交差コイル型計器に関する研究

第 4 報　コイルの制動

佐藤一三

Studies on the Ratiometer of Cross-coil Type

Part. 4　Damping of Coils

Ichizo SATO

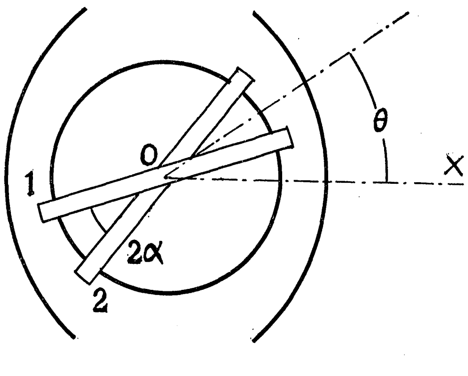
1. 緒　　言

交差コイル型計器は一般の可動コイル型直流計器と異なり，コイルに働く磁界は一様でない。筆者はさきにこの磁界の分布式を函数論を用いて求めたが，その後測定結果ともよく一致することが報告されている[1]。計器の種々の特性はこの式から誘導できるが，コイルの制動について発表された報告[2]については式の展開が全く行われていない。この度，この分布式を用いてコイルの制動を表わす式を得たので報告する。

2. 可動コイルの復元力

交差コイル型計器の磁極片と鉄心は共に円筒形であるが，同心円ではなく僅かに偏心していてその間の空隙内の磁界は一様でない。空隙の最短距離を通る直線を基線 OX にとり，それと θ の角をなす点の磁界 $H(\theta)$ ガウスは

$$H(\theta)=\frac{H_0}{1+E(1-\cos\theta)} \qquad (1)$$



で与えられる[3)5)]。ここに H_0 ガウスは $\theta=0$ における磁界である。

2個の交差した可動コイル 1, 2 は互に固定されており，空隙内で鉄心と同心円上を回転できるように支えられている。コイル 1 に流れる電流を I_1 アンペア，その点の磁界を H_1 ガウスとすると，これに働くトルク N_1 ダイン・cm は

$$N_1=\frac{1}{10}k_1I_1H_1$$

ここに k_1 はコイル 1 の巻数を n_1，直径を b_1 cm，鉄心の高さを l cm とするとき，$k_1=n_1b_1l$ である。同様にコイル 2 について

$$N_2=\frac{1}{10}k_2I_2H_2$$

従ってコイルの軸に働く合成トルクは

$$N=N_1+N_2=\frac{1}{10}(k_1I_1H_1+k_2I_2H_2) \tag{2}$$

2個のコイルのなす角を 2α ラジアンとし，その二等分線が X 軸となす角を θ とすれば

$$N=\frac{1}{10}\{k_1I_1H(\theta-\alpha)+k_2I_2H(\theta+\alpha)\} \tag{3}$$

両コイルにそれぞれ I_1, I_2 の電流を流したときの静止点 θ_0 では $N=0$ であるから

$$k_1I_1H(\theta_0-\alpha)=-k_2I_2H(\theta_0+\alpha) \tag{4}$$

当然のことであるが，コイル1と2に働くトルクが互に逆向きになるように電流を流すときに釣合う。

いまコイルを静止点から僅かの角 φ だけふらせると静止点に復元しようとする力が働く。(3) 式から φ を小さいとして

$$\begin{aligned}N&=\frac{1}{10}\{k_1I_1H(\theta_0+\varphi-\alpha)+k_2I_2H(\theta_0+\varphi+\alpha)\}\\&=\frac{1}{10}k_1I_1\left\{H(\theta_0-\alpha)+\left(\frac{dH}{d\theta}\right)_{\theta_0-\alpha}\varphi\right\}+\frac{1}{10}k_2I_2\left\{H(\theta_0+\alpha)+\left(\frac{dH}{d\theta}\right)_{\theta_0+\alpha}\varphi\right\}\\&=\frac{1}{10}\left\{k_1I_1\left(\frac{dH}{d\theta}\right)_{\theta_0-\alpha}+k_2I_2\left(\frac{dH}{d\theta}\right)_{\theta_0+\alpha}\right\}\varphi\end{aligned} \tag{5}$$

