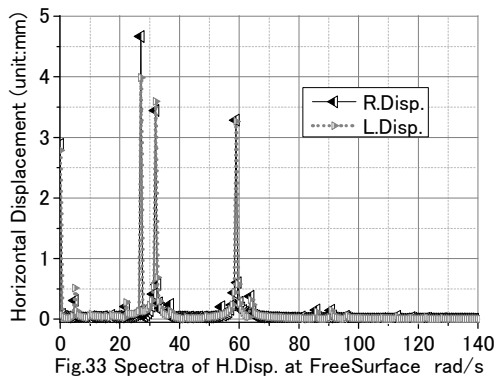


Fig.33 Spectra of H.Disp. at FreeSurface rad/s

- (1) 逆対称振動モード A9 の応答は振動数 31.9rad/sec、振動数 27rad/sec、54rad/sec、および 4.9rad/sec 等のスペクトルを有する。振動数 31.9rad/sec は最大のスペクトルであり、基本振動数 58.9rad/sec のスペクトルの約 11 倍の大きさである。振動モード A9 のスペクトルが他の振動モードのそれと比較して、大きな値を有する。
- (2) 対称振動モードの応答は基本振動成分を含まないものの、振動数 27.0rad/sec、31.9rad/sec、54 rad/sec、および 4.9rad/sec 等のスペクトルを有する。振動数 27.0rad/sec が主スペクトルである。振動モード S8、および S10 がほぼ同じ大きさの主スペクトルを持つ。
- (3) 逆対称振動モードと対称振動モードの卓越振動数のスペクトルの差  $4.9\text{rad/sec}(=31.9-27.0)$  がうなり (beat) 振動の振動数となり、周期約  $1.28\text{sec}(=2\pi/4.9)$  のうなり振動 (Fig.28、および Fig.29) を生み出す。このうなりの振動数は逆対称振動モード A1 の主要スペクトルと一致する。

流体自由表面レベルにおける容器の水平変位の時刻歴応答  $t=88-90\text{sec}$  を Fig.32 に示す。図示の範囲の最大変位は約 10.7mm である。この応答のフーリエ・スペクトルを Fig.33 に示す。基本振動数 59rad/sec のスペクトルより、分数調波振動に対応する振動数 27rad/sec、および 31.9rad/sec のスペクトルの方が大きな値を示す。定数のスペクトルは基本振動数のその 85%程度の値となる。

容器底部における差分曲げモーメント応答の時刻 90sec 近傍の応答、およびフーリエ・スペクトルをそ

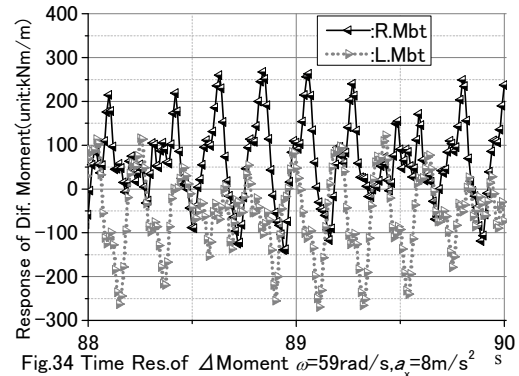


Fig.34 Time Res. of  $\Delta$ Moment  $\omega=59\text{rad/s}, a_x=8\text{m/s}^2$  s

