

波動用ばねによる横波実験の分析 —パルス波と自由端の作り方—

三 仲 啓*・榎 木 隆 人**

(2012年10月23日 受理)

Analyses of Transverse-Wave Experiment Using a Long Spring —How to make a wave pulse and a free end—

MINAKA Akira, ENOKI Takahito

要 約

横波用の波動ばねは学校教育のさまざまな場面で利用されているが、ここでは、ばね上にきれいなパルス波を作る方法と疑似的な自由端を作る方法について考察する。これらをどのように作るかは経験的、試行錯誤的に選ばれた方法で行われているが、ここでは1次元の波動方程式を解くことにより、理論に基づいた正しい方法を示す。

キーワード 波動実験, 波動方程式, 三角パルス波, 自由端, 反射

1. はじめに

波動実験用の長いばねには縦波用のものと横波用のものがあり、いずれも学校教育の中でよく利用されているが、ここでは横波用のばねのみを考える。横波の実験としては、定常波、波の重ね合わせ、固定端や自由端での反射などを観察させたり、波の速度を測定したりする演示実験や生徒実験が行われている [1]。この実験を行う際に、パルス波を作ることが多いが、観察しやすいきれいなパルス波の作り方は周知されていない。また、波の反射実験においては、固定端は簡単に作れるが、自由端を作ることは困難であり、通常、ばねに比べて線密度が小さいひもをばねの端に結び付けて疑似的な自由端を作り出している。その際に、ひもの線密度や長さがどの程度であればよいのかも明らかにされていない。

本稿では、パルス波の作り方と疑似的な自由端の作り方について、波動方程式に基づいた議論

* 鹿児島大学教育学部 教授

** 鹿児島大学教育学研究科 大学院生

により、正しい方法を示す。2章ではまず、波動方程式の解法をまとめ、後で必要となる具体例を示す。3章ではパルス波の作り方を示し、4章では近似的に自由端となるためのひもの線密度と長さに対する条件を導き、さらに実際の実験に即したより具体的な分析を行う。最後の5章はまとめと議論に充てられる。

2. 1次元波動方程式の解

2.1 1次元波動方程式の解法

波の進む方向が1方向(x軸方向)に限られる波動を、1次元の波動といい、変位 $u(x,t)$ で表現できる。この変位は、波動媒体の x の位置が、時刻 t に u だけ変位していることを表すものである。横波の場合はこの変位の方向が x 軸と垂直になる。ばね・弦・音波などの場合、波動の媒体の微小部分にニュートンの運動方程式を適用し、変位の勾配が小さいという近似をすると、すべて次の波動方程式になる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 c はそれぞれの媒体に関する定数で表され、波動ばねの横波の場合は線密度 σ と張力 T を使って、

$$c = \sqrt{T/\sigma} \quad (2)$$

となる。(1)式的一般解は、 f, g を任意の関数として、次式の形になる。

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad (3)$$

$f(x-ct)$ は x 軸の正の向きに、 $g(x+ct)$ は負の向きに速さ $c(>0)$ で進む波を表すので、それぞれ進行波、後退波と呼ばれる。つまり一般解は、任意の形の進行波と後退波の重ね合わせになり、波動ばねの横波の速さは(2)式で与えられることがわかる。

無限の媒体の場合、初期値が与えられると、解は具体的に書き下せる。例えば、初期条件として $t=0$ における各点の変位と速度が、

$$u(x,0) = F(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = G(x) \quad (4)$$

のように与えられていると、(1)の解は、

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \{F(x+ct) + F(x-ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(x) dx \quad (5)$$

となる [2]。

ばねや弦の場合は、無限に長いと考えられる場合は少なく、端があるのが普通である。一般に、媒質が変化する場所で、波がどのような振る舞いをするのかを指定する条件を境界条件という。境界条件を使うと、 $F(x), G(x)$ が定義されていない領域での進行波・後退波を求めることができる。

2.2 具体例 両固定端のばねの振動

具体例として, $x=0$ と $x=a$ が固定端であるばねの振動を取り上げる。これは次章で必要となる結果を含んでいるためである。境界条件は $u(0,t)=u(a,t)=0$ であるので, (3) より,

$$u(0,t)=f(-ct)+g(ct)=0 \tag{6a}$$

$$u(a,t)=f(a-ct)+g(a+ct)=0 \tag{6b}$$

となる。まず (6a) から $g(x)=-f(-x)$ であることがわかる。次に (6b) は, $u(a,t)=f(a-ct)-f(-a-ct)=0$ となるから, $-a-ct=z$ と書くと, $f(z+2a)=f(z)$ である。すなわち, $f(z)$ は $2a$ 周期の関数であることになる。

ここで初期条件として, 初期変位 $u(x,0)=F(x)$, 初期速度 $\partial u/\partial t|_{t=0}=0$ の場合を考える。まず前者より,

$$f(x)-f(-x)=F(x) \tag{7}$$

が得られる。また, 速度は $\partial u/\partial t=-cf'(x-ct)+cf'(-x-ct)$ であるから, 後者より $f'(x)=f'(-x)$, したがって, $f(x)=-f(-x)+\text{const.}$ となるが, 定数 const. は 0 としても一般性を失わないので, $f(x)=-f(-x)$ としてよい。すなわち $f(x)$ は奇関数だとわかる。すると (7) より,

$$f(x)=\frac{1}{2}F(x) \quad (0 \leq x \leq a) \tag{8}$$

となる。 $F(x)$ は, 区間 $0 \leq x \leq a$ でしか与えられていないが, $f(x)$ は $2a$ 周期の奇関数であるので, これで全領域で $f(x)$ が決まる。すると, 変位は,

$$u(x,t)=f(x-ct)+f(x+ct) \tag{9}$$

となり, 解が完全に求められたことになる。

ここで初期変位 $F(x)$ が図 1(a) の二等辺三角形の場合を考えると, $f(x)$ も同図に示したように決まる。すると, $f(x-ct)$ と $f(x+ct)$ を合成することによりばねの変位が, 図 1(b)(c) のように変化し, ほとんどの時間で台形になることがわかる。このとき, ばねが x 軸と平行になっている部分だけが速度を持っており, 他の部分は静止している。

