Matrix 理論の量子的状態の分類について

道　下　洋　二 *

（2014 年 10 月 28 日　受理）

On Classification of Quantum States in Matrix Theory

MICHISHITA Yoji

要約

Matrix 理論として知られる量子力学の状態の分類を行う際に重要になるフェルミオン行列だけで作られた座標非依存状態の構築法や分類法について述べる。

キーワード：弦理論、Matrix 理論

*　鹿児島大学教育学部　准教授

1　はじめに

弦理論の非摂動的定式化はいまだ達成されていない大きな課題であるが、正しい定式化は、5 つある弦理論の摂動的定式化をすべて含む 11 次元の M 理論という形で行われるであろうと予想されている。その M 理論について知られていることはあまり多くないが、その中でも Matrix 理論は M 理論（の一面）を正しく定式化している枠組みであると考えられている。(Matrix 理論については [1, 2, 3] を参照）

この Matrix 理論は $9+1$ 次元超対称 U(N) ゲージ理論を $0+1$ 次元に落とした量子力学として与えられ、$N\to\infty$ で正しい 11 次元の性質を示すが、N が有限の場合でも Discrete Light Cone Quantization (DLCQ) として意味があると思われている。

また広く知られた事実として、ゲージ場とゲージーノのみを含む超対称非可換ゲージ理論は 3,4,6,10 次元でのみ存在する。(2 次元も可能ではあるがポテンシャル項を持たずかなり性質が異なる。）それらを $0+1$ 次元にまで次元を降下させて作った量子力学を以下では $(d+1)$ 模型（$d=2,3,5,9$）と呼ぶことにするが、$d=2,3,5$ のものも Matrix 理論 $(d=9)$ の簡略化したモデルとして研究の対称になる。ただし量子重力としての解釈が可能なのは Matrix 理論のみである。それは無質量モードの散乱振幅の計算から light front の重力相互作用を読み取ると、

$$d=9\ \to\ \frac{v^4}{r^7},\quad d=5\ \to\ \frac{v^2}{r^4},\quad d=3\ \to\ \frac{v^2}{r^4},\quad d=2\ \to\ \frac{v^2}{r^4}$$

となって、正しい r のべき $\int d^dk\frac{e^{ikx}}{k^2}\sim\frac{1}{x^{d-2}}$ を再現するのは $d=9$ のときのみであることからいえる。ちなみに純粋に古典論としてみてみると散乱は起きず、自由粒子同士は相互作用しない。これらの相互作用は 1-loop の計算から読み取られたものである。またゲージ群の U(1) 部分は重心運動を表し、他の運動から分離できるので、以下では特に断らない限りゲージ群は SU(N) とする。

これらの量子力学の顕著な特徴は、エネルギーが連続スペクトラムを持つということである [4]。すなわちエネルギー固有値の範囲は非負実数のすべてにわたる。([4] では $d=9$ において証明しているが、そこに注意されているとおり、その証明法は $d=2,3,5$ の場合、あるいは SU(N) 以外の群に対しても適用可能である。）このことはポテンシャル tr$[X^i,X^j]^2$ が無限遠まで伸びた平坦な方向、すなわち行列が可換な方向、を持つことからも予想できるが、超対称な場合は実際に量子的にもそうなることを示すことができる。(ボゾン的な場合は量子的にはその平坦方向の効果はゼロ点振動によって消されてしまう。）かつてはこのことは 11 次元時空内のの 2 次元膜の力学が持つ「欠陥」として捉えられていたが、現在では逆にこれによって 11 次元の粒子モードの漸近状態を記述できるために利点として捉えられている。

だがこのことはこれらの模型が離散的な、したがって規格化可能なスペクトラムを持つことを否定しない。実際ゼロエネルギー状態については、SU(N) Matrix 理論が N 個の D0-brane の相互作用の量子力学であることから次のように予想されている。

10 次元の D0-brane は 11 次元で見ると 11 番目の方向の KK モードであると考えられるが、例えば 2 単位の KK モードは、1 単位のモードが 2 つある場合と、2 単位のモードが 1 つある場合の 2 通りありえる。この 2 単位のモードは Matrix 理論の中では 2 個の D0-brane の規格化可能なゼロエネルギー束縛状態（threshold bound state）として実現されるはずである。

同様に考えて、SU(N) に対しては、N を正の整数の和に分割する仕方の一つ一つに対応して束縛状態が存在すると予想できる。例えば

$$N=2 \quad \longrightarrow \quad 2,\ 1+1$$

$$N=3 \quad \longrightarrow \quad 3,\ 2+1,\ 1+1+1$$

$$N=4 \quad \longrightarrow \quad 4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$$

$$N=5 \quad \longrightarrow \quad 5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1$$

ここで 1 は自由粒子を表すので束縛状態ではない。また 2 つ以上の整数の和の場合それぞれが漸近的には自由粒子として振舞うので全体としては規格化不可能な状態であろう。規格化可能なのははじめのものだけで、重心運動を分離してあるので、エネルギースペクトラムの中でデルタ関数的に孤立している。$(2+1)$、$(3+1)$、$(5+1)$ 模型にはこのようなゼロエネルギー束縛状態は存在しないと考えられている。

もちろんこれは予想であるので、実際にそうであるかどうかを確かめる必要があるが、それは非常に難しい問題であり、さまざまな角度からの検討が必要になる。ひとつの方向性としては Witten index を計算して予想に反しないかをみることがある [5, 6, 7, 8, 9]。（ただ連続スペクトラムをもつ系に対して Witten index をどう意味づけるかという問題は残るので決定的証拠とは考えられていないようである。）

また [10, 11, 12, 13] では $d=2,3,5,9$ の模型をさらに $0+0$ 次元に落としたいわゆる IKKT 模型において分配関数（すなわち Witten index であり、この場合は経路積分でなく普通の積分で与えられる。）を Monte Carlo 法によって計算し、予想どおりの結果を得ている。

またもっと直接的な方法として、実際に束縛状態の波動関数の構成を試みるやり方がある。残念ながら現在のところこれに成功した例はない。（ポテンシャル項がない $d=1$ の場合は、SU(2) の場合 [14] で、SU(N) の場合 [15] で一般のエネルギー固有値に対して構成されており、それは連続スペクトラムを示す。また D0-D4 束縛状態については [16, 17] を参照）ゼロエネルギーの場合には、超対称な系の常として、ハミルトニアン H は超荷 Q を用いて、$H=Q^\dagger Q+QQ^\dagger$ と書けるので、Schrödinger 方程式の代わりに $Q\psi=0,\ Q^\dagger\psi=0$ を解くことになる。直接これを解くのは難しいが、解の持つ対称性 [31, 33, 35] や漸近形など [21, 23, 26, 27, 29, 43] のさまざまな性質（解があるとしてであるが）が Hoppe らを中心に調べられている。またボルン・オッペンハイマー近似での分析は [39, 40] を見よ。特に顕著な性質として、規格化可能なゼロエネルギー状態は SO(d) 不変である、従ってボゾン的状態である、ということが示されている。

SU(2) ゲージ群では次のことが示されている：$d=2,4,5$ では規格化可能なゼロエネルギー状態は存在しない。$d=9$ ではただひとつ存在すると予想されるが、それは無限遠方（$r\to\infty$）で r^{-6} という漸近形を持っている。ここで r は座標行列の対角成分の大きさである。また原点付近での波動関数、すなわち座標行列で展開した最初の項、はフェルミオン座標のみで作られたゲージ不変量であるが、その具体的な形も知られている。一般の SU(N) ゲージ群においては束縛状態の無限遠方での漸近形は漸近展開を求めるという方法では一意的には決まらず、いくつかの提案がある [43]。

原点付近での波動関数の解析を一般的に行うためにはまずフェルミオン行列 θ^a_α のみから作られた状態（以下では座標非依存状態と呼ぶ。座標行列 X^a_i に依存しないからである。）を構築する必要があるが、それらを回転群×ゲージ群 SO(9)×SU(N) の表現に従って分類するのは非常に煩雑な計算を要する。本稿では特にこれらの座標非依存状態について論じる。第 2 節で基礎的事実を復習した後、第 3 節では表現の重複度だけをより少ない手間で計算するために群論で用いられる指標を座標非依存状態の空間に対して定義し、その一般形を計算する。その指標をさらに SO(9)×SU(N) 指標の和に分解し、係数を読み取ることで重複度が計算できるが、一般の N に対してはその計算も困難であるので、小さい N の値に対してだけいくつかのことが知られている。SU(2) に対しては [42] を見よ。[35, 38] も参考になる。第 4 節で SU(3) について述べる。第 5 節では任意の座標非依存状態から他の任意の座標非依存状態を θ^a_α を演算して作ることができることを示す。補遺 A と B では群論についての必要な知識をまとめてある。