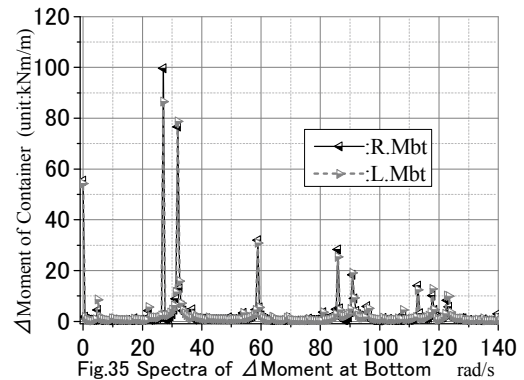


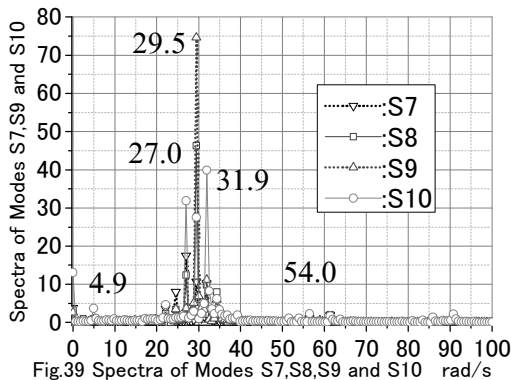
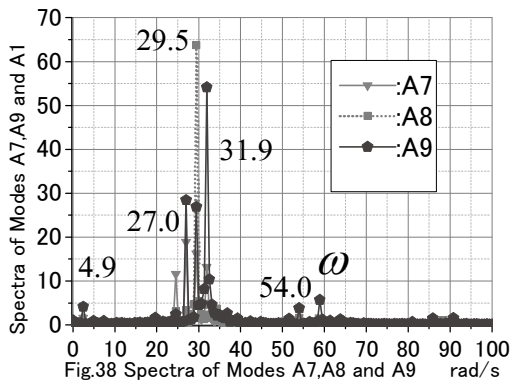
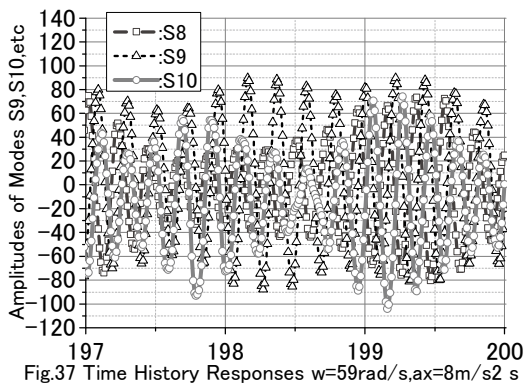
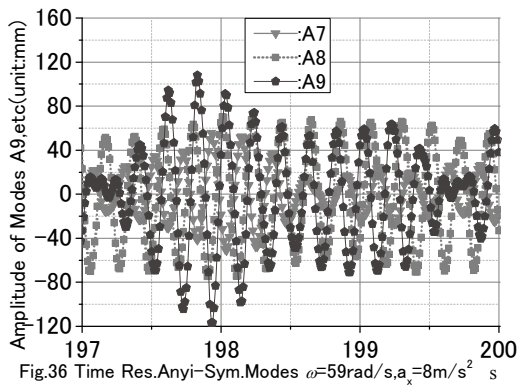
Fig.35 Spectra of  $\Delta$ Moment at Bottom rad/s

れぞれ Fig.34、および Fig.35 に示す。図示範囲の差分モーメント最大値は 267kNm/m である。このスペクトルは分数調波振動の他、いくつかの高調波振動のスペクトルを有する。基本的なスペクトルは基本振動数 65rad/sec、分数調波振動 31.9rad/sec、および 27rad/sec、それに 4.9rad/sec である。

次に、時刻 200sec 近傍の応答を分析する。

逆対称振動モード A7,A8,A9、および対称振動モード S8,S9,S10 の時刻歴応答をそれぞれ Fig.36、および Fig.37 に示す。複雑なうなり振動応答を生起している。時刻 189-200sec の応答データ 1024 個を用いて、フーリエ・スペクトルを算定した。逆対称振動モード、および対称振動モードのフーリエ・スペクトルをそれぞれ Fig.38、および Fig.39 に示す。

時刻 90sec 近傍の応答から得たフーリエ・スペクトル (Fig.30、および Fig.31) と比較すると、新たに振動数 29.45rad/sec を持つスペクトルが分岐し、成長した値を示す。このスペクトルは、外力振動数の 1/2 倍の振動数を持つ 1/2 分数調波振動である。この分数調波振動は逆対称振動モード A8、および対称振動モード S9 において、大きなスペクトルを持つ。