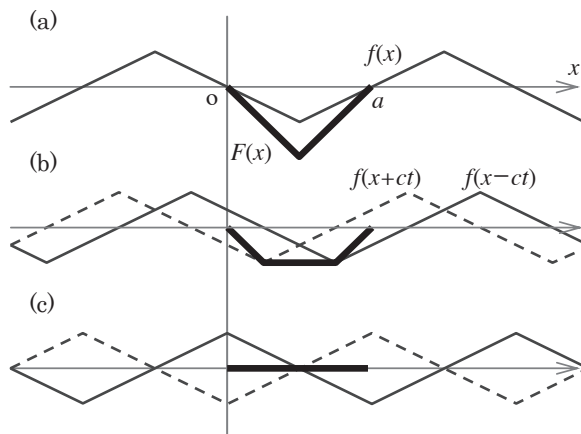


図 1 両端が固定されたばねの例

次章で必要になるので、ばねの動いている部分の速度を求めておく。初期変位 $f(x)$ の頂点の位置を $(a/2, -d)$ とすると、例えば (b) のばねが運動している部分での進行波と後退波は、それぞれ、 $-d/a(x-ct)$, $-d/a(x+ct-a)$ となる。したがって、この部分の速度は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -d/a(-c) + d/a \cdot c = \frac{2dc}{a} \quad (10)$$

となる。特に、(c) の場合は、ばねの変位はすべての部分 $0 \leq x \leq a$ で 0 だが、すべての部分で (10) の速度を持っていることになる。

3. 横波のパルスの作り方

3.1 よく見られる方法

ばねの波の速度を測ったり、固定端での反射を観測したりするには、パルス波を作ることが多い。波動用ばねの両端をスタンド等で固定し、ばねを張った状態にする。ばねを床と接触させると摩擦の影響を受けるが、ある程度線密度が大きい金属のばねであれば、摩擦の影響はさほど問題にならない。線密度が大きい金属のばねは、ゴムやプラスチックばねに比べて、波の速度を遅くできることや、空気抵抗の影響を小さくできるという点で有利である。

さて、固定端を利用してパルス波を作る際に、よく見られる方法は以下のようなものである。図 2(a) のように、点 O を固定端とし、点 A, B を指で支え初速度が 0 の初期変位を作る。この状態で A, B を同時に離すと、三角形のパルス波ではなく、図 2(b) のような波形が出ていく。

なぜ、こうになってしまうのかを図 3 に示している。前章の議論からわかるように、初速 0 で図 2(a) の初期変位を与えると、 $x > 0$ では進行波、 $f(x)$ と後退波、 $g(x)$ は同じ関数形になり、 $x=0$ が固定端であることから、 $f(x)=g(x)$ は図 3(a) の形になる。したがって、進行波 $f(x-ct)$ として $f(x)$ と同じ形のものが出ていくことになる。進行波の変位の最大値は、初期変位の半分

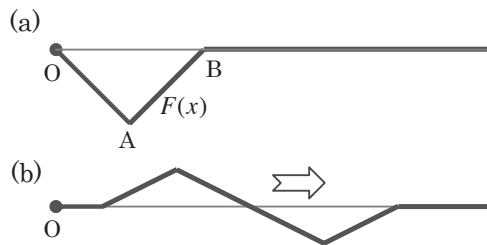


図 2 よく見られるパルス波

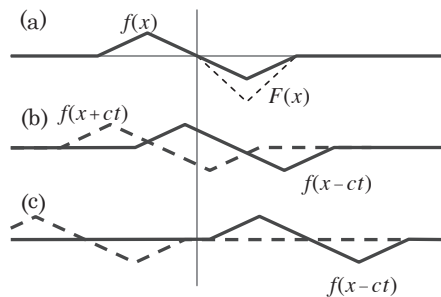


図 3 進行波と後退波

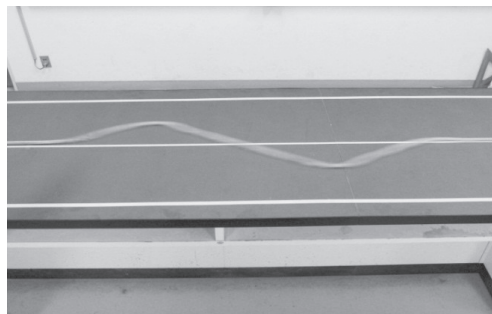


図 4 実際のパルス波の写真

になる。

このようにして実際に作ったパルス波の写真を図4に示している。上下の線は初期変位の高さの位置に引いてある。三角形のパルスにならないだけでなく、最大変位も初期変位の1/2になっていることがわかる。なお、この実験で用いたばねは、巻径1.8 cm, 長さ180 cm, 質量700 gの鋼鉄製のばねで、通常は長さを4~5mに伸ばして使用する。

3.2 三角パルス波の作り方

前節の議論から、きれいな三角パルス波となるためには、進行波 $f(x-ct)$ が図5(a)の形でないといけなことがわかる。すると、 $x=0$ が固定端であることから、後退波 $g(x+ct) = -f(-x-ct)$ の形も図5(a)のように決まる。最初から、動いている三角パルス波を作ることができればよいのだが、これは困難である。そこで、進行波、後退波を、時間的に遡って、作りやすい初期状態を考えることにする。

時間を遡っていくと、図5の(a), (b), (c) となっていくが、初期状態としては(c)の状態を作ればよいことがわかる。(c)の状態では、変位は0であるが、速度を持っているので、この速度を求める。三角パルス波の底辺の長さを $2a$ 高さを d とすると、図5(c)で $t=0$ だとすると、 $0 < x < a$ では $f = -d/a(x-ct-a)$, $g = d/a(x+ct)-d$ であるから、その速度は、

$$v = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2d}{a}c \tag{11}$$

となる。

この状態は、前章2.2の図1(c)の場合と同じである。さらに速度(11)は(10)式と全く同じであるから、この状態を作るには、図1(a)のような三角形の初期変位を作り、両固定端として振動させるとよいことがわかる。