なお参考文献には読者の便宜のため本文中で引用していないものも挙げてある。

2 基礎的事実のまとめ

Matrix 理論の作用をまず書いておこう。読者の便宜のためパラメータ m で平面波変形された形を書いておく。実際に以下で用いるのは $m=0$ の場合だけである。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{g^2}\int dt\,\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2}DX^iDX^i-\frac{1}{2}g^4\left(\frac{m}{6}\right)^2(4(X^I)^2+(X^{I'})^2) \\ &\quad +\frac{g^4}{4}[X^i,X^j]^2-\frac{i}{3}g^4m\epsilon_{IJK}X^IX^JX^K \\ &\quad +\frac{i}{2}g^2\theta D\theta+\frac{i}{8}g^4m\theta\gamma^{123}\theta-\frac{g^4}{2}\theta\gamma^i[X^i,\theta]\Big]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

γ^i は実かつ対称に取った 16×16 の SO(9) ガンマ行列である。また $I=1,2,3$、$I'=4,5,6,7,8,9$ である。以下のリスケールにより g 依存性は作用全体にかかる係数のみにすることもできる。

$$t\to g^{-4/3}t,\quad X\to g^{-2/3}X,\quad \theta\to g^{-1}\theta,\quad m\to g^{-2/3}m. \tag{2.2}$$

しかしそうしないほうがハミルトニアンの g 依存性が簡単になるのでこのままにしておく。共変微分 D は $DX=\partial_tX-i[A_0,X]$ で定義され、共役運動量 $\Pi_i=\frac{1}{g^2}DX^i$ は、ゲージ群の随伴表現の添字を a,b として、次の交換関係

$$[X^i_a,\Pi^j_b]=i\delta_{ij}\delta_{ab} \tag{2.3}$$

を満たす。超対称変換のひとつ、いわゆる dynamical supersymmetry は

$$\delta X^i = i\epsilon\gamma^i\theta, \tag{2.4}$$

$$\delta\theta = -\Pi^i\gamma^i\epsilon + \frac{i}{2}[X^i, X^j]\gamma^{ij}\epsilon + \frac{1}{3}mX_I\gamma^I\gamma^{123}\epsilon - \frac{1}{6}mX_{I'}\gamma^{I'}\gamma^{123}\epsilon, \tag{2.5}$$

$$\delta A_0 = ig^2\epsilon\theta. \tag{2.6}$$

ここで $\epsilon = e^{\frac{1}{12}g^2m\gamma^{123}t}\epsilon_0$ で、ϵ_0 は定数スピノルである。また U(1) 部分の kinematical supersymmetry は

$$\delta\theta = e^{-\frac{1}{4}g^2m\gamma^{123}t}\epsilon_0. \tag{2.7}$$

ゲージ変換の生成子、dynamical supersymmetry の生成子、ハミルトニアンはそれぞれ

$$G = i[X^i, \Pi_i] + \frac{1}{2}\{\theta, \theta\}, \tag{2.8}$$

$$Q = \mathrm{tr}\Big[-\Pi^i\gamma^i\theta - \frac{i}{2}[X^i, X^j]\gamma^{ij}\theta - \frac{1}{6}m(2X^I\gamma^{123}\gamma^I - X^{I'}\gamma^{123}\gamma^{I'})\theta\Big], \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} H = g^2\mathrm{tr}\Big[&\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{6}\right)^2(4(X^I)^2 + (X^{I'})^2) \\ &-\frac{1}{4}[X^i, X^j]^2 + \frac{i}{3}m\epsilon_{IJK}X^IX^JX^K - \frac{i}{8}m\theta\gamma^{123}\theta + \frac{1}{2}\theta\gamma^i[X^i, \theta]\Big]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

$m = 0$ の場合には次の交換関係が成り立つ。

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \frac{2}{g^2}\delta_{\alpha\beta}H + 2\mathrm{tr}\,[X^iG](\gamma^i)_{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

この右辺第 2 項はゲージ不変な物理的状態への作用を考える場合には無視できる。従って通常の超対称代数になっている。これから先は $m = 0$ の場合のみ扱う。

超対称代数の表現についていくつか述べておく。まず U(1) 部分は他の部分と分離され、したがって独自の超対称代数（dynamical と kinematical の両方）を持つことができるが、この dynamical supersymmetry の変換パラメータと SU(N) 部分の変換パラメータは同一のものと考えざるを得ない。なぜなら kinematical supersymmetry で既に 16 個あり、従って dynamical supersymmetry も 16 個ということになるが、U(1) 部分が別でよいとすると 32 個になってしまうからである。ただ解析の便宜として U(1) 部分と SU(N) 部分の超対称代数を分離して考えることも行う。

SU(N) 部分のハミルトニアンの固有状態 $|E\rangle$ ($H|E\rangle = E|E\rangle$) を考えよう。超対称な系なので $E \geq 0$ である。$E = 0$ の場合は $Q_\alpha|E\rangle = 0$ となり、このような状態で規格化可能なもの（SO(9) 不変であることが証明されている。）はただ一つだけ存在すると考えられている。また $E > 0$ の場合は、16 成分の Q_α のうちの $\frac{Q_{1+2i}}{\sqrt{E}}, \frac{Q_{3+4i}}{\sqrt{E}}, ...$ などの 8 個の演算子が生成演算子であるとみなせるので、それらが SO(9) の表現 R の状態 $|R, E\rangle$ に作用すると、$2^8 = 256$ 個の余分な成分が生じ、それらは 44 成分の対称トレースレス表現 (IJ)、84 成分の 3 階反対称表現 $[IJK]$、128 成分のベクトルースピノル表現 αI に分解できる。（その詳細はすぐ後で述べる θ^a_α の場合と同じである。またここでは $I = 1, \ldots, 9$ である。）すなわち $|(IJ) \otimes R\rangle, |[IJK] \otimes R\rangle, |\alpha I \otimes R\rangle$ という形の表現になる。これは M 理論の（DLCQ での）状態の表現について一つの予言を与えている。またいわゆる short multiplet のようなものは（$E = 0$ の場合を除いて）存在しないことにも注意しておこう。

θ^a_α の反交換関係は

$$\{\theta^a_\alpha, \theta^b_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{ab} \tag{2.12}$$

である。$d = 9$ の場合はフェルミオンが 16 成分あるので、先ほどの Q_α と同様に生成消滅演算子の組が 8 つ与えられる。さらにこれらはゲージ群の添字を持つので、波動関数は SU(N) に対して $2^{8(N^2-1)}$ 個の成分に分解される。これは最も小さい SU(2) に対しても莫大な数である。ゲージ不変性の要求をおくといくらかは制限されるであろうが、それでも莫大であることには変わりない。このため数値計算ですら行うことは難しい。

ここではゲージ群の添字は固定して SO(9) の表現がどのように構成されるか考えよう。そうすると $2^8 = 256$ 個の成分は 44 成分の対称トレースレス表現 $|IJ\rangle$、84 成分の 3 階反対称表現 $|IJK\rangle$、128 成分のベクトルースピノル $|\alpha I\rangle$ に分解できる。これらは次を満たす:

$$|II\rangle = 0, \quad (\gamma^I)_{\alpha\beta}\,|\beta I\rangle = 0. \tag{2.13}$$

これらを、弦の Green-Schwarz 作用の量子化でよく用いられる SO(8) の表現から構成してみよう。まず θ_α は γ^9 の 2 つの固有状態に分解できる。それらを $\theta_\alpha, \theta_{\dot\alpha}$ としよう。(SO(9) のスピノルにも SO(8) のスピノルにも同じ α を使っているので混同しないように。) これらはそれぞれ SO(8) の 8+8 表現を構成する。すなわち $|i\rangle\,, |\dot\alpha\rangle$ と $|i\rangle\,, |\alpha\rangle$ であり、次を満たす：

$$\theta_\alpha\,|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^i)_{\alpha\dot\beta}\left|\dot\beta\right\rangle, \quad \theta_\alpha\,|\dot\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^i)_{\alpha\dot\alpha}\,|i\rangle\,, \tag{2.14}$$

$$\theta_{\dot\alpha}\,|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^i)_{\dot\alpha\beta}\,|\beta\rangle\,, \quad \theta_{\dot\alpha}\,|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^i)_{\dot\alpha\alpha}\,|i\rangle\,, \tag{2.15}$$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \left\langle\dot\alpha|\dot\beta\right\rangle = \delta_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{2.16}$$