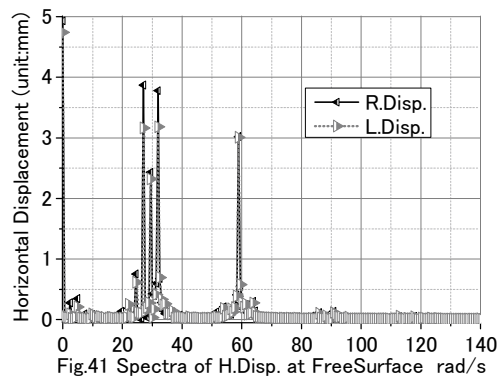
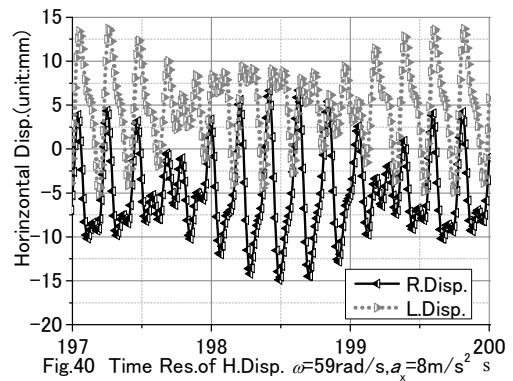


また、この振動数は Fig.30、および Fig.31 で大きな分数調波振動のスペクトルを示した 27rad/sec と 31.9rad/sec の平均値の振動数でもある。

流体自由表面のレベルにおける容器の水平変位の時刻歴 200sec 近傍の応答を Fig.40 に示す。図示した範囲の最大変位は 14.9mm である。この応答のフーリエ・スペクトルを Fig.41 に示す。基本振動数のスペクトルより、分数調波振動のスペクトルの方が大きな値を示す。基本振動数 59rad/sec のスペクトルより、分数調波振動に対応するスペクトルの方が大きな値を示す傾向は変化しない。

時刻 200sec 近傍の容器底部における差分曲げモーメント応答、およびフーリエ・スペクトルをそれぞれ Fig.42、および Fig.43 に示す。差分曲げモーメントの極大値は 328kNm/m である。このフーリエ・スペクトルは分数調波振動の他、いくつかの高調波振動のスペクトルを有する。基本的なスペクトルは基本振動数 59rad/s、分数調波振動 31.9rad/s、27rad/sec および 29.45rad/sec、それに 4.9rad/s である。

これら容器の水平変位、および容器底部の差分モーメントは、時刻 90sec 近傍の最大応答と比較すると、それぞれ 1.39 倍、および 1.21 倍の値である。





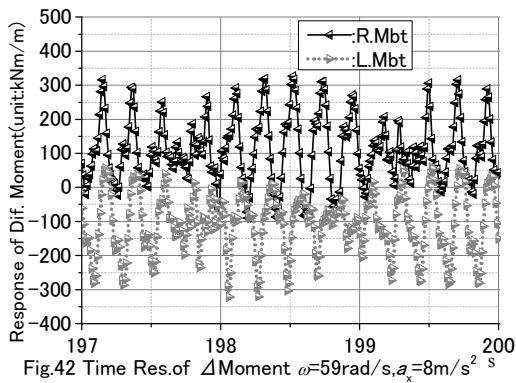


Fig.42 Time Res. of  $\Delta$ Moment  $\omega=59\text{rad/s}$ ,  $a_x=8\text{m/s}^2$