図6に、初期状態から三角パルスが出ていくまでの過程を示す。まず、図6(a)のような初期状態を作る。A, Bの位置の黒丸は、指またはペンのような細い棒を表している。ここで、A点のみを離すことが要点になる。そうすると、同図(b)では両固定端の運動になり、(c)の状態にまで至る。ここで、B端の固定を解除すれば図5(c)の状態

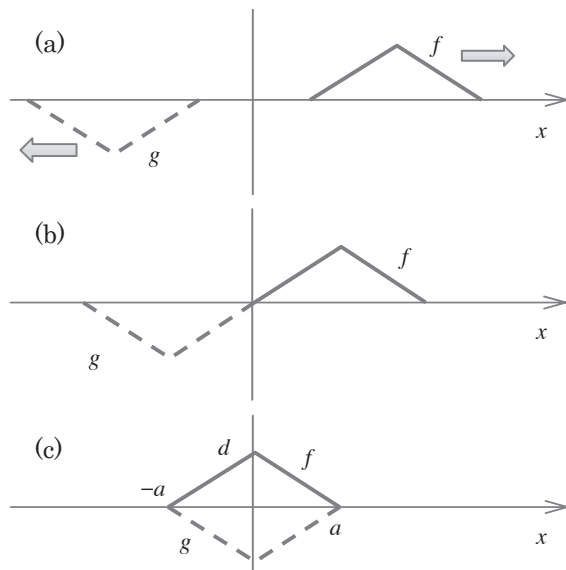


図5 三角パルス波の初期状態

時間を遡ると(c)の状態を作ればよいことがわかる。

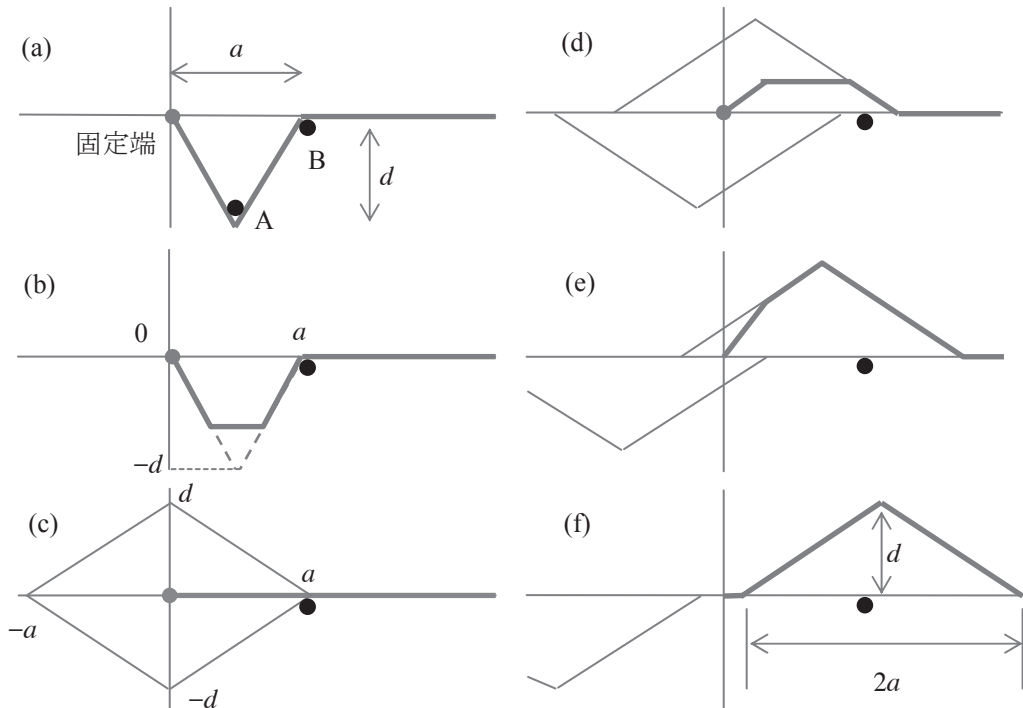


図6 三角パルス波の作り方

(a)でA点のみを離すと、(c)までは両端が固定された運動だが、それ以降はBはばねを全く拘束しない。

になるが、実際にはB点の指または棒はそのまま置いておいてもばねを全く拘束しないことが、図6(c)以降でわかる。

このようにして初期変位と符号は逆だが、同じ高さで幅が2倍のきれいな三角パルス波を作ることができる。A点を解放したときに、B点はそのまましておくことが重要である。A、Bを同時に離す3.1で述べた方法とはわずかに違うだけであるが、結果はこのように大きく異なってくる。

この方法で、実際に作った三角パルス波の写真を図7に示している。上下の線は初期変位の高さ d にとっているのので、作られたパルス波の高さが初期変位の高さと同じであることもわかる。