(1) 式を微分して

$$\frac{dH}{d\theta}=-\frac{H_0E\sin\theta}{\{1+E(1-\cos\theta)\}^2}=-\frac{E}{H_0}\{H(\theta)\}^2\sin\theta$$

これを用いると (5) 式は

$$N=-\frac{E}{10H_0}[k_1I_1\{H(\theta_0-\alpha)\}^2\sin(\theta_0-\alpha)+k_2I_2\{H(\theta_0+\alpha)\}^2\sin(\theta_0+\alpha)]\varphi$$

(4) 式を用いて

$$N=\frac{E}{10H_0}k_1I_1H(\theta_0-\alpha)\{H(\theta_0+\alpha)\sin(\theta_0+\alpha)-H(\theta_0-\alpha)\sin(\theta_0-\alpha)\}\varphi \tag{6}$$

ここに

$$H(\theta_0+\alpha)=\frac{H_0}{1+E\{1-\cos(\theta_0+\alpha)\}},\ H(\theta_0-\alpha)=\frac{H_0}{1+E\{1-\cos(\theta_0-\alpha)\}}$$

であるから

$$\begin{aligned}&H(\theta_0+\alpha)\sin(\theta_0+\alpha)-H(\theta_0-\alpha)\sin(\theta_0-\alpha)\\&=\frac{2(1+E)\cos\theta_0\sin\alpha-E\sin2\alpha}{\{1+E-E\cos(\theta_0+\alpha)\}\{1+E-E\cos(\theta_0-\alpha)\}}H_0\end{aligned}$$

α は小さいから $\sin\alpha\fallingdotseq\alpha$, $\cos\alpha\fallingdotseq1$ として

$$=\frac{2}{H_0}H(\theta_0+\alpha)H(\theta_0-\alpha)\{(1+E)\cos\theta_0-E\}\alpha$$

故に (6) は

$$N=\frac{2E}{10H_0^2}k_1I_1H(\theta_0+\alpha)\{H(\theta_0-\alpha)\}^2\{(1+E)\cos\theta_0-E\}\alpha\varphi \tag{7}$$

$H(\theta)$ は角度 θ の大きさと共に減少する。計器の使用可能な範囲では $(1+E)\cos\theta_0-E>0$ であり，$(1+E)\cos\theta'-E=0$，即ち $\cos\theta'=E/(1+E)$ の限界角 θ' では $N=0$ で復元力は 0 になる。$\theta_0>\theta'$ ではコイルは不安定になり指針が流れてしまう。このことは第2報[4] で報告した。$\varphi>0$ のとき $N<0$ であり，$\varphi<0$ のとき $N>0$ であればコイルはもとに復する復元力が働く。従って (7) 式から $N_1=1/10\cdot k_1I_1H(\theta_0-\alpha)<0$ であり，コイル1に働くトルクは負方向に，コイル2に働くトルクは正方向になるように，電流 I_1，I_2 を流すことになる。

3. 可動コイルの制動

一般にこの型の計器では可動コイルをアルミニウムわくに取付けて電磁制動をきかせている。磁界中をコイルが運動することによってアルミわくには誘導電流 i アンペアが発生する。コイル1のアルミわくの直径を a cm，高さを l cm，抵抗をRオームとすれば

$$i=\frac{1}{10^8}\frac{H_1al}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

従ってコイル1のアルミわくによる制動トルク τ_1 ダイン・cm は

$$\tau_1=\frac{1}{10}aH_1il=\frac{1}{10^9}\frac{H_1^2a^2l^2}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