これら 2 つの表現のテンソル積から SO(9) の表現を構成すると以下のようになる：

$$|ij\rangle = \frac{1}{2}\big(\,|i\rangle\,|j\rangle + |j\rangle\,|i\rangle\,\big) - \frac{1}{6}\delta^{ij}\,|k\rangle\,|k\rangle\,, \tag{2.17}$$

$$|i9\rangle = -\frac{1}{4}(\gamma^9\gamma^i)_{\dot\alpha\beta}\,|\dot\alpha\rangle\,|\beta\rangle\,, \tag{2.18}$$

$$|99\rangle = \frac{1}{3}\,|k\rangle\,|k\rangle\,. \tag{2.19}$$

$$|ijk\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}(\gamma^9\gamma^{ijk})_{\dot\alpha\beta}\,|\dot\alpha\rangle\,|\beta\rangle\,, \tag{2.20}$$

$$|ij9\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\big(\,|i\rangle\,|j\rangle - |j\rangle\,|i\rangle\,\big). \tag{2.21}$$

$$|\alpha i\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^i\gamma^j)_{\alpha\beta}\,|j\rangle\,|\beta\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}\,|i\rangle\,|\alpha\rangle\,, \tag{2.22}$$

$$|\dot\alpha i\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^i\gamma^j)_{\dot\alpha\dot\beta}\left|\dot\beta\right\rangle|j\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}\,|\dot\alpha\rangle\,|i\rangle\,, \tag{2.23}$$

$$|\alpha 9\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^9\gamma^j)_{\alpha\dot\beta}\left|\dot\beta\right\rangle|j\rangle\,, \tag{2.24}$$

$$|\dot{\alpha}9\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^9\gamma^j)_{\dot{\alpha}\beta}\,|j\rangle\,|\beta\rangle\,. \tag{2.25}$$

これらの形は SO(9) の生成子 $M^{IJ} = -\frac{i}{4}\theta\gamma^{IJ}\theta$ に対して正しい変換をすることを要求することによって決定されたものである。

これらの間の非自明な内積は

$$\langle IJ|KL\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{IK}\delta_{JL}+\delta_{JK}\delta_{IL}) - \frac{1}{9}\delta_{IJ}\delta_{KL}, \tag{2.26}$$

$$\langle IJK|LMN\rangle = \delta_L^{[I}\delta_M^{J}\delta_N^{K]}, \tag{2.27}$$

$$\langle \alpha I|\beta J\rangle = \delta^{IJ}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{8}(\gamma^{IJ})_{\alpha\beta}. \tag{2.28}$$

またこれらに対する θ の作用は

$$\theta_\alpha\,|IJ\rangle = -\frac{1}{3}\big[(\gamma^I)_{\alpha\beta}\,|\beta J\rangle + (\gamma^J)_{\alpha\beta}\,|\beta I\rangle\big], \tag{2.29}$$

$$\theta_\alpha\,|IJK\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma^{[IJ})_{\alpha\beta}\,|\beta K]\rangle\,, \tag{2.30}$$

$$\theta_\alpha\,|\beta I\rangle = -\frac{3}{4}(\gamma^J)_{\alpha\beta}\,|IJ\rangle - \frac{\sqrt{3}}{24}(\gamma^{JKL}\gamma^I - 9\delta^{IJ}\gamma^{KL})_{\alpha\beta}\,|JKL\rangle\,. \tag{2.31}$$

ここで $(\gamma^9)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ と取っている。

$(\gamma^i)_{\alpha\beta}$ を実対称に取って上の関係を導いたが、一般には必ずしもそうでなく、エルミートであることのみを要求してある場合は、添字の位置を $(\gamma^i)_\alpha{}^\beta$ と取り、対称な荷電共役行列 $C_{\alpha\beta}$ $(C^{-1}\gamma^i C = {}^t(\gamma^i))$ を導入して、次のようになる。

$$\langle \alpha I|\beta J\rangle = \delta^{IJ}\delta_\beta{}^\alpha + \frac{1}{8}(\gamma^{IJ})_\beta{}^\alpha, \tag{2.32}$$

$$\theta_\alpha\,|IJ\rangle = -\frac{1}{3}\big[(\gamma^I)_\alpha{}^\beta\,|\beta J\rangle + (\gamma^J)_\alpha{}^\beta\,|\beta I\rangle\big], \tag{2.33}$$

$$\theta_\alpha\,|IJK\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma^{[IJ})_\alpha{}^\beta\,|\beta K]\rangle\,, \tag{2.34}$$

$$\theta_\alpha\,|\beta I\rangle = -\frac{3}{4}(\gamma^J C)_{\alpha\beta}\,|IJ\rangle - \frac{\sqrt{3}}{24}[(\gamma^{JKL}\gamma^I - 9\delta^{IJ}\gamma^{KL})C]_{\alpha\beta}\,|JKL\rangle\,. \tag{2.35}$$

ゲージ群の添字を考慮に入れると、上述のような表現が各添字ごとにあることになる。それを $|IJ\rangle_a$ のように書くことにする。（この記法は $|IJ\rangle_a$ が随伴表現として変換するということを意味しないことに注意。）波動関数を構成するときにはゲージ不変性が要求されるが、上述の表現を用いたゲージ不変量の系統的な構成法は知られていない。ひとつ知られていることとして、ゲージ群が SU(2) のときは、以下の量が X_a^i を使わずに構成できる SO(9) 不変なゲージ不変量として唯一のものである：

$$\begin{aligned}&|IJ\rangle_1\,|JK\rangle_2\,|KI\rangle_3\\&-\frac{13}{6}(|IKL\rangle_1\,|JKL\rangle_2\,|IJ\rangle_3 + |IKL\rangle_1\,|IJ\rangle_2\,|JKL\rangle_3 + |IJ\rangle_1\,|IKL\rangle_2\,|JKL\rangle_3).\end{aligned} \tag{2.36}$$

3 SO(9)×SU(N) 指標

$2^{8(N^2-1)}$ 次元の座標非依存状態の空間に、SO(9)×SU(N) のどのような表現が何個現れるかを手っ取り早く計算するために、次のように定義される指標 χ を導入しよう。これは座標非依存状態の空

間上のトレースとして定義され、パラメータ $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ に依存している。

$$\chi = \mathrm{tr}\big[\exp(ix_1 J_{12} + ix_2 J_{34} + ix_3 J_{56} + ix_4 J_{78} + iy_m G^m)\big]. \tag{3.1}$$

$J_{ij} = -\frac{i}{4}\theta^a_\alpha(\gamma_{ij})_{\alpha\beta}\theta^a_\beta$ は SO(9) 生成子、G^m は SU(N) 生成子 $G^a = \frac{i}{2}f_{abc}\theta^b_\alpha\theta^c_\alpha$ のカルタン部分代数を表す。

SO(9)×SU(N) 対称性を破らずには生成消滅演算子を定義できないので、どのような対称性を残すかによって χ のさまざまな計算の仕方があり得る。以下では 3 通りの計算法を与える。

第 1 の方法は SO(9) だけを残す方法である。su(N) 代数をカルタン-ワイル基底 $\{H_m, E_{ij};\ m = 1, 2, \ldots, N-1,\ i, j = 1, 2, \ldots, N,\ i \neq j\}$ で表す。(su(N) に関する記法は補遺 B 参照) 非自明な反交換関係は

$$\{\theta^m_\alpha, \theta^n_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{mn}, \quad \{\theta^{(ij)}_\alpha, \theta^{(kl)}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{il}\delta^{jk}. \tag{3.2}$$

$(\theta^{(ij)}_\alpha)^\dagger = \theta^{(ji)}_\alpha$ に注意せよ。従って $\theta^{(ij)}_\alpha$ は $i > j$ のとき生成演算子、 $i < j$ のとき消滅演算子とみなせる。それに伴う真空 $|0\rangle$ は当然次を満たす。

$$\theta^{(ij)}_\alpha |0\rangle = 0 \quad (i < j). \tag{3.3}$$

θ^m_α が $|0\rangle$ にどう作用するかは後で決めることにする。

G^m は $\theta^{(ij)}_\alpha$ を用いて次のように書ける。

$$G^m = \sum_{i<j}\big[((\nu^j)_m - (\nu^i)_m)\theta^{(ji)}_\alpha\theta^{(ij)}_\alpha + 16(\nu^i)_m\big]. \tag{3.4}$$

