

交差コイル型計器に関する研究

第3報 空隙内の磁束分布

佐 藤 一 三

Studies on the Ratiometer of Cross-coil Type Part. 3 Intensity Distribution of Magnetic Field in Air Gap

Ichizo SATO

1. 緒 言

交差コイル型計器の磁極片と鉄心は同心円でなく、僅かに偏心して、その間の空隙の磁界は一様でない。この磁界の強さの鉄心上における分布式は第1報¹⁾で求めた。空隙内における鉄心と同心円上の分布については近似式が発表されている。^{2,3)}

しかしながら鉄心と同心円をえがいて回転する可動コイルの半径は一般に磁力線と方向が一致せずある傾きをなし、したがって空隙内の磁界の式そのままがコイルに有効に働く分布式とはならない。この傾きを考慮し、あわせてコイル幅による補正を行なった式を得たので報告する。

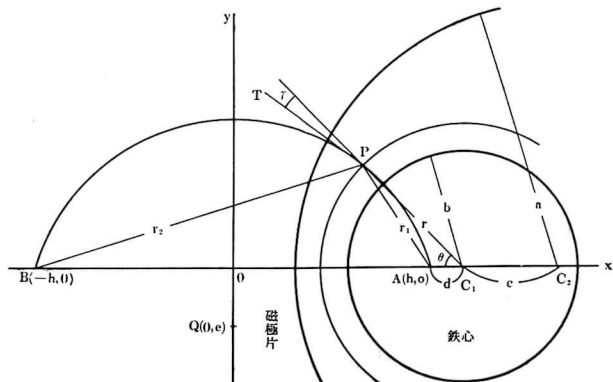
2. 空隙内の磁界

磁極片、鉄心間の磁界を表わす複素函数として

$$\chi = \varphi + i\psi = \log \frac{z+h}{z-h} \quad (1)$$

を用いると¹⁾ $\psi = \text{const.}$ は第1図 z 平面の x 軸上の二点 $A(h, 0)$, $B(-h, 0)$ を通る円群に写像され、 $\varphi = \text{const.}$ は x 軸上に中心をもち $\psi = \text{const.}$ の円群に直交する円群に写像される。 $\varphi = \text{const.}$ の円群のうち二つの円を適当に選んで、磁極片(半径 a , 中心 C_2) および鉄心(半径 b , 中心 C_1) の両面に一致させると、 $\psi = \text{const.}$ の円群はその間の磁力線を表わし、任意の点 P における磁界の強さ H_r は、 $AP=r_1$, $BP=r_2$ とすると

$$H_r = \frac{2h}{r_1 r_2} \quad (2)$$



第1図 Z 平面

で与えられる。

計器の可動コイルは鉄心の中心 C_1 を軸として回転する。その回転半径を r とし、 $PC_1=r$ 、偏心すなわち $C_1C_2=c$ 、 $AC_1=d$ 、 $\angle PC_1A=\theta$ とすると

$$r_1^2=r^2+d^2-2rd\cos\theta, \quad r_2^2=r^2+(2h+d)^2-2r(2h+d)\cos\theta$$

したがって (2) 式から P 点の磁界の強さ H_r は

$$H_r=2h/[(r^2+d^2-2rd\cos\theta)\{r^2+(2h+d)^2-2r(2h+d)\cos\theta\}]^{1/2}$$

上式において

$$r^2+d^2-2rd\cos\theta=(r-d)^2\left\{1+\frac{2rd}{(r-d)^2}(1-\cos\theta)\right\}$$

$$r^2+(2h+d)^2-2r(2h+d)\cos\theta=(2h+d-r)^2\left\{1+\frac{2r(2h+d)}{(2h+d-r)^2}(1-\cos\theta)\right\}$$

と書きかえて

$$E_1=\frac{2rd}{(r-d)^2}, \quad E_2=\frac{2r(2h+d)}{(2h+d-r)^2}, \quad H_{r0}=\frac{2h}{(r-d)(2h+d-r)} \quad (3)$$

とおくと

$$H_r=H_{r0}/[\{1+E_1(1-\cos\theta)\}\{1+E_2(1-\cos\theta)\}]^{1/2} \quad (4)$$

ここに H_{r0} は $\theta=0$ における H_r の値である。 $r=b(1+\delta)$ とおいて第1報の関係式

$$2hd-b^2+d^2=0, \quad E=\frac{2bd}{(b-d)^2}=\frac{2bc}{a^2-(b+c)^2} \quad (5)$$

を用いると

$$H_{r0}=2hd/b(b-d)^2\left\{1+\delta-\frac{bd}{(b-d)^2}\delta^2\right\}=H_0/\left(1+\delta-\frac{E}{2}\delta^2\right) \quad (6)$$