コイル2のアルミわくもコイル1と同一寸法のものを用いるとすれば，コイル2のアルミわくによる制動トルク τ_2 は

$$\tau_2=\frac{1}{10^9}\frac{H_2^2a^2l^2}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

この外に，コイルの巻線に誘導された電流によって制動トルクが働く。然し，実際の計器ではコイル1，2共外部で抵抗に接続する。その結線には種々の方法があるが，どの場合もその抵抗はアルミわくに比べて極めて大きいので，コイル自身に誘導される電流による制動トルクは小さいとみて無視できる。従ってコイルに働く全制動トルク τ は

$$\tau=\tau_1+\tau_2=\frac{a^2l^2}{10^9R}(H_1^2+H_2^2)\frac{d\theta}{dt} \tag{8}$$

交差コイルのなす角 2α は小さいから $H_1^2+H_2^2\fallingdotseq 2H_1H_2$

$$\tau=\frac{2a^2l^2}{10^9R}H_1H_2\frac{d\theta}{dt}=\frac{2a^2l^2}{10^9R}H(\theta+\alpha)H(\theta-\alpha)\frac{d\theta}{dt} \tag{9}$$

α を小さいとして無視すれば

$$\tau=\frac{2a^2l^2}{10^9R}\frac{H_0^2}{\{1+E(1-\cos\theta)\}^2}\frac{d\theta}{dt}$$

4. 制　動　条　件

交差コイルの指針も含めた慣性モーメントを$K g\cdot cm^2$とすれば，コイルの回転運動の式は (2), (8) から

$$K\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{a^2l^2}{10^9R}(H_1^2+H_2^2)\frac{d\theta}{dt}-\frac{1}{10}(k_1I_1H_1+k_2I_2H_2)=0 \tag{10}$$

この式は複雑であって一般には解けない。しかし運動しはじめる最初の1～2秒間は $\theta-\theta_0$ が大きくてもそれはごく短時間であって，間もなく $\theta-\theta_0$ が小さくなってからも完全に静止するまでの時間が比較的に長いのであるから，$\theta-\theta_0$ が小さい時だけについて論ずることにする。静止するまでの所要時間を短くしようとする実用上の目的に対してはこの解き方で十分である。

静止点θ_0附近の運動は (10) 式で，(2) のかわりに (7) を，また (8) のかわりに (9) を入れ，更に $\theta-\theta_0=\varphi$と おき，φ を小さいとして

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{2a^2l^2}{10^9R}H(\theta_0+\alpha)H(\theta_0-\alpha)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$+\frac{2E}{10H_0^2}k_1I_1H(\theta_0+\alpha)\{H(\theta_0-\alpha)\}^2\{(1+E)\ \cos\ \theta_0-E\}\alpha\varphi=0$$

ただし左辺第3項はトルクの方向を考えて符号を変えてある。この微分方程式は簡単に解ける。

$$\varDelta=(\text{第2項の係数})^2-4(\text{第1項の係数})\times(\text{第3項の係数})$$

とおけば

$$\varDelta=\left(\frac{a^2l^2}{10^9R}\right)^2\{H(\theta_0+\alpha)H(\theta_0-\alpha)\}^2-\frac{2KEk_1I_1}{10H_0^2}H(\theta_0+\alpha)\{H(\theta_0-\alpha)\}^2\{(1+E)\ \cos\ \theta_0-E\}\alpha$$

$$=\{H(\theta_0+\alpha)H(\theta_0-\alpha)\}^2\left[\frac{a^4l^4}{10^{18}R^2}-\frac{2KEk_1I_1}{10H_0^2}\frac{(1+E)\ \cos\theta_0-E}{H(\theta_0+\alpha)}\alpha\right]$$

α を小とし，$\cos\ (\theta_0+\alpha)\fallingdotseq\cos\ \theta_0$ として上式の[　]内を変形すると

$$[\quad]\fallingdotseq\frac{a^4l^4}{10^{18}R^2}-\frac{2KEk_1I_1}{10H_0^3}\{(1+E)\ \cos\ \theta_0-E\}(1+E-E\cos\ \theta_0)\alpha \tag{11}$$