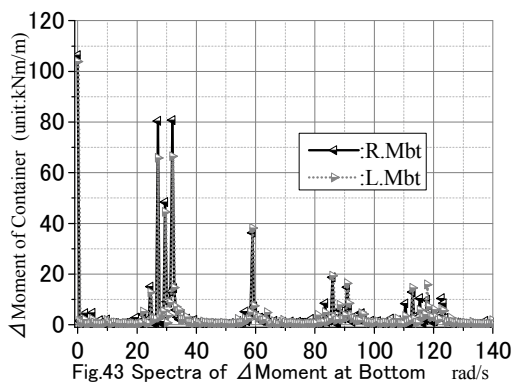


Fig.43 Spectra of  $\Delta$ Moment at Bottom rad/s

新しい分数調波振動の分岐に伴い系の応答は振幅を増し、系の応答の不安定性は増大している。系の応答は時刻 200sec でも定常状態に至っていない。

#### 4.5 分数調波振動の生起領域と応答の振動数

分数調波振動応答は初期の過渡応答には含まれていない。この過渡応答に分数調波振動が分岐して生ずる応答は代表的な非線形振動応答である。この振動の発生に関与するパラメータは外力の振動数、強さ、および系の減衰である。外力振動数と大きさを変更し、分数調波振動が分岐する過渡応答の不安定領域、および振動応答を検討する。

##### 4.5.1 初期応答の不安定領域

容器の応答が大きくなる比較的外力振動数が高い振動数領域において、時刻 100sec までの応答を解析し、分数調波振動が発生する不安定領域を定め、Fig.44 に示す。横軸は外力振動数、縦軸は分数調波振動が発生する最小の外力加速度振幅を表す。このラインより外力が大きな領域は過渡応答とは異なる振動成分の応答が生ずる不安定領域となり、分数調

波振動応答が発生し、外力が小さな領域では分数調波振動の応答は観測されなかった。

次に、外力振動数をパラメータ 52-70rad/sec とし、分数調波振動成分応答が分岐し、応答が比較的小さな外力振幅（分数調波振動応答が生じた最小外力振幅に  $0.2\text{-}0.3\text{m/s}^2$  を加えた）の下で得られた分数調波振動における逆対称振動モード、および対称振動モードの振動数を Fig.45 に示す。各振動モードにおいて、最大の振幅を示した振動モード（この不安定領域の主要逆対称振動モード、および主要対称振動モードと記述する）も Fig.45 に記号を付して示す。

横軸は外力振動数、縦軸は各振動モードの分数調波振動応答の振動数である。

##### 4.5.2 分数調波振動応答

外力振動数 65rad/sec のモデルは Fig.36 の横軸 65 であり、外力加速度が  $6.2\text{m/s}^2$  近傍において分数調波振動が生起する。4.4.2 項では、外力加速度が  $8.0\text{m/s}^2$  における応答を検討した。このモデルにおいて、発生した分数調波振動応答は、逆対称振動モードと対称振動モードが共に  $1/2$  分数調波振動成分を有して