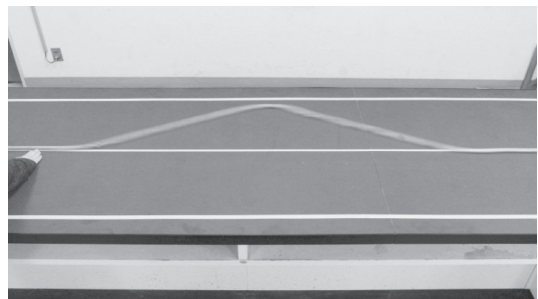


図7 実際のパルス波の写真

3.3 台形パルス波の作り方

三角パルス波の場合と同様に、台形のパルス波の作り方を考えることができる。すなわち、前

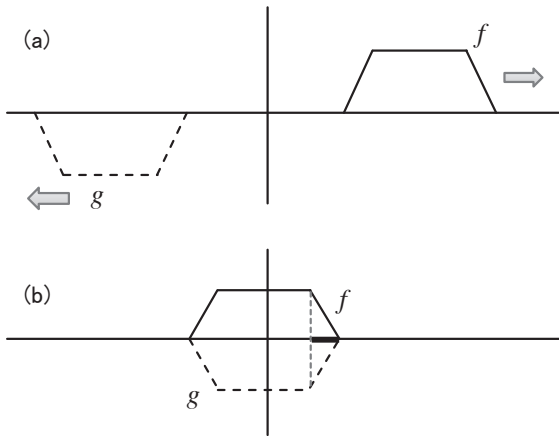


図8 台形パルス波の初期状態

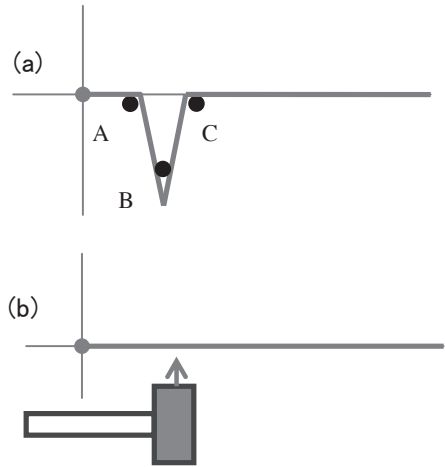


図9 台形パルス波を作る2つの方法

節と同様に、台形の進行波、後退波を時間的に遡って初期状態を求めればよい。

進行波 $f(x-ct)$ と後退波 $g(x+ct)$ は図 8(a) の形になり、初期状態としては図 8(b) の変位や速度を持つ状態を作ればよい。

この状態は、変位が 0 であり、速度を持つ部分は図 8(b) の太線部分である。これを作るためには、前節と同様に考えて、図 9(a) のような初期変位を作り、B 点のみを離す方法がある。この方法は、ばねの狭い範囲を大きく変形させるので、大きい変位を作ると波動ばねを壊してしまう可能性がある。

同様の効果を持つものとしては、図 9(b) のようにばねの一部をハンマーなどで強く打ち出す方法が考えられる。これは、ピアノの弦を振動させる方法と同様である。

図 10 は、固定端の近くをハンマーで叩いたときに観測できた台形パルス波の写真である。図 9(a) の方法でも行ってもほぼ同じ台形のパルス波が作れる。いずれも理論通りの形状が観測できるが、台形の高さは低いものしかできず、高さを三角パルス波の高さと同じ程度にすることは不可能だと思われる。

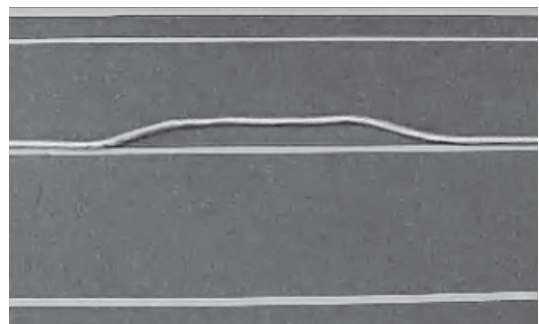


図10 実際のパルス波の写真

4. 自由端の作り方

4.1 疑似自由端の作り方とその定式化

波動ばねの実験では、固定端や自由端で波がどのように反射するのかを観察させることがある。このとき、前章の方法で三角形のパルス波を作れば、きれいな反射波が観測できるだろう。ただし、固定端を作る

ことは簡単であるが、完全な自由端を作ることは事実上不可能である。実際には、ばねの端に軽く長いひもを結び付け、ひもの他端を固定しておけば、ばねとひもの継ぎ目は近似的に自由端とみなせるので、このような方法で実験が行われている。

ここでは、この疑似的な自由端を作る場合に使用するひもの線密度や長さがどの程度であればよいかを、波動方程式を解くことにより分析する。

図 11 のように、長さが l のひもをバネの端 $x=0$ に結び、他端 $x=-l$ は固定する。ばねとひもの張力は共通になるので、これを T とする。

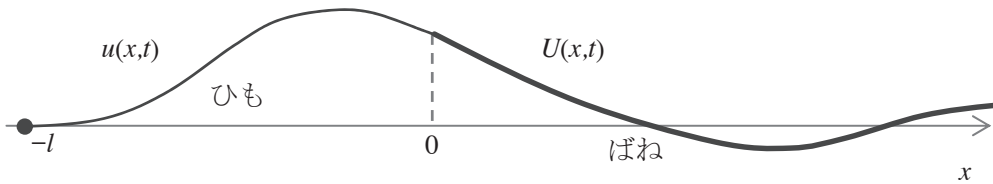


図 11 半無限のばねと一端が固定されたひも

ばねとひもの線密度をそれぞれ σ , σ' とすると、それぞれの横波の速さは、 $c = \sqrt{T/\sigma}$, $c' = \sqrt{T/\sigma'}$ となる。ここで、速度の比を

$$r \equiv c'/c = \sqrt{\sigma/\sigma'} \quad (12)$$

とする。ひもの線密度の方が小さい場合を考えるので、 $r > 1$ となる。

波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (x > 0) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r^2 c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x < 0)$$

であり、 $x=0$ での境界条件は、両側の変位とその勾配が等しいこと、すなわち、

$$U(0,t) = u(0,t) \quad (14a)$$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \quad (14b)$$

となる。

ばねの変位 $U(x,t)$ 、ひもの変位 $u(x,t)$ は、進行波、後退波に分けて書くことができ、

$$U(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \quad (15a)$$

$$u(x,t) = f(x-rc t) + g(x+rc t) \quad (15b)$$

となる。初期条件としては、ひもは変位 0 で静止しており、ばね上を三角パルス波が $x=0$ に向かって来る状態を考える。時刻 $t=0$ に三角パルス波の先端が $x=0$ に達するとすると、ばねの後退波 $G(x+ct)$ は図 12 の $G(x)$ で与えられることになる。

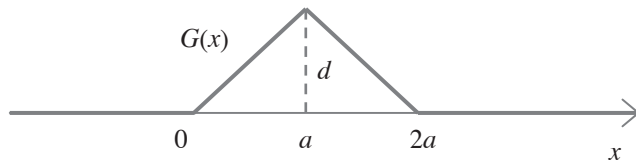


図 12 ばね上の入射波 (後退波)