$\theta^{(ji)}_\alpha\theta^{(ij)}_\alpha$ は $\theta^{(ij)}_\alpha$ の個数演算子であることに注意せよ。G^m は θ^m_α に依存しないので χ はカルタン部分代数からの寄与 χ_C と昇降演算子からの寄与 χ_L に分けられる。

$$\chi = \chi_C\chi_L. \tag{3.5}$$

まず χ_C について考えよう。それぞれの m について、θ^m_α は独立で、同じ寄与を与えるので、χ_C は単に $\theta^{m=1}_\alpha$ の寄与の $(N-1)$ 乗である。$[G_m, \theta^n_\alpha] = 0$ からそれは SO(9) の対称トレースレス表現、3 階反対称表現、ベクトル−スピノル表現の指標の和になる。

$$\chi_C = (\chi_{44+84+128})^{N-1}, \tag{3.6}$$

$$\chi_{44+84+128} \equiv \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2000]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0010]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1001]}. \tag{3.7}$$

ここでディンキン係数 $[q_1q_2q_3q_4]$ の表現の SO(9) 指標を $\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[q_1q_2q_3q_4]}$ と書いている。これ以降似たような計算を何度も行うことになるので、SO(9) を SO(7)×U(1) に破って $\chi_{44+84+128}$ を得る過程を少し詳しく述べよう。SO(9) 生成子 $J_{12}, J_{34}, J_{56}, J_{78}$ はスピノル表現に対してはそれぞれガンマ行列 $\frac{i}{2}\gamma_{12}, \frac{i}{2}\gamma_{34}, \frac{i}{2}\gamma_{56}, \frac{i}{2}\gamma_{78}$ で表される。これらの行列の固有値は $\pm\frac{1}{2}$ で、$\theta_\alpha \equiv \theta^{m=1}_\alpha$ は固有ベクトル $\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$ に分解される。

$$[J_{12}, \theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}] = -\frac{\epsilon_1}{2}\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}, \quad [J_{34}, \theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}] = -\frac{\epsilon_2}{2}\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4},$$
$$[J_{56}, \theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}] = -\frac{\epsilon_3}{2}\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}, \quad [J_{78}, \theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}] = -\frac{\epsilon_4}{2}\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}. \tag{3.8}$$

ここで $(\theta_{+,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4})^\dagger = \theta_{-,-\epsilon_2,-\epsilon_3,-\epsilon_4}$ であることに注意しよう。($\epsilon_1 = \pm 1$ を単に $\pm$ と書いている。) これらの非自明な交換関係は

$$\{\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}, \theta_{-\epsilon_2'\epsilon_3'\epsilon_4'}\} = \delta_{\epsilon_2,-\epsilon_2'}\delta_{\epsilon_3,-\epsilon_3'}\delta_{\epsilon_4,-\epsilon_4'} \tag{3.9}$$

であり、$\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ は生成演算子、$\theta_{-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ は消滅演算子とみなすことができる。θ_α の $|0\rangle$ への作用は

$$\theta_{-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0\rangle = 0 \tag{3.10}$$

で定義され、このセクターの状態は

$$|0\rangle, \quad \theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0\rangle, \quad \theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\theta_{+\epsilon_2'\epsilon_3'\epsilon_4'}|0\rangle, \quad \ldots, \quad \prod_{i=1}^{8}\theta_{+\epsilon_2^{(i)}\epsilon_3^{(i)}\epsilon_4^{(i)}}|0\rangle \tag{3.11}$$

と与えられる。SO(9) 生成子はこれらの状態に

$$\begin{aligned} J_{12} &= 2 - \frac{1}{2}\#(\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}), & (3.12)\\ J_{34} &= -\frac{1}{2}\#(\theta_{++\epsilon_3\epsilon_4}) + \frac{1}{2}\#(\theta_{+-\epsilon_3\epsilon_4}), & (3.13)\\ J_{56} &= -\frac{1}{2}\#(\theta_{+\epsilon_2+\epsilon_4}) + \frac{1}{2}\#(\theta_{+\epsilon_2-\epsilon_4}), & (3.14)\\ J_{78} &= -\frac{1}{2}\#(\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3+}) + \frac{1}{2}\#(\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3-}) & (3.15)\end{aligned}$$

という形で作用する。$\#(\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4})$ は $\theta_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ の個数演算子である。

ϵ_1 は U(1) 添字とみなせ、$\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$ は SO(7) スピノル添字とみなせる。指標 χ の中の因子 $\exp(ix_2J_{34} + ix_3J_{56} + ix_4J_{78})$ に対する状態 $\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0\rangle$ からの寄与を $\chi(\mathrm{spinor}')$ と書くとこれは SO(7) スピノル表現の指標で与えられる。

$$\chi(\mathrm{spinor}') = \sum_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}. \tag{3.16}$$

ここで $\zeta_i = \exp(\frac{i}{2}x_i)$ である。加えて $\chi((\mathrm{spinor}')^n)$ を

$$\chi((\mathrm{spinor}')^n) = \sum_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n \tag{3.17}$$

で定義する。生成演算子 $\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ が 2 つ以上あるセクターではそれらは $|0\rangle$ の上で反対称に作用するので、それらのセクターからの寄与は SO(7) スピノル表現 spinor$'$ の反対称テンソル積表現の指標で与えられ、それは補遺 A の公式を用いて計算でき、$\chi((\mathrm{spinor}')^n)$ で表される。したがって n 個の $\theta_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ があるセクターからの寄与は

$$\zeta_1^{4-n}\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor}')). \tag{3.18}$$

これらの和が $\chi_{44+84+128}$ であるが、それは (A.3) を用いれば次のように表せる。

$$\begin{aligned} \chi_{44+84+128} &= \sum_{n=0}^{8}\zeta_1^{4-n}\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor}')) \\ &= \zeta_1^4\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}). & (3.19)\end{aligned}$$

この最後の表現は一見 ζ_i 同士の入れ替えに対して対称でないように見えるが、

$$\zeta_1^4\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}) = \zeta_2^4\prod_{\epsilon_1\epsilon_3\epsilon_4}(1 + \zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{-1}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}) \tag{3.20}$$

などが容易に示せることからわかる通り実は対称である。さらに $(\chi_{44+84+128})^2$ は明白に対称な形に

書くことができる。

$$(\chi_{44+84+128})^2 = \prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1+\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}). \tag{3.21}$$

次に昇降演算子からの寄与 χ_L を計算しよう。それぞれの (ij) に対して $\theta_\alpha^{(ij)}$ は独立な寄与を与えるので、1 つの $\theta_\alpha^{(ij)}$ からの寄与を考えその積をとることにする。このセクターは $|0\rangle$ に $\theta_\alpha^{(ij)}$ がいくつかかかった状態からなっている。n 個かかった状態だけの部分セクターは SO(9) スピノル表現の n 個の反対称テンソル積表現 $\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor})$ をなす。従って (3.4) から χ_L への寄与は

$$\exp\left[i((\nu^j\cdot y)-(\nu^i\cdot y))n+16i(\nu^i\cdot y)\right]\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor})) \tag{3.22}$$

であるから

$$\begin{aligned}\chi_L &= \prod_{i<j}\sum_{n=0}^{16}\exp\left[i((\nu^j\cdot y)-(\nu^i\cdot y))n+16i(\nu^i\cdot y)\right]\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor}))\\ &= \prod_{i<j}\sum_{n=0}^{16}(z_i)^{16-n}(z_j)^n\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor}))\end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。z_i は (B.15) で定義されている。

まとめると、χ は次のようになる。

$$\chi = (\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{i<j}\sum_{n=0}^{16}(z_i)^{16-n}(z_j)^n\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor})). \tag{3.24}$$

χ を計算する第 2 の方法を説明しよう。これは $\mathrm{SU}(N)$ を保持するやり方である。$\mathrm{su}(N)$ に対してはエルミートな基底を用い、SO(9) のスピノル表現は (3.8) のように 4 つの符号で表す。非自明な反交換関係は

$$\{\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4},\theta^b_{-\epsilon_2'\epsilon_3'\epsilon_4'}\} = \delta^{ab}\delta_{\epsilon_2,-\epsilon_2'}\delta_{\epsilon_3,-\epsilon_3'}\delta_{\epsilon_4,-\epsilon_4'}. \tag{3.25}$$