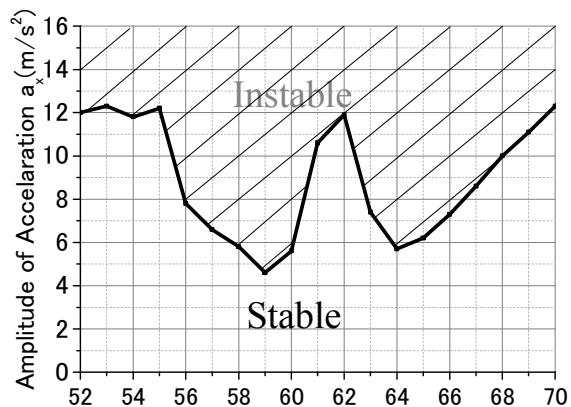


Fig.44 Frequency of Base Acceleration rad/sec

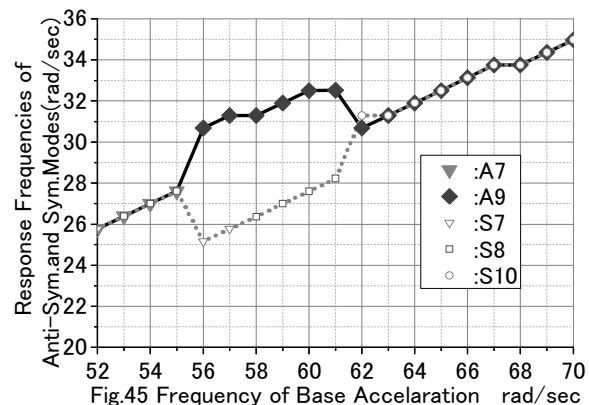


Fig.45 Frequency of Base Acceleration rad/sec

いた。外力振動数の領域 52-55rad/sec、および領域 63-70rad/sec において、応答に 1/2 分数調波振動成分が直接分岐する。

一方、外力振動数 59rad/sec のモデルの分数調波振動応答において、逆対称振動モードは振動数 31.9 rad/sec、および対称振動モードは振動数 27.0 rad/sec の周期性を有していた。外力振動数 53-62rad/sec において、逆対称振動モード、および対称振動モードに依存して異なる振動数を有する分数調波振動応答が発生する。

この不安定領域が生起する外力振動数領域 Fig.45 と不安定領域の図 Fig.44 から、この不安定領域が生起する領域において、小さな外力振幅のもとで不安定領域が発生する。

この振動数領域における主要な逆対称振動モードは A9 である。また、主要対称振動モードは外力振動数 56-57rad/sec、および 58-61rad/sec においてそれぞれ S8、および S10 である。各外力振動数において、逆対称振動モード、および対称振動モードの分数調波振動応答の振動数の和は、外力振動数と一致する。この応答は非線形振動の不安定領域を造る和型の結合共振 (summed combination resonance) のひとつの例であろう。

この領域の分数調波振動の主要なスペクトルは 1/2 分数調波振動成分と比較すると振動数が約 2.45rad/sec 増減した振動数を有する。この振動数の差異約 4.9rad/sec の振動数の差異があるので、応答は概周期約 1.28sec のうなり (beat) 振動となる。

この不安定領域の応答が大きな振幅に成長し、1/2 分数調波振動が分岐する応答が生起した。この時、振動数の差異は 2.45rad/sec になるので、概周期約 2.56sec の応答となる。すなわち、1/2 分数調波振動成分が分岐した後の応答 (Figs.36,37) はこの振動成分が分岐する前の応答 (Figs.28,29) と比較して、うなり周期は 2 倍の長さとなる。

これらの図から、周期 1.28sec と周期 2.56sec の二つのうなり周期が混在した応答を示している。

## 結語

1. ポテンシャル流体と弾性容器の大変形場における動的連成問題の汎関数を利用して、二次元の間

題を定式化する手法を示した。

2. 正弦波の水平地動を受ける剛な容器、および弾性容器に入った流体の応答を解析した。これらの系におけるスロッシング振動の一次共振領域における波高の応答、および弾性容器の応力のフーリエ・スペクトルを示した。

3. この系の応答を容器の 2 等分線に関する逆対称振動モード、および対称振動モードに分解すると、逆対称振動モードの応答は基本振動数のスペクトルの他、奇数次の高調波振動のスペクトルを持つ。一方、対称振動モードの応答は偶数次の高調波振動、およびドリフトのスペクトルを有する。

4. ある外力振動数領域、および外力振幅のもとで、分数調波振動が分岐し、大きな応答に成長することを示した。この代表的な非線形振動応答に二つのタイプがあることを明らかにした。

5. ひとつのタイプは外力振動数の 1/2 分数調波振動成分が主成分となる非線形振動応答<sup>5)</sup>である。この応答では対称振動モード、および逆対称振動モードとも 1/2 分数調波振動成分が卓越スペクトルとなり、 $k/2$  分数調波振動 ( $k$  は奇数) 成分等のスペクトルも随伴する。