ばねの後退波 $G(x)$ は x の全領域で与えられているので、これに対する反射波、すなわち進行波 $F(x)$ の形がどうなるかを調べることになる。理想的な自由端であれば、 $F(x) = G(-x)$ であるが、当然これは実現しない。しかし、自由端の場合に近い $F(x)$ になるためには、ひもの線密度や長さをどうすればよいかを調べるのが本章の目的になる。

境界条件としては、(14) の他に、ひもの固定端 $x = -l$ での境界条件もあるが、この問題を一般的に解くのは大変面倒であるし、必ずしも見通しが良くない。そこで、次節ではひものが無限に長い場合、4.3 節ではひもの長さ l は考慮するが、線密度が 0 である場合という 2 つの極限を調べ、前者からは線密度に対する条件を、後者からは長さに関する条件を求めることにする。

4.2 無限に長いひもの場合

ひものが $x = -l$ で固定されていると、そこで反射が起こり、問題が複雑になる。そこで、まず、固定端での反射を考慮する必要が無い、ひものが無限に長い場合を考える。このときは、 $x = 0$ で線密度が変わることにより、ばねの進行波 $F(x)$ とひもの後退波 $g(x)$ の形がどうなるかを調べることになる。なお、初期条件より、 $x < 0$ では $g(x) = 0$ であり、ひもの進行波 $f(x)$ は、固定端からの反射が無いので、恒等的に 0 となる。

$f(x) = 0$ であることを考慮して、式 (15a, b) を境界条件 (14a, b) に代入し、 $x \equiv -ct$ とすると、

$$F(x) + G(-x) = g(-rx) \tag{16a}$$

$$F'(x) + G'(-x) = g'(-rx) \tag{16b}$$

となる。

まず、 $x = 0$ が、後退波 $G(x + ct)$ の最初の立ち上がりから頂点までの間にある場合を考える。これは $0 \leq t \leq a/c$ の時間に相当する。このとき、

$$G(x + ct) = \frac{d}{a}(x + ct) \quad \text{すなわち、} \quad G(x) = kx \tag{17}$$

となる。ここで、

$$k \equiv d/a \tag{18}$$

とした。(17) を (16a, b) に代入しすると、

$$F(x) - kx = g(-rx), \tag{19a}$$

$$F'(x) + k = g'(-rx) \tag{19b}$$

となる。(19a) を x で微分し、 $g'(-rx)$ を消去して $F'(x)$ を求め、 $F(0) = 0$ という初期条件を考慮

すると,

$$F(x) = -\frac{r-1}{r+1}kx \quad (-a < x \leq 0) \quad (20a)$$

が得られる。また, これから,

$$g(x) = \frac{2}{r+1}kx \quad (0 \leq x < ra) \quad (20b)$$

も得られる。

次に, 三角波の後半部が境界を通過する場合を考える。これは, $a/c \leq t < 2a/c$ の時間に相当し, このとき, 境界付近では,

$$G(x) = k(2a - x) \quad (21)$$

であるから, これを (16a, b) に代入し, $F(-a) = (r-1)/(r+1)d$ を考慮すると,

$$F(x) = \frac{r-1}{r+1}k(x+2a) \quad (-2a < x \leq -a) \quad (22a)$$

および,

$$g(x) = \frac{2}{r+1}k(2ra - x) \quad (ra \leq x < 2ra) \quad (22b)$$

が得られる。

最後に, 三角パルス波が境界を通過した後, すなわち $t \geq 2a/c$ の場合は, $G(x) = 0$ を (16a, b) に代入し, $F(-2a) = 0$ を使うと,

$$F(x) = 0 \quad (x \leq -2a) \quad (23a)$$

$$g(x) = 0 \quad (x \geq 2ra) \quad (23b)$$

が得られる。

以上の結果を, 図 13 に示す。境界での反射波の形 $F(x)$ も三角形のパルスになり, その高さは入射波の $R \equiv (r-1)/(r+1)$ 倍になる。 $R < 1$ であるから, 反射波の高さは, 入射波の高さより必ず低くなるのがわかる。 $r \rightarrow \infty$ のとき, すなわちひもの線密度が 0 となる場合にのみ, $F(x) = G(-x)$ となり, 完全な自由端での反射となる。

ちなみに, $r = 1$ のときは, ひもの線密度がばねの線密度と等しい場合で, このときは $F(x) = 0$, $g(x) = G(x)$ となり反射は起こらず, 波はそのまま通過していく。また, $r = 0$ のとき, すなわちひもの線密度が無限大の場合は, $F(x) = -G(-x)$, $g(x) = 0$ となり, 固定端での反射となる。

図 14 に R を r の関数として示したグラフを示す。これは, さまざまな r , したがってさまざまひもの線密度に対する, 反射波の高さと入射波の高さとの比を表している。