ここに $H_0=2hd/b(b-d)^2$ は鉄心上 $\theta=0$ における磁界の強さである。

(3) 式において r はコイルの半径であり、 h および d は第1報によって a, b, c すなわち磁極片、鉄心および偏心の寸法で表わすことができるから、(4) 式によって空隙内の磁界の強さの分布が計算できる。

あるいは (4) 式を

$$H_r=H_{r0}/\{1+(E_1+E_2)(1-\cos\theta)+E_1E_2(1-\cos\theta)^2\}^{1/2} \quad (7)$$

と書きかえて次の (8) 式を用いると更に便利である。(5) 式から (3) 式の E_1, E_2 は次のように書きかえられる。

$$E_1=E(1+\delta)/(1+\frac{b}{b-d}\delta)^2, \quad E_2=E(1+\delta)/(1-\frac{d}{b-d}\delta)^2$$

簡単のために $A=\frac{\delta^2}{1+\delta}$ とおいて上の二式から

$$E_1+E_2=\{2E+E(1+E)A\}/(1-\frac{E}{2}A)^2, \quad E_1E_2=E^2/(1-\frac{E}{2}A)^2 \quad (8)$$

が導ける。

計器では一般に $\delta \approx 0.1$ の程度であるから $A^2 \approx \delta^4$ 以上の項を小さいとして省略すると

$$E_1 + E_2 = 2E + E(1 + 3E)A, \quad E_1 E_2 = E^2 + E^3 A$$

すると (7) 式は

$$\begin{aligned} H_r &= H_{r0} [1 + \{2E + E(1 + 3E)A\}(1 - \cos\theta) + (E^2 + E^3 A)(1 - \cos\theta)^2]^{-1/2} \\ &= H_{r0} [\{1 + E(1 - \cos\theta)\}^2 + A\{E(1 + 3E)(1 - \cos\theta) + E^3(1 - \cos\theta)^2\}]^{-1/2} \end{aligned}$$

鉄心上の分布式 $H/H_0 = 1/\{1 + E(1 - \cos\theta)\}^{1/2}$ を用い、簡単のために以下 $H_0 = 1$ とおくと

$$H_r = H_{r0} \left[H - \frac{A}{2} E H^3 \{ (1 + 3E)(1 - \cos\theta) + E^2(1 - \cos\theta)^2 \} \right] \quad (9)$$

これが A^2 以上の項を省略した空隙内の磁界の分布式である。

3. コイルと磁力線のなす角

空隙内では可動コイルの半径方向と磁力線の方法は一般に一致しない。次にその間の角を求める。

第1図において、 P 点を通る磁力線を表わす $\psi = \text{const.}$ 円は、中心を $Q(0, e)$ とすると

$$x^2 + (y - e)^2 = h^2 + e^2$$

P の座標は $(h + d - r\cos\theta, r\sin\theta)$ であるから

$$(h + d - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta - e)^2 = h^2 + e^2$$

これから

$$e = \frac{2hd + d^2 + r^2 - 2(h + d)r\cos\theta}{2r\sin\theta} \quad (10)$$

また P における $\psi = \text{const.}$ 円の接線 PT の方向係数 m_1 は

$$m_1 = -\frac{h + d - r\cos\theta}{r\sin\theta - e}$$

であり、コイルの半径 PC_1 の方向係数は $m_2 = -\tan\theta$ であるから、磁力線と半径 PC_1 のなす角を r とすると

$$\tan r = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \left(\tan\theta - \frac{h + d - r\cos\theta}{r\sin\theta - e} \right) / \left(1 + \tan\theta \frac{h + d - r\cos\theta}{r\sin\theta - e} \right)$$

(10) 式を入れて整理すると

$$\tan r = \frac{(r^2 - 2hd - d^2)\sin\theta}{2(h + d)r - (2hd + d^2 + r^2)\cos\theta}$$

(5) 式から

$$2hd + d^2 = b^2, \quad 2(h + d) = \frac{b^2}{d} + d = \frac{(b - d)^2}{d} + 2b$$