6. 他方のタイプは逆対称振動モードの分数調波振動成分の卓越振動数  $\omega_a$  と、対称振動成分の卓越振動数  $\omega_s$  が相違し、これらの和  $\omega_a + \omega_s$  が外力振動数、すなわち基本振動数となる。この時、これらの振動数の差  $\omega_a - \omega_s$  は、逆対称振動モードの最小固有振動数  $\omega_{a1}$  に近接した値となる。

また、このタイプの分数調波振動応答に、5 項に示した 1/2 分数調波振動応答が分岐して、二つのタイプの分数調波振動が重複する応答が生起することを示した。

著者が知る限り、液体の入ったタンクにおいてこのような非線形応答が生起する報告はない。

7. ここに定式化を示した解法は、ポテンシャル流体と弾性容器の動的連成問題に生起する非線形振動応答を数値解析として算定することを可能とする。分数調波振動応答が分岐する不安定な振動現象を示す解析モデルへ適用できる数値解析法であることを実証した。

## 謝辞

振動台を作成し、タンクの振動実験を行うと、時の理論では説明できない相互作用の応答が観測されました。容器の弾性変位に応じた流体場の変形を組み込む汎関数を作りました<sup>2,3)</sup>。25年以上前に、この汎関数は数値解析手法を用いて解けると確信できませんでした。この時期に、式の離散化を試行した下舞三男博士に感謝します。多くの学生・大学院生がタンクに発生する振動応答の実験に携わり、この非線形振動応答の特徴の追求に参画しました。彼らの献身的で継続的な努力が、理論面からこの応答を解明する研究を遂行する励みとなりました。

衷心からの謝意を申し上げます。

本研究はJSPS 科研費 23560677の助成を受けたものです。

## 参考文献

- 1) Luke, J.C., A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.*, vol.27, part.2, pp.395-397 (1967).
- 2) 皆川洋一、下舞三男、有限変形場での弾性体とポテンシャル流体の相互作用の有限要素法による解析、*日本建築学会研究報告 九州支部*、第 29 号・1、pp.185-188 (1986)
- 3) 皆川洋一、有限変形場でのポテンシャル流体と弾性体容器の相互作用を支配する汎関数、*日本建築学会構造系論文報告集* 第 362 号、pp.105 - 115 (1986).
- 4) Y.Minakawa, Lagrangian Functions of the Interactive Behavior Between Potential Fluid and Elastic Containers in Fields of Finite Deformations, *Shells Membranes and Space Frames*, Proceedings IASS Symposium, Osaka, Vol.1, pp.73 - 80 (1986).
- 5) Y.Minakawa, Nonlinear Oscillation Analysis of Interaction Behaviors Between the Potential Fluid and Tanks of Shell of Revolution in Finite Deformations, *日本建築学会構造系論文報告集* No.435, pp.91-107, (1992).
- 6) 山本憲司, 皆川洋一, 完全流体における非線形ロッキングの有限要素解析法, *日本建築学会構造系論文集* No.609, pp.89-96, (2006).
- 7) 皆川洋一、周期的な水平外力を受ける水の入った円筒タンクの非線形振動応答, *日本建築学会構造系論文集*、第 74 巻, 第 642 号、pp.1461-1468 (2009).
- 8) 皆川洋一、自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の直接解, *日本建築学会九州支部* 49-1, pp.209-212 (2010).
- 9) 皆川洋一、自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の直接解, *日本建築学会学術講演梗概集 B-1*、251-252 (2010).
- 10) 皆川洋一、自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の解析、円筒タンクの大変形動的連成問題の定式化、*日本建築学会九州支部* 50-1, pp.345-348 (2011).
- 11) 皆川洋一、自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との動的連成問題の解析-二次元容器の定式化と解析, *日本建築学会大会*、B1、635-636 (2011).
- 12) 皆川洋一、2次元の自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との連成問題の解析、*日本建築学会九州支部* 1, 265-268 (2012).
- 13) 数値流体力学編集委員会、*移動境界流れ解析*、東京大学出版会、(1995).