[　]>0，従って $\varDelta>0$ の場合は制動過度となり，指針の静止に長時間を要する。また[　]<0 の場合は指針は振動して容易に静止しない。[　]=0 の場合は臨界制動となり最も速かに静止する。然し (11) 式からわかるように，この条件は静止点 θ_0 で変り，計器の全目盛にわたって臨界制動に保つことは不可能である。特に前述の限界角 θ' 附近では $(1+E)\ \cos\ \theta_0-E\fallingdotseq0$ となり，アルミわくを使用する限り制動過度となる。

(11) 式右辺第2項の括弧の中は θ_0 が変ると0から1までの値をとるが，目盛の中央 ($\theta_0=0$) では1であるから

$$[\quad]=\frac{a^4l^4}{10^{18}R^2}-\frac{2KEk_1I_1}{10H_0^3}\alpha$$

ここに $k_1=n_1b_1l$ であるが，コイルとアルミわくの直径は殆んど等しいとみてよいから，$b_1\fallingdotseq a$ とお

いて

$$[\quad]=\frac{al}{10}\left(\frac{a^3l^3}{10^{17}R^2}-\frac{2KEn_1I_1}{H_0^3}\alpha\right)$$

上式の（ ）の中を D とおけば

$$D=\frac{a^3l^3}{10^{17}R^2}-\frac{2KEn_1I_1}{H_0^3}\alpha \tag{12}$$

$D>0$ ならば制動過度，$D=0$ ならば臨界制動，$D<0$ ならば制動不足となる。この式は目盛中央での条件であり，制動条件は角度 θ_0 と共に変るものであるが，他の角度での制動の目安として利用できる。

或は (12) 式右辺第1項と第2項の比を λ とおけば

$$\lambda=\frac{a^3l^3H_0^3}{2\times10^{17}KEn_1I_1R^2\alpha}$$

$\lambda>1$ ならば制動過度，$\lambda=1$ ならば臨界制動，$\lambda<1$ ならば制動不足となる。

5. 結　　論

さきに報告した交差コイル型計器の磁束分布式をもとにして制動条件を表わす式を得た。磁極の型式によってきまる H_0, E, l, コイルの型式できまるa, n_1, α, コイルわくの抵抗 R, 指針できまる K, コイルに流れる電流 I_1 等の量を用いて制動条件が計算できる。計器の設計に際しては，指針が速かに静止するように考慮する必要があるが，あらゆる目盛で満足するような条件式を求めることは不可能である。(12) 式は目盛中央における式であるが，他の目盛の場合も目安として利用できる。

参　考　文　献

1) 林　俊孝：応用物理 20 (1951) 193
2) 林　俊孝：北辰電機研究報告 1 (1957) 110
3) 佐藤一三：鹿大教研究紀要 12 (1960) 1
4) 佐藤一三：鹿大教研究紀要 12 (1960) 5
5) 佐藤一三：鹿大教研究紀要 13 (1961) 5

Summary

An equation showing the damping conditions of the cross-coil type ratiometer was derived. If we introduce a symbol λ to denote the damping conditions, the equation is expressed as follows,

$$\lambda=(a^3l^3H_0^3)/(2\times10^{17}KEn_1I_1R^2\alpha)$$

where H_0 is the intensity of the magnetic field at the middle point of the scale, l the height of the cylindrical core, K the moment of inertia of the moving parts, a the diameter, R the resistance of the frame, n_1 the turns, I_1 the current of coil

1, 2α the angle between two coils and E a certain constant derived from dimensions of two soft iron surfaces (a pole-piece and a core), respectively.

When $\lambda>0$, the damping becomes over, $\lambda=0$ critical and $\lambda<0$ under.