$(\theta^a_{+,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4})^\dagger = \theta^a_{-,-\epsilon_2,-\epsilon_3,-\epsilon_4}$ であるから、 $\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ を生成演算子、$\theta^a_{-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ を消滅演算子とみなすことができる。それに付随した真空 $|0'\rangle$ は

$$\theta^a_{-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0'\rangle = 0 \tag{3.26}$$

を満たし、$|0\rangle$ とは次のように関係している。

$$|0'\rangle = \prod_{i>j}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\theta^{(ij)}_{-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0\rangle\,. \tag{3.27}$$

1 つの固定された $(\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)$ に対して、この真空から作られる状態は

$$|0'\rangle,\quad \theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0'\rangle,\quad \theta^{a_1}_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\theta^{a_2}_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0'\rangle,\quad \ldots,\quad \prod_{i=1}^{N^2-1}\theta^{a_i}_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}|0'\rangle\,. \tag{3.28}$$

これらの状態に対して SO(9) 生成子は次のように作用する。

$$J_{12} = 2(N^2-1)-\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}), \tag{3.29}$$

$$J_{34} = -\frac{1}{2}\#(\theta^a_{++\epsilon_3\epsilon_4})+\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+-\epsilon_3\epsilon_4}), \tag{3.30}$$

$$J_{56} = -\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+\epsilon_2+\epsilon_4})+\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+\epsilon_2-\epsilon_4}), \tag{3.31}$$

$$J_{78} = -\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3+})+\frac{1}{2}\#(\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3-}). \tag{3.32}$$

1 つの固定された ϵ_i に対し n 個の $\theta^a_{+\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}$ がかかってできた部分セクターは SU(N) の随伴表現の n 個の反対称テンソル積表現をなす。そして指標内の因子 $e^{iy_mG^m}$ への寄与は $\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint}))$ となる。SO(9) 因子 $\exp(ix_1J_{12}+ix_2J_{34}+ix_3J_{56}+ix_4J_{78})$ のほうは $\zeta_1^{4(N^2-1)}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n$ となる。従って

$$\chi=\zeta_1^{4(N^2-1)}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\sum_{n=0}^{N^2-1}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint})). \tag{3.33}$$

この計算では SO(9) を完全に破ったのではなく、SO(7) 部分群を残している。それは $\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ を対称に扱っていることからわかる。この観点から次の表示も得られる。

$$\chi=\zeta_1^{4(N^2-1)}\sum_{n=0}^{8(N^2-1)}\zeta_1^{-n}\chi(\mathrm{Alt}_n[(\mathrm{SO}(7)\ \mathrm{spinor})\times(\mathrm{SU}(N)\ \mathrm{adjoint})]). \tag{3.34}$$

(3.24) の表示では ζ_i 依存性は SO(9) 指標の中にまとめられている。(3.33) の表示では z_i 依存性は SU(N) 指標の中にまとめられている。χ は ζ_i 同士の入れ替えと z_i 同士の入れ替えに対して不変である。これら 2 つの表示は当然等しくなければならない。実際次のように示すことができる。(同様に (3.34) もこれらに等しいことを示せる。) $\prod_i z_i=1$、$\chi((\mathrm{spinor})^n)=\sum_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n$、(A.3) を用い、(3.24) を書きなおすと、

$$\chi=(\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{i<j}\prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left(z_i+z_j\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right). \tag{3.35}$$

これはさらに次のようになる。

$$\begin{aligned}
\chi &= (\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{i<j}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left(z_i+z_j\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right)\left(z_i+z_j\zeta_1\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right)\\
&= (\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{i<j}\zeta_1^8\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left(z_i+z_j\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right)\left(z_j+z_i\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right)\\
&= \zeta_1^{4(N^2-N)}(\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left(z_i+z_j\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\right).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

これが (3.33) に等しいことを見よう。$\chi((\mathrm{adjoint})^n)=\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^n-1$ と (A.3) を用いて、(3.33) を書きなおすと、

$$\begin{aligned}
\chi &= \zeta_1^{4(N^2-1)}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left[(1+\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^{-1}\prod_{i,j=1}^{N}\left(1+\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\frac{z_j}{z_i}\right)\right]\\
&= \zeta_1^{4(N^2-N)}\left[\zeta_1^{4(N-1)}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1+\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^{N-1}\right]\\
&\quad\times\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\left(1+\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\frac{z_j}{z_i}\right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$\prod_{i,j=1,i\neq j}^N z_i=\left(\prod_{i=1}^N z_i\right)^{N-1}=1$ と (3.19) を用いれば、これが (3.36) に等しいことが直ちに見て取れる。

最後に χ の第 3 の計算法を説明しよう。この方法では (3.35) の表示が得られ、実演算子 θ^a_α による指標が複素演算子の指標の平方根で与えられることがわかる。まずもう 1 組グラスマン奇の演算子

η^a_α を導入し、反交換関係を次のように θ^a_α と同じ形におく。

$$\{\eta^a_\alpha, \eta^b_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}. \tag{3.38}$$

この η^a_α と θ^a_α の両方で記述される系を考えよう。この系は同じ演算子の独立な 2 つのコピーからなるので、(3.1) と同じように定義されたこの系の指標は $(\chi)^2$ で与えられる。この指標を違う方法で計算しよう。$\eta^{\pm a}_\alpha$ を次で定義する。

$$\eta^{\pm a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^a_\alpha \pm i\theta^a_\alpha). \tag{3.39}$$

反交換関係は

$$\{\eta^{+a}_\alpha, \eta^{-b}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{ab} \tag{3.40}$$

となり、$(\eta^{+a}_\alpha)^\dagger = \eta^{-a}_\alpha$ に注意すると、η^{+a}_α を生成演算子とみなせ、付随する真空 $|0''\rangle$ は $\eta^{-a}_\alpha|0''\rangle = 0$ で定義される。この系の状態は

$$|0''\rangle, \quad \eta^{+a}_\alpha|0''\rangle, \quad \eta^{+a_1}_{\alpha_1}\eta^{+a_2}_{\alpha_2}|0''\rangle \quad \ldots \tag{3.41}$$

で与えられる。明らかに n 個の η^{+a}_α がかかった状態は (SO(9) スピノル)× (SU(N) 随伴) 表現の n 個の反対称テンソル積表現となるので、指標は

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{16(N^2-1)} \chi(\mathrm{Alt}_n[(\mathrm{SO}(9)\ \mathrm{spinor}) \times (\mathrm{SU}(N)\ \mathrm{adjoint})]) \\
=& \prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left[(1+\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^{N-1}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\left(1+\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\frac{z_j}{z_i}\right)\right] \\
=& \left[(\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\prod_{i<j}(z_i + z_j\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})\right]^2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ここで (A.3) と次を用いている。

$$\begin{aligned}
&\chi\Big([(\mathrm{SO}(9)\ \mathrm{spinor}) \times (\mathrm{SU}(N)\ \mathrm{adjoint})]^n\Big) \\
&= \chi((\mathrm{SO}(9)\ \mathrm{spinor})^n)\chi((\mathrm{SU}(N)\ \mathrm{adjoint})^n) \\
&= \sum_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\left[\sum_{i,j=1}^{N}\left(\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}\frac{z_j}{z_i}\right)^n - (\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n\right].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

(3.42) は $(\chi)^2$ と等しくなければならない。従って

$$\chi = \pm(\chi_{44+84+128})^{N-1}\prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\prod_{i<j}(z_i + z_j\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}). \tag{3.44}$$

χ の定義から、それは $\zeta_1^{n_1}\zeta_2^{n_2}\zeta_3^{n_3}\zeta_4^{n_4}\prod_i z_i^{m_i}$ という形の項の和でなければならない。従って上の式の複号は＋をとるべきであり、そうすれば (3.35) を得る。この表示は数値計算に便利である。

こうして χ の具体的表示を得たが、ボゾンからの寄与とフェルミオンからの寄与を分離するのにもう 1 つの指標 $\tilde{\chi}$ を導入するのが便利である。これはフェルミオン個数演算子 $(-1)^F$ を加えて定義される。

$$\tilde{\chi} = \mathrm{tr}\big[(-1)^F\exp(ix_1J_{12} + ix_2J_{34} + ix_3J_{56} + ix_4J_{78} + iy_mG^m)\big]. \tag{3.45}$$