の関係があるから

$$\begin{aligned} \tan r &= \left\{ \left(\frac{r}{b} \right)^2 - 1 \right\} \sin\theta / \left[\left\{ \frac{(b - d)^2}{bd} + 2 \right\} \frac{r}{b} - \left\{ 1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right\} \cos\theta \right] \\ &= \left\{ \left(\frac{r}{b} \right)^2 - 1 \right\} \sin\theta / \left[2 \left(\frac{1}{E} + 1 - \cos\theta \right) \frac{r}{b} - \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^2 \cos\theta \right] \end{aligned}$$

$r = b(1 + \delta)$ を入れ、 A^2 以上の項を省略すると

$$\tan^2 r = 4E^2 H^2 \sin^2 \theta$$

したがって

$$\cos\gamma = (1 + \tan^2\gamma)^{-1/2} = 1 - \frac{A}{2} E^2 H^2 \sin^2\theta$$

4. 有 効 磁 界

可動コイルにトルクを与える有効な磁界は (9) 式そのままではなく、その半径方向の成分、すなわち (9) 式に $\cos\gamma$ を乗じたものである。これを H_e とおいて A^2 の項を省略すると

$$H_e = H_r \cos\gamma = H_{r0} \left[H - \frac{A}{2} E H^3 (1 - \cos\theta) \{ 1 + 5E + (E^2 - E)(1 - \cos\theta) \} \right] \quad (11)$$

あるいはすべて H で表わすと

$$H_e = H_{r0} \left[H - \frac{A}{2} H \{ E - 1 + 3(1 + E)H - 2(1 + 2E)H^2 \} \right] \quad (12)$$

(11) 式または (12) 式が空隙内の有効な磁界の分布式である。

いまこの磁界の近似式として $H_e' = H_{r0}H$ 、すなわち鉄心上の式を用いると、これは誤差 A 程度の近似式とみることができる。次に鉄心上の式と同じ楕円形式のうちで最良の近似式を求める。これを

$$H_f = \frac{H_{r0}}{1 + E_r(1 - \cos\theta)}, \quad E_r = E(1 + \varepsilon)$$

とおいて ε のべき級数に展開し、(11) 式と比べると $\varepsilon \approx A$ の程度であるから ε^2 以上の項を省略すると

$$H_f = H_{r0} \{ H - \varepsilon E H^2 (1 - \cos\theta) \} \quad (13)$$

H_e の最良の近似式 H_f は誤差の二乗平均が極小になるように ε を定めればよい。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} (H_e - H_f)^2 d\theta = \frac{2}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} (H_e - H_f) \frac{\partial (H_e - H_f)}{\partial \varepsilon} d\theta = 0 \quad (14)$$

ここに、積分の上限 θ_1 は計器の実際の使用範囲の角度とする。(11), (13) 式から

$$H_e - H_f = E H_{r0} \left[\varepsilon H^2 (1 - \cos\theta) - \frac{A}{2} H^3 (1 - \cos\theta) \{ 1 + 5E + (E^2 - E)(1 - \cos\theta) \} \right]$$

これを (14) 式に入れて

$$\varepsilon \int_0^{\theta_1} H^4 (1 - \cos\theta)^2 d\theta = \frac{A}{2} \int_0^{\theta_1} H^5 (1 - \cos\theta)^2 \{ 1 + 5E + (E^2 - E)(1 - \cos\theta) \} d\theta$$

積分を行なうと

$$\varepsilon = A \{ (6 + 12E + 5E^2)(3x - 3\sin x \cos x - 2\sin^3 x \cos x) + 8E(6 + 11E) \sin^2 x \cos x - 48E^2 \sin^7 x \cos x \} / \{ 4(3 + E)(3x - 3\sin x \cos x - 2\sin^3 x \cos x) + 32E \sin^5 x \cos x \} \quad (15)$$

ここに x は $\tan x = \sqrt{1 + 2E} \tan \frac{\theta_1}{2}$ で与えられる。

H_f は H_e と $H_e = H_f$ を満足する $\theta = 0$ および θ_2 の二点で一致する。第1表に $\delta = 0.1$, $\theta_1 = 40^\circ$ とした場合の誤差の最大値を示す。この程度の誤差は計器の工作精度と比べると無視できると考えられ、実用上は近似式 H_f を用いてさしつかえない。