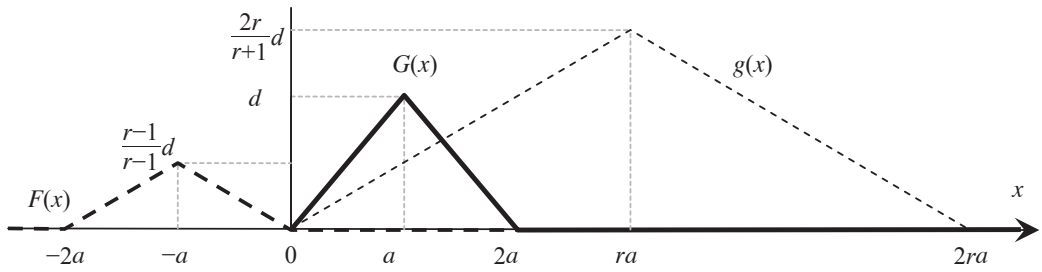


図 13 ばねの進行波 $F(x)$ とひもの後退波 $g(x)$

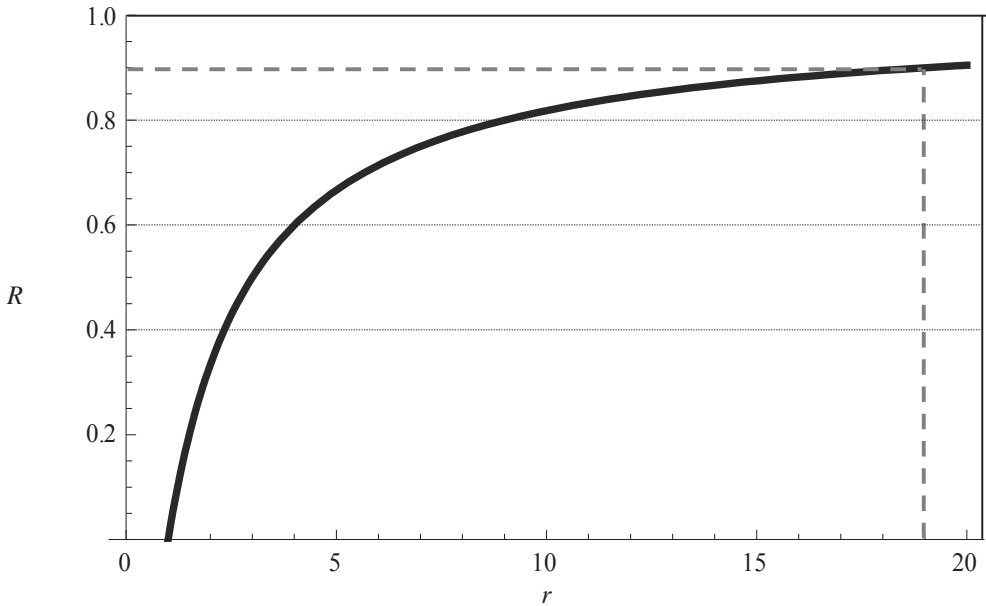


図 14 反射波のピークの高さ $R(r)$

無限に長いひもの場合。 $R \equiv (r-1)/(r+1)$ であり、 r は (12) 式で定義される。

図 13, 14 より, 例えば, 反射波の高さが入射波の 90% より大きくなるためには,

$$R \equiv \frac{r-1}{r+1} > 0.9 \quad \text{すなわち,} \quad r > 19 \tag{24}$$

でなくてはならず, (13) よりひもの線密度は, ばねの線密度の $1/19^2 \approx 2.8 \times 10^{-3}$ 倍より小さくなくてはならないことがわかる。これは, かなり細かいひもを使わなくてはならないことを示している。

このように, ひもの線密度に対する条件を求めることができるが, より具体的なばねやひもについての議論は, 4.4 節で行うことにする。

4.3 ひもの線密度を無視した場合

前節とは別な単純化として、ひもの線密度を無視した場合を考え、これから、ひもの長さに対する条件を導くことにする。ひもの線密度が0であれば、張力をもったひものは曲がることができず、いつも直線になる。ひもの固定端からの反射波 $f(x)$ もあるが、それを合わせて、いつでもひ

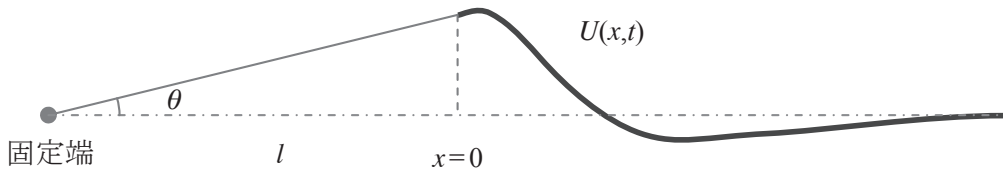


図15 ひもの線密度が0の場合

もの変位 $u(x,t)$ は直線になっている。このため、ひもの波動方程式は考える必要はなく、ばねに対する方程式だけを解けばよい。

また、図15からわかるように、 $\partial u(0,t) / \partial x = U(0,t) / l$ であるから、境界条件(14b)は、

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{U(0,t)}{l} \quad (25)$$

のように、ばねの変位だけで書ける。

(25)に一般解(15a)を代入し、 $x = -ct$ と書き換えると、

$$l\{F'(x) + G'(-x)\} = F(x) + G(-x) \quad (26)$$

となるので、この式で、図12の $G(x)$ を用いて、 $F(x)$ を求めればよい。

具体的な計算は付録に回し、ここでは結果の $F(x)$ だけを示す。

$$F(x) = \begin{cases} k\{x+2l(1-e^{x/l})\} & (-a < x \leq 0) \\ -k(x+2a+2l)+2lk(2e^{a/l}-1)e^{x/l} & (-2a < x \leq -a) \\ -2lk(e^{a/l}-1)^2 e^{x/l} & (x \leq -2a) \end{cases} \quad (27)$$

(27)式で $l \rightarrow \infty$ の極限を考えると、 $F(x) = G(-x)$ となり完全な自由端での反射波になる。また、 $l \rightarrow 0$ の極限では、 $F(x) = -G(-x)$ となり、当然ながら固定端での反射となる。

図16に、(27)式で与えられる反射波の形を示す。ここでは、

$$L \equiv l/a \quad (28)$$

としている。(a)は $F(x)$ の L が 1, 3, 5 のとき、(b)は $F(x)$ の L が 10, 30 のときを表している。図16で、 L が小さすぎると、反射波は負の方向に大きな変位を持つが、これは $L = 0$ のときに $x = 0$ が固定端になってしまうことから予想できる振る舞いである。 $L = 5$ 以上になると反射波の形状は、ほぼ正の変位の三角形に近づいてくる。 L が十分に大きければ、入射パルス波とほぼ同じ形状の反射波となり、自由端とみなせることがわかる。