そうするとボゾン状態からの寄与は $\frac{1}{2}(\chi+\tilde{\chi})$ で、フェルミオン状態からの寄与は $\frac{1}{2}(\chi-\tilde{\chi})$ で与えられる。上と同様の計算により $\tilde{\chi}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{\chi} &= (\chi_{44+84-128})^{N-1}\prod_{i<j}\sum_{n=0}^{16}(-1)^n(z_i)^{16-n}(z_j)^n\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{spinor})) &(3.46)\\ &= \zeta_1^{4(N^2-1)}\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}\sum_{n=0}^{N^2-1}(-1)^n(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})^n\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint})) &(3.47)\\ &= (\chi_{44+84-128})^{N-1}\prod_{i<j}\prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(z_i-z_j\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4})\,. &(3.48)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\chi_{44+84-128} &\equiv \chi_{[2000]}^{\mathrm{SO}(9)}+\chi_{[0010]}^{\mathrm{SO}(9)}-\chi_{[1001]}^{\mathrm{SO}(9)} &(3.49)\\ &= \zeta_1^4\prod_{\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1-\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}), &(3.50)\\ (\chi_{44+84-128})^2 &= \prod_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4}(1-\zeta_1^{\epsilon_1}\zeta_2^{\epsilon_2}\zeta_3^{\epsilon_3}\zeta_4^{\epsilon_4}). &(3.51)\end{aligned}$$

4 指標の分解

χ の具体的表示を得たので、原理的には座標非依存状態の空間内での SO(9)× SU(N) のそれぞれの表現の重複度は χ と SO(9)×SU(N) 指標との積の積分で計算できる。SO(9)×SU(N) の表現 $R\otimes R'$ の重複度 $N_{R\otimes R'}$ は次で与えられる。

$$N_{R\otimes R'}=\frac{1}{2^4\cdot 4!\cdot N!}\left(\prod_{i=1}^{4}\int_0^{2\pi}\frac{dx_i}{2\pi}\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}\int_0^{2\pi}\frac{dy_i'}{2\pi}\right)|\Delta(0,0,\ldots,0)|^2[D_\rho]^2\left(\chi_R^{\mathrm{SO}(9)}\chi_{R'}^{\mathrm{SU}(N)}\right)^*\chi. \tag{4.1}$$

(D_ρ の定義と SO(9) 指標についての情報は [42] の補遺 B を、SU(N) 指標についての情報と記法については本稿の補遺 B を参照せよ。）しかしながら一般の N に対してこの積分を計算するのは技術的に困難である。(SU(2) に対しては [42] で行われている。）そこでここでは $N=3$ の場合にいくらかのことを述べるにとどめておく。

まず SU(N) の構造を先に見るために、$x_i=0$ とおいて SO(9) の表現を無視しよう。

$$\chi|_{x_i=0}=(256)^{N-1}\prod_{i<j}(z_i+z_j)^{16}=\left[\sum_{n=0}^{N^2-1}\chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint}))\right]^8. \tag{4.2}$$

$\mathrm{Alt}_{N^2-1-n}(\mathrm{adjoint})=\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint})$ に注意せよ。SU(N) の随伴表現は $N-1$ 個の箱のある列と 1 個の箱のある列があるヤング図に対応するので、$\mathrm{Alt}_n(\mathrm{adjoint})$ の中の規約表現はヤング図の箱の数が N の倍数で、高々nN 個のものである。それゆえ χ の中の SU(N) の規約表現はヤング図の箱の数が N の倍数で、高々$8N[(N^2-1)/2]$ 個のものである。

加えて、χ は実であるので、もしある複素表現 μ が χ の中に現れたなら、その複素共役表現 μ^* も同じ重複度で χ の中に現れなければならない。従って $N=3$ の場合に χ は次のように SU(3) 指標

の和に分解される。

$$\chi = \sum_p C^{\mathrm{SO}(9)}_{[pp]} \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[pp]} + \sum_{p_1>p_2} C^{\mathrm{SO}(9)}_{[p_1p_2]} \left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[p_1p_2]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[p_2p_1]} \right). \tag{4.3}$$

係数 $C^{\mathrm{SO}(9)}_{[p_1p_2]}$ はさらに SO(9) 指標の和に分解される。係数の数も SO(9) 分解の項の数も非常に多いので、そのいくらかだけをここでは示す。$A_n \equiv \chi(\mathrm{Alt}_n(\mathrm{SO}(9)\ \mathrm{spinor}))$ とおくと、

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0]} &= (\chi_{44+84+128})^2 \Big[2 - 2A_1 - 2A_1^2 + 2A_1^3 - A_2 + 4A_1A_2 - 2A_1^2A_2 - A_2^2 \\
&\quad -2A_1A_2^2 + 2A_2^3 - A_1^2A_3 + 4A_1A_2A_3 - 2A_2^2A_3 - A_1A_3^2 - 2A_2A_3^2 + 2A_3^3 \\
&\quad -A_2^2A_4 + 4A_2A_3A_4 - 2A_3^2A_4 - A_2A_4^2 - 2A_3A_4^2 + 2A_4^3 - A_3^2A_5 + 4A_3A_4A_5 \\
&\quad -2A_4^2A_5 - A_3A_5^2 - 2A_4A_5^2 + 2A_5^3 - A_4^2A_6 + 4A_4A_5A_6 - 2A_5^2A_6 - A_4A_6^2 \\
&\quad -2A_5A_6^2 + 2A_6^3 - A_5^2A_7 + 4A_5A_6A_7 - 2A_6^2A_7 - A_5A_7^2 - 2A_6A_7^2 + A_7^3 \\
&\quad -A_6^2A_8 + 4A_6A_7A_8 - A_6A_8^2 - 2A_7A_8^2 + A_8^3 \Big],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1]} &= (\chi_{44+84+128})^2 \Big[A_1 + A_1^2 - 4A_1A_2 + A_1^2A_2 + A_1A_2^2 - A_3 + 2A_1A_3 + 2A_2A_3 \\
&\quad -4A_1A_2A_3 + A_2^2A_3 - A_3^2 + A_2A_3^2 - A_1^2A_4 + 2A_1A_2A_4 + 2A_1A_3A_4 - 4A_2A_3A_4 \\
&\quad +A_3^2A_4 - A_1A_4^2 + A_3A_4^2 - A_2^2A_5 + 2A_2A_3A_5 + 2A_2A_4A_5 - 4A_3A_4A_5 + A_4^2A_5 \\
&\quad -A_2A_5^2 + A_4A_5^2 - A_3^2A_6 + 2A_3A_4A_6 + 2A_3A_5A_6 - 4A_4A_5A_6 + A_5^2A_6 - A_3A_6^2 \\
&\quad +A_5A_6^2 - A_4^2A_7 + 2A_4A_5A_7 + 2A_4A_6A_7 - 4A_5A_6A_7 - A_4A_7^2 + 2A_6A_7^2 - A_5^2A_8 \\
&\quad +2A_5A_6A_8 + 2A_5A_7A_8 - 2A_6A_7A_8 - A_7^2A_8 - A_5A_8^2 + A_7A_8^2 \Big],
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\vdots$$

$$C^{\mathrm{SO}(9)}_{[18,12]} = (\chi_{44+84+128})^2[-A_1 + A_2], \tag{4.6}$$

$$C^{\mathrm{SO}(9)}_{[15,15]} = (\chi_{44+84+128})^2[-A_1 + A_1^2], \tag{4.7}$$

$$C^{\mathrm{SO}(9)}_{[17,14]} = (\chi_{44+84+128})^2[-1 + A_1], \tag{4.8}$$

$$C^{\mathrm{SO}(9)}_{[16,16]} = (\chi_{44+84+128})^2. \tag{4.9}$$

これらは以下のように分解される。

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0]} &= 1454\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,0]} + 7052\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,0]} + 18618\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,0]} + 32741\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,0]} + 11654\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,1]} \\
&\quad +17602\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,0]} + 71084\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,2,0,0]} + 133771\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,2,0]} + 41999\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,2]} \\
&\quad +59135\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1,0,0]} + 113075\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,1,0]} + 49999\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,1]} \\
&\quad +174731\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,1,0]} + 101653\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,1]} + 124707\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,1]} + \ldots,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1]} &= 9688\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,0]} + 50184\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,0]} + 130775\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,0]} + 227953\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,0]} \\
&\quad +82509\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,1]} + 122492\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,0]} + 494595\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,2,0,0]} + 925826\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,2,0]} \\
&\quad +295132\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,2]} + 414849\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1,0,0]} + 791836\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,1,0]} + 350419\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,1]} \\
&\quad +1217450\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,1,0]} + 711146\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,1]} + 871545\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,1]} + \ldots,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[17,14]} &= \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,0]} + 9\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,0]} + 12\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,0]} + 13\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,0]} + 12\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,1]} \\
&\quad +7\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,0]} + 7\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,2,0,0]} + 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,2,0]} + 17\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,2]} \\
&\quad +16\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1,0,0]} + 21\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,1,0]} + 22\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,1]} \\
&\quad +13\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,1,0]} + 24\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,1]} + 18\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,1]} + \dots, \qquad (4.12) \\
C^{\mathrm{SO}(9)}_{[16,16]} &= 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,0]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,0]} + 4\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,0]} + 5\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,0]} + 4\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,1]} \\
&\quad +3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,0]} + 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,2,0,0]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,2,0]} + 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,2]} \\
&\quad +4\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1,0,0]} + 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,1,0]} + 6\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,1]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,1,0]} + 6\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,1]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,1,1]} \\
&\quad +\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[3,0,0,0]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,0,0,3]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,1,0,0]} + 3\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,1,0]} + 4\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,1]} \\
&\quad +5\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,0,2]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[0,1,0,2]} + 4\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,1,0,1]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[1,0,1,1]} \\
&\quad +\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[4,0,0,0]} + 2\chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[3,0,0,1]} + \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[2,0,0,2]}. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