5. 可動コイルの幅による補正

空隙内を回転する可動コイルには第2図のように幅がある。したがって、一様でない磁界内では、電流によって生ずるトルクはコイル上の各部分によって異なる。コイル幅が中心に張る角を 2β とすると、コイルに働く平均磁界 H_c は

$$H_c = \frac{1}{2\beta} \int_{\theta-\beta}^{\theta+\beta} H_e d\theta$$

$\int H_e d\theta = F(\theta)$ とおくと

$$\int_{\theta-\beta}^{\theta+\beta} H_e d\theta = F(\theta+\beta) - F(\theta-\beta)$$

β を小さいとして級数に展開すると

$$F(\theta+\beta) = F(\theta) + \beta F'(\theta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\theta) + \frac{\beta^3}{6} F'''(\theta) + \dots$$

$$F(\theta-\beta) = F(\theta) - \beta F'(\theta) + \frac{\beta^2}{2} F''(\theta) - \frac{\beta^3}{6} F'''(\theta) + \dots$$

したがって

$$H_c = \frac{1}{2\beta} \{F(\theta+\beta) - F(\theta-\beta)\} = F'(\theta) + \frac{\beta^2}{6} F'''(\theta) + \frac{\beta^4}{120} F^{(5)}(\theta) + \dots \quad (16)$$

ここに $F'(\theta) = H_e$ であり (11) 式から

$$F'''(\theta) = -EH_0 H^3 \{1 - (1+3E)(1-\cos\theta) + E(1-\cos\theta)^2\} + A [\quad]$$

右辺第二項 $A[\quad]$ は (11) 式右辺の第二項を二回微分した式である。これらの式を (16) 式に入れ、 β が 0.15 程度の値であるから $A\beta^2$ および β^4 以上の項を小さいとして省略すると

$$H_c = H_e - \frac{\beta^2}{6} EH_0 H^3 \{1 - (1+3E)(1-\cos\theta) + E(1-\cos\theta)^2\}$$

$\theta=0$ において $H_c = H_{c0}$ とおくと

$$H_{c0} = H_0 (1 - \frac{\beta^2}{6} E)$$

この関係と (11) 式を上式に入れ、 $A\beta^2$ および β^4 以上の項を省略して整理すると

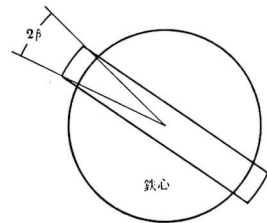
$$H_c = H_{c0} [H - (\frac{A}{2} - \frac{\beta^2}{6}) EH^3 (1-\cos\theta) \{1 + 5E + (E^2 - E)(1-\cos\theta)\}] \quad (17)$$

この式がコイルの幅を考慮に入れた分布式を与える。

(17) 式は (11) 式において、 $\frac{A}{2}$ のかわりに $\frac{A}{2} - \frac{\beta^2}{6}$ とおき、 H_{r0} のかわりに H_{c0} とおきかえたにすぎない。また H_c を楕円形式で表わした最良の近似式を

第1表 磁界に関する数値の例

磁界の型式	A	B	C	
磁極片半径 a (mm)	13	14	17	
鉄心半径 b "	9.7	9.7	9.7	
偏心 c "	1	2	5.3	
E'	0.3559	0.6564	1.6066	
補正値 ϵ	0.0118	0.0175	0.0336	
$H_c = H_f$ の角度 θ_2 (度)	33	33	31	
近似式による誤差の最大値	$\frac{H_c'}{H_f}$ (%)	0.09	0.2	0.8
	$\frac{H_c''}{H_f}$ "	0.001	0.004	0.04



第2図 可動コイル

$$H_d = \frac{H_{c0}}{1 + E_c(1 - \cos\theta)}, \quad E_c = E(1 + \eta) \quad (18)$$

とおくと、(15)式の ε を用いて

$$\eta = \varepsilon \left(1 - \frac{\beta^2}{3A}\right)$$

で与えられ、 A と β とは補正值に対して互に相殺するように働く。(18)式が実際の計器に適用される式であり、適当な設計によって補正值並に誤差は任意に小さくすることができる。特に $\beta^2 = 3A$ の場合には鉄心上の式がそのまま成立する。

6. 結 論

空隙内の磁界の式として実用上は鉄心上の式を用いることができる。この際鉄心上の E に僅かな補正を加えればよい。可動コイルの幅を考慮すると、補正值は任意に小さくすることができ、計器の設計並に計算には鉄心上の分布式を使用できる。

文 献

1. 佐藤一三：鹿大教研究紀要 **12**, 1 (1960)
2. 林 俊孝：応用物理 **20**, 193 (1951)
3. 林 俊孝：北辰電機研究報告 **1**, 30 (1957)