ここで自由端とみなせるための条件をより定量的に求めるために、反射波 $F(x)$ の $x = -a$ にお

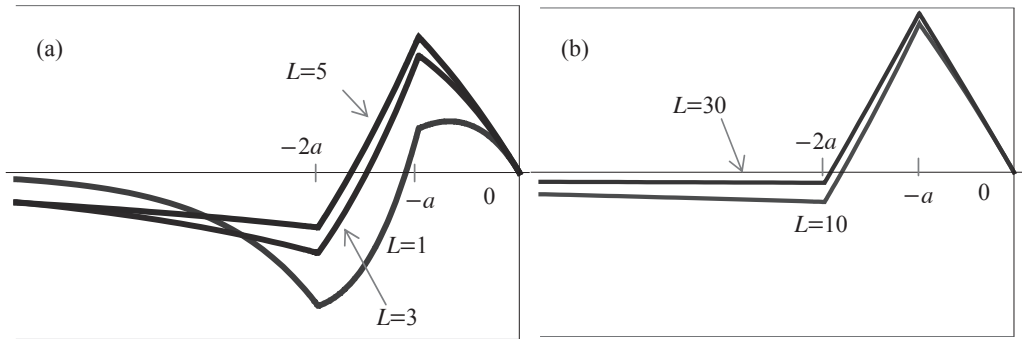


図 16 ばねの反射波 $F(x)$ の形状
 上側の線は入射波の高さ d を表している。

ける高さに注目する。図 16 から $F(-a)$ の値は、 L を大きくするほど入射波の高さ d に近づき、それとともに形も三角形になってくる。そこで、 $H(L) \equiv F(-a)/d$ という関数を定義すると、理想的な自由端であれば $H=1$ であるが、一般的には $H < 1$ となる。この値が 1 に近ければ近いほど、自由端のよい近似となる。(27) 式から、

$$H(L) \equiv F(-a)/d = 2L(1 - e^{-1/L}) - 1 \tag{29}$$

となる。図 17 に、 $H(L)$ のグラフを示す。

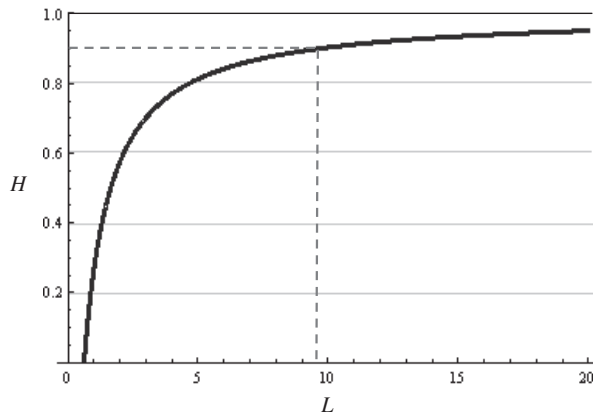


図 17 反射波のピークの高さ $H(L)$
 ひもの線密度が 0, すなわち $r \rightarrow \infty$ の場合。

例えば、 $H(L) > 0.9$ とするには、

$$2L(1 - e^{-1/L}) - 1 > 0.9, \quad \text{すなわち、} \quad L > 9.66 \dots \tag{30}$$

であるから、ひもの長さ l を $10a$ 程度にすればよい。また図 17 のグラフから、 $L \geq 10$ では、 L を大きくしても H の値はあまり変わらないことがわかる。 $H=0.95$ とするには $L \approx 20$ 、 $H=0.98$ とするには $L \approx 50$ でなくてはならない。定性的に自由端での反射を観察するだけの実験であれば、 $L \approx 10$ で十分と思われるが、これでも通常行われている実験よりも長いひもが必要となるだ

ろう。

なお、ここではひもの線密度を0としているが、有限な線密度のひもで $H > 0.9$ とするには、前節(24)の条件 $r > 19$ も必要条件となる。

4.4 具体的なばねとひもに関する条件

前の2節で、三角パルス波に対して疑似自由端とみなせるための条件を、ひもが無限に長い場合、ひもの線密度を無視した場合の2つの極限から検討した。その際に、主に反射波のピークの高さに着目し、その分析から得られた結果は次のようになる。

反射波の高さが入射波の $q (< 1)$ 倍以上となるためには、ひもの横波の速度とばねの横波の速度の比 r は、(24)式より、

$$\frac{r-1}{r+1} \geq q \quad \text{すなわち,} \quad r \geq \frac{1+q}{1-q} \quad (31)$$

でなくてはならず、同時に、ひもの長さがパルス波の半値幅の L 倍であるとすると、(30)式より、

$$2L(1-e^{-1/L})-1 > q \quad (32)$$

も満たさなくてはならない。

表1に上記の2条件から決まる r と L の下限値を示してある。具体的なひもの長さ l は、入射パルス波の半値幅を a とすると、 $l=La$ で与えられる。表1には、 $a=30$ cmとした場合のひもの長さ l も示してある。図16も参照すると、近似的に自由端とみなせるためには少なくとも $L \geq 5$ でなくてはならず、 $L \geq 10$ が望ましいので、最低でも数mの長さのひもが必要になることがわかる。通常行われている実験よりも、ひもをかなり長くしなければならないだろう。

文献[3]では、ひもの長さも線密度も有限な値とした一般的な場合の解が与えられており、 r と L の一方だけを下限値よりも大きくしても全く無意味であり、 $r=2L$ とすればよいことも示されている。表1の r と L もほぼこの関係を満たしており、本稿で扱った簡単な2つの極限からも、同様な結論が導けることがわかる。なお、 r と L の一方だけを表1の値よりも大きくしても無意味ではあるが、結果は悪くはならない。結果は、 r と L の悪い方の条件で規定されることになる。

次に速度比 r についてより

具体的に検討を行う。 r は(12)で定義されるように、ばねとひもの線密度の比で決まる。

表2には、波動実験で使う3種のばねの線密度を示してある。これらのばねは、教材用に市販されているものであり、教育現場でよく使われ

表1 反射波のピークの高さとそれに必要な r と L
ひもの長さ l は、 $a=30$ cmとした場合の値である。

反射波ピーク	r	L	l (m)
70%	5.7	3.0	0.9
75%	7.0	3.7	1.1
80%	9.0	4.7	1.4
85%	12.3	6.3	1.9
90%	19.0	9.7	2.9
95%	39.0	19.7	5.9

るものである。ばねの線密度は、ばねをどの程度引き伸ばして使うかにより変わるが、表2には代表的な値を挙げてある。実際には5割程度異なる線密度になることもあるだろう。