ここでは $C^{\mathrm{SO}(9)}_{[16,16]}$ に対して完全な分解を与えた以外は、SO(9) の小さい表現に対してのみ重複度を与えてある。

逆の順序での分解を考えよう。すなわち χ をまず SO(9) 指標の和に分解する。

$$\chi = \sum_{q_1,q_2,q_3,q_4} C^{\mathrm{SU}(N)}_{[q_1q_2q_3q_4]} \chi^{\mathrm{SO}(9)}_{[q_1q_2q_3q_4]}. \qquad (4.14)$$

それから係数 $C^{\mathrm{SU}(N)}_{[q_1q_2q_3q_4]}$ を SU(3) 指標の和に分解する。ここでも SU(3) 表現の大きいものと小さいものに対する分解を示すにとどめておく。

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{SU}(3)}_{[0000]} &= 1454\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,0]} + 9688\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,1]} + 10675\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,3]}\right) + 26701\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,2]} \\
&\quad +29082\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,4]}\right) + 18200\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[6,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,6]}\right) + 46967\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,3]} \\
&\quad +47932\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[5,2]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,5]}\right) + 35052\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[7,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,7]}\right) + 62539\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,4]} \\
&\quad +\cdots + 12\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[15,15]} + \left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[17,14]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[14,17]}\right) + 3\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[16,16]}, \qquad (4.15) \\
C^{\mathrm{SU}(3)}_{[1000]} &= 7052\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,0]} + 50184\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,1]} + 55347\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,3]}\right) + 136539\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,2]} \\
&\quad +149257\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,4]}\right) + 91733\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[6,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,6]}\right) + 239606\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,3]} \\
&\quad +244005\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[5,2]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,5]}\right) + 176838\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[7,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,7]}\right) + 315507\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,4]} \\
&\quad +\cdots + 34\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[15,15]} + 9\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[17,14]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[14,17]}\right) + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[16,16]}, \qquad (4.16) \\
C^{\mathrm{SU}(3)}_{[0100]} &= 18618\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,0]} + 130775\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,1]} + 143489\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,3]}\right) + 355004\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,2]} \\
&\quad +386153\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,4]}\right) + 236909\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[6,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,6]}\right) + 618696\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,3]} \\
&\quad +627175\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[5,2]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,5]}\right) + 452338\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[7,1]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,7]}\right) + 809566\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[4,4]} \\
&\quad +\cdots + 58\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[15,15]} + 12\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[17,14]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[14,17]}\right) + 4\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[16,16]}, \qquad (4.17) \\
C^{\mathrm{SU}(3)}_{[0010]} &= 32741\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,0]} + 227953\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[1,1]} + 249542\left(\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[3,0]} + \chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[0,3]}\right) + 617831\chi^{\mathrm{SU}(3)}_{[2,2]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +669996\left(\chi^{SU(3)}_{[4,1]}+\chi^{SU(3)}_{[1,4]}\right)+410378\left(\chi^{SU(3)}_{[6,0]}+\chi^{SU(3)}_{[0,6]}\right)+1072119\chi^{SU(3)}_{[3,3]} \\
& +1083538\left(\chi^{SU(3)}_{[5,2]}+\chi^{SU(3)}_{[2,5]}\right)+778736\left(\chi^{SU(3)}_{[7,1]}+\chi^{SU(3)}_{[1,7]}\right)+1396518\chi^{SU(3)}_{[4,4]} \\
& +\cdots+76\chi^{SU(3)}_{[15,15]}+13\left(\chi^{SU(3)}_{[17,14]}+\chi^{SU(3)}_{[14,17]}\right)+5\chi^{SU(3)}_{[16,16]}, \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{SU(3)}_{[0001]} \;=\; & 11654\chi^{SU(3)}_{[0,0]}+82509\chi^{SU(3)}_{[1,1]}+90569\left(\chi^{SU(3)}_{[3,0]}+\chi^{SU(3)}_{[0,3]}\right)+224518\chi^{SU(3)}_{[2,2]} \\
& +244893\left(\chi^{SU(3)}_{[4,1]}+\chi^{SU(3)}_{[1,4]}\right)+150760\left(\chi^{SU(3)}_{[6,0]}+\chi^{SU(3)}_{[0,6]}\right)+393010\chi^{SU(3)}_{[3,3]} \\
& +399774\left(\chi^{SU(3)}_{[5,2]}+\chi^{SU(3)}_{[2,5]}\right)+289737\left(\chi^{SU(3)}_{[7,1]}+\chi^{SU(3)}_{[1,7]}\right)+517511\chi^{SU(3)}_{[4,4]} \\
& +\cdots+52\chi^{SU(3)}_{[15,15]}+12\left(\chi^{SU(3)}_{[17,14]}+\chi^{SU(3)}_{[14,17]}\right)+4\chi^{SU(3)}_{[16,16]}, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

(4.10) と (4.15) から、SO(9)×SU(N) 不変な状態は 1454 個存在することが分かる。$N=2$ のときは 1 個だけであったのとは状況が違うことになる。

5 座標非依存状態間の関係

もっとも単純な表現に属する SO(9) 不変かつゲージ不変な状態を用いて、他の任意の状態をそれに θ^a_α をかけることで構築できるとしたら便利であるが、それが可能であることを以下のように証明することができ、さらに任意の表現から他の任意の表現を構成できることもわかる。

それを示す準備として、まずグラスマン奇の生成消滅演算子の有限個の組 $(\psi_i^\dagger,\psi_i)$ からなる一般の系を考えよう。反交換関係は $\{\psi_i,\psi_j^\dagger\}=\delta_{ij}$ で与え、真空 $|0\rangle$ は $\psi_i|0\rangle=0$ で定義する。A を生成演算子から作られた演算子として、$|*\rangle=A|0\rangle$ という状態を考えよう。もし $BA|0\rangle=|0\rangle$ を満たす演算子 B が存在すれば、$|0\rangle=B|*\rangle$ であるので、任意の状態を $|*\rangle$ に演算子をかけて構築することができることになる。どのような状態も $|0\rangle$ から生成演算子をかけて構築できるからである。

もし A が次のような n 個の生成演算子の積の線形結合で書けたとする。

$$A=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_1<i_2<\cdots<i_n}} C_{i_1i_2\ldots i_n}\psi^\dagger_{i_1}\psi^\dagger_{i_2}\cdots\psi^\dagger_{i_n}. \qquad (5.1)$$

このとき B を見出すのは容易である。

$$B=\frac{\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_1<i_2<\cdots<i_n}}(C_{i_1i_2\ldots i_n})^*\psi_{i_n}\psi_{i_{n-1}}\cdots\psi_{i_1}}{\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n\\ i_1<i_2<\cdots<i_n}}|C_{i_1i_2\ldots i_n}|^2}. \qquad (5.2)$$

もし A が異なる数の生成演算子の積の線形結合で書かれていたとすると、その場合の (5.2) と同様な形の物を考えても B を与えることはできない。それは (5.2) の中の消滅演算子の数が少ない項が A の中のどれかの項の生成演算子を除き切れないからである。

これを踏まえて元の問題に戻る。$|\phi\rangle$ を J_{12} を作用させると消える状態であるとする。SU(N)×SO(9) 不変な状態はそのような状態のひとつである。(3.10) で決まる真空 $|0\rangle$ をとると、J_{12} の固有値は $|0\rangle$