表2 波動実験用ばねの線密度

ばね1とばね2は鋼鉄製、ばね3はプラスチック製である。実験時の長さ線密度は、代表的な値を示しているので5割程度変わることもある。

名称	質量 (kg)	自然長 (m)	実験時の長さ (m)	線密度 (kg/m)
ばね1	0.70	1.8	5.0	0.14
ばね2	0.15	0.7	2.4	0.061
ばね3	0.031	1.25	2.4	0.013

表3 ひもの線密度と各ばねに対する横波の速度比 r

ひもの種類	直径 (mm)	線密度 (kg/m)	速度比 r		
			ばね1	ばね2	ばね3
ロープ	4.2	0.004	6.0	3.9	1.8
タコ糸	1.0	0.0009	12	8.2	3.8
釣り糸	0.37	0.00012	34	22	10
木綿糸 (30番)	0.25	0.000058	49	32	15

また、表3には4種のひもの線密度と、表2の各ばねに対する r の値を示してある。この r を使って、表4にはこれらのひもとばねの組合せで可能な反射波のピークの高さ R とそれを実現するためのひもの長さを示してある。図16より $L < 5$ では、自由端での反射には見えないので、 R が80%未満のものには×印を付けてある。自由端の反射とみなせるのは、○印を付けた R が90%以上のものであろう。したがって、一番軽いプラスチックのばね(ばね3)の場合は、いくら軽くて長い糸を付けても、望む形の反射波は観察できないことになる。また、鋼鉄製のばね1、ばね2でも、相当長い釣り糸か木綿糸を使う必要があることがわかる。

表4 各ばねとひもの組合せで可能な反射波のピークの高さ R

R が80%未満の組合せは自由端の反射の観測ができないので×を、80%以上90%未満のものは△を、90%以上のものは○を付してある。

この R を実現するために必要なひもの長さ l は、パルス波の半値幅を $a = 30$ cmとした場合の値である。

ひも	ばね1		ばね2		ばね3	
	R	$l(m)$	R	$l(m)$	R	$l(m)$
ロープ	71% ×	0.9	59% ×	0.6	29% ×	0.3
タコ糸	85% △	1.9	78% ×	1.3	58% ×	0.6
釣り糸	94% ○	5.2	91% ○	3.4	82% △	1.6
木綿糸	96% ○	7.4	94% ○	4.9	87% △	2.3

一般には、1m程度のひもを付ければ自由端になると思われているようだが、ここで示したように、自由端とみなせるための条件は意外に厳しいことになる。

5. おわりに

本稿では、波動用ばねによる横波を観察する実験において、きれいなパルス波を作る方法と、疑似的な自由端を作る際の条件を、波動方程式を解くことにより検討した。

前者に関しては、理論に基づいて意図した形のパルス波を作り出せることを示した。特に、三角形のパルス波を作るためには、図6(a)において、三角形の頂点Aのみを解放することが重要である。この議論は、ばねの線密度などに無関係であるので、どのようなばねを使った場合にもあてはまることである。

もう一方の、三角パルス波に対して疑似自由端とみなせるための条件については、ひもが無限に長い場合、ひもの線密度を無視した場合という2つの簡単な極限から検討した。その結果は、文献[3]の一般的な場合の計算に基づく結論とほぼ一致している。本稿の結論は、(31)(32)式と表4に集約されるが、文献[3]によると、(32)式の代わりに $L \geq r/2$ とすべきである。実際には、本稿の結論もこれと大差はなく、特に表4のような具体的なばねやひもの議論になると、ばねの線密度の任意性により、両者の差は完全に無視できる程度になる。

自由端での反射を観察するには、表4のように、線密度が大きいばねと、長く線密度が小さい糸が必要であり、本稿では触れなかったが、実際の実験でもほぼその通りの結果が得られる。

1次元の波動方程式を解くことにより、2つの実用的な結果が導き出せ、それが実験的にも確認できたことは、理論的分析の有用性・実用性を改めて示すことになった。他の教材実験においても、基礎理論に基づく分析により実験方法の改善が行えるものが多くあると思われる。

参考文献

1. 例えば、左巻健男・滝川洋二編著、「たのしくわかる物理実験事典」、東京書籍(1998)、pp.157-158
2. J.W.S.Rayleigh “Theory of Sounds”, Dover(1945)
<http://cat.edu.kagoshima-u.ac.jp/text/>の「波動」など。
3. 三仲 啓, 鹿児島大学教育学部研究紀要 自然科学編 Vol.64, pp.43-56, (2013)

付録

ここでは、4.3節の(26)式の境界条件から、解(27)式を導出する過程を示す。

まず、 $x=0$ が、後退波 $G(x+ct)$ の最初の立ち上がりから頂点までの間にある場合は、

$G(x) = kx$ であるから, (26) は,

$$F'(x) = \{F(x) - k(x+l)\} / l \quad (\text{A1})$$

という $F(x)$ に対する微分方程式になる。この解は定数変化法で求めることができ, $F(0) = 0$ という初期条件を考慮すると,

$$F(x) = k\{x + 2l(1 - e^{x/l})\} \quad (-a < x \leq 0) \quad (\text{A2})$$

が得られる。

次に, 三角波の後半部が境界を通過する場合は, $G(x) = k(2a - x)$ であるから, (26) は,

$$F'(x) = \{F(x) + k(x + 2a + l)\} / l \quad (\text{A3})$$

となる。初期条件

$$F(-a) = k\{-a + 2l(1 - e^{-a/l})\} \quad (\text{A4})$$

の下で解を求めると,

$$F(x) = -k(x + 2a + 2l) + 2lk(2e^{a/l} - 1)e^{x/l} \quad (-2a < x \leq -a) \quad (\text{A5})$$

となる。

最後に, 三角波が境界を通過した以後は, $G(x) = 0$ であるから, (26) は,

$$F'(x) = F(x) / l \quad (\text{A6})$$

であり, 初期値は, (A5) で $x = -2a$ とした場合,

$$F(-2a) = -2lk(1 - e^{-a/l})^2 \quad (\text{A7})$$

となる。この解は,

$$F(x) = -2lk(e^{a/l} - 1)^2 e^{x/l} \quad (x \leq -2a) \quad (\text{A8})$$

である。

このようにして得られた (A2), (A5), (A8) が, 本文の (27) 式である。