の上の生成演算子の数だけで決まり、$|\phi\rangle$ は $4(N^2-1)$ 個の生成演算子を $|0\rangle$ にかけた状態の線形結合である。

$$|\phi\rangle = \sum_{\sigma\in I_{4(N^2-1)}} C_\sigma \Theta_+^\sigma |0\rangle\,. \tag{5.3}$$

ここで C_σ は係数であり、I_n は次のような添字のペアの集合である。

$$I_n := \{(a_1,\dots,a_n;\epsilon_2^{(1)},\dots,\epsilon_2^{(n)};\epsilon_3^{(1)},\dots,\epsilon_3^{(n)};\epsilon_4^{(1)},\dots,\epsilon_4^{(n)})|a_i=1,\dots,N^2-1,\epsilon_j^{(i)}=\pm\}. \tag{5.4}$$

そして $\sigma=(a_1,\dots,a_n;\epsilon_2^{(1)},\dots,\epsilon_2^{(n)};\epsilon_3^{(1)},\dots,\epsilon_3^{(n)};\epsilon_4^{(1)},\dots,\epsilon_4^{(n)})$ に対して

$$\Theta_+^\sigma := \theta^{a_1}_{+\epsilon_2^{(1)}\epsilon_3^{(1)}\epsilon_4^{(1)}}\cdots\theta^{a_n}_{+\epsilon_2^{(n)}\epsilon_3^{(n)}\epsilon_4^{(n)}} \tag{5.5}$$

と定義してある。ただし σ の中の添字のペアは常に辞書式順序で並んでいるとする。

$\sigma,\sigma'\in I_n$ に対して $\{(\Theta_+^\sigma)^\dagger,\Theta_+^{\sigma'}\}|0\rangle$ がゼロでないのは $\sigma=\sigma'$ のときのみであり、

$$\{(\Theta_+^\sigma)^\dagger,\Theta_+^{\sigma'}\}|0\rangle = \delta_{\sigma,\sigma'}|0\rangle\,. \tag{5.6}$$

先ほどの議論をこの系に適用すると、$|*\rangle=|\phi\rangle$、$A=\sum_{\sigma\in I_{4(N^2-1)}} C_\sigma\Theta_+^\sigma$ として、

$$B=\frac{\sum_{\sigma\in I_{4(N^2-1)}}(C_\sigma)^*(\Theta_+^\sigma)^\dagger}{\sum_{\sigma\in I_{4(N^2-1)}}|C_\sigma|^2} \tag{5.7}$$

となり、どのような状態も $|\phi\rangle$ に θ を作用させて作ることができることになる。$|\phi\rangle$ が $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ 不変であるとき、できた状態 $|\phi'\rangle$ は再び $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ 不変であってもよい。従って $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ 不変な状態が複数あっても、それらはそのうちのどれかひとつから構築できる。

SO(9) のボゾン的な表現、すなわちスピノル添字を含まない、ベクトル添字のテンソル積で構成できる規約表現には、必ず $J_{12}=0$ となる状態が含まれている。それは J_{12},J_{91},J_{29} が SO(3) 部分代数をなし、そのスピンが整数であるからである。そのような状態に対しては上と同様の議論が成り立つ。すなわちそのような状態を $|\phi\rangle$ として、何らかの演算子 O を用いて $|\phi'\rangle=O|\phi\rangle$ として任意の状態 $|\phi'\rangle$ を作ることができる。$|\phi'\rangle$ は必ずしもボゾン的表現である必要はない。$J_{12}=0$ でない状態は同じ表現内の $J_{12}=0$ の状態に $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ 群の変換演算子（これも θ からなり、その逆変換も存在する）を作用させて作ることができることに注意すると、任意の表現に属する状態が、任意のボゾン的表現の任意の状態に θ からなる演算子を作用させて作ることができることが分かる。

$|\phi\rangle$ がフェルミオン的表現、すなわち 1 個のスピノル添字といくつかのベクトル添字とのテンソル積で構成できる表現の場合は、$|\phi\rangle$ を $|\phi_{\alpha A}\rangle$ と表す（A はベクトル添字の集まり）と、$\theta_\alpha^a|\phi_{\alpha A}\rangle$ はボゾン的表現であるので、上と同じ議論を適用して、任意の状態をこの状態から作ることができる。

まとめると、任意の表現に属する任意の状態 $|\phi'\rangle$ を、他の任意の表現に属する状態 $|\phi\rangle$ に θ からなる演算子 O を作用させて、必要なら O と $|\phi\rangle$ の中の添字の縮約等を行って、$|\phi'\rangle=O|\phi\rangle$ と構成することができる。（$|\phi'\rangle$ と $|\phi\rangle$ の両方が $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ の表現であるから、O も $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{SO}(9)$ の表現になっていることになる。）

補遺

A 反対称積表現の指標

表現 R の指標 $\chi(R)$ は群の元 g の R におけるトレースをとることで定義される：$\chi(R) = \mathrm{tr}_R(g)$。さらに $\chi(R^k)$ を $\chi(R^k) = \mathrm{tr}_R(g^k)$ で定義する。そうすると n 個の R の反対称テンソル積表現 $\mathrm{Alt}_n(R)$ の指標は次の式で計算できる。

$$\chi(\mathrm{Alt}_n(R)) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^n k i_k = n \\ i_k:\text{nonnegative integer}}} (-1)^{n+\sum_{k=1}^n i_k} \prod_{k=1}^n \frac{[\chi(R^k)]^{i_k}}{i_k! \cdot k^{i_k}}. \tag{A.1}$$

ここではボゾン状態とフェルミオン状態はどちらも正の寄与を与えているものとする。もしフェルミオン状態が負の寄与を与えるとしたなら上の式の符号因子 $(-1)^{n+\sum_{k=1}^n i_k}$ は $(-1)^{\sum_{k=1}^n i_k}$ に変更される。もし n が R の次元より大きければ、期待される通り上の式はゼロとなる。これらの指標の生成母関数は次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\dim R} a^n \chi(\mathrm{Alt}_n(R)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} \chi(R^n)\right). \tag{A.2}$$

これを plethystic exponential と呼ぶこともある。$\chi(R^n)$ はしばしば $\chi(R^n) = \pm\sum_i b_i^n$ という形で与えられるので、その場合を計算しておこう：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\dim R} a^n \chi(\mathrm{Alt}_n(R)) &= \prod_i \exp\left(\mp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ab_i)^n}{n}\right) \\ &= \prod_i \exp\left(\pm \log(1+ab_i)\right) \\ &= \prod_i (1+ab_i)^{\pm 1}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

B SU(N) 表現と指標

$su(N)$ リー代数のカルタン部分代数 $\{H_m;\ m = 1, 2, \ldots, N-1\}$ は対角トレースレス $N \times N$ 行列で与えられる。例えば

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\} m & & & & \\ & -m & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

これらは $\mathrm{tr}(H_m H_n) = \delta_{mn}$ を満たす。カルタン - ワイル基底は次のように与えられる。

$$\{H_m, E_{ij};\ m = 1, 2, \ldots, N-1,\ i, j = 1, 2, \ldots, N,\ i \neq j\}. \tag{B.2}$$

ここで E_{ij} は (i,j) 成分が 1 である以外は成分がすべて 0 である行列である。これらの交換関係は

$$[H_m, H_n] = 0, \quad [H_m, E_{ij}] = ((\nu^i)_m - (\nu^j)_m)E_{ij}, \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \tag{B.3}$$

ここで

$$\nu^i = ((H_1)^i{}_i,\ (H_2)^i{}_i,\ \ldots,\ (H_{N-1})^i{}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{B.4}$$

は基本表現の重みである。$\sum_{i=1}^N \nu^i = 0$ であり、(B.3) の最後の式の右辺は H_m を含み得ることに注意。それは E_{ii} が対角であり H_m の和として書けるからである。

通常用いられるエルミートな基底 $\{T^a;\ a = 1, 2, \ldots, N^2-1\}$ を取ろう。もちろん $(T^a)^\dagger = T^a$ であり、さらに $\mathrm{tr}(T^aT^b) = \delta^{ab}$ を満たすものが次で与えられる。

$$\{T^a;\ a = 1, 2, \ldots, N^2-1\} = \{H_m, E^+_{ij}, E^-_{ij};\ m = 1, 2, \ldots, N-1,\ 1 \le i < j \le N\}. \tag{B.5}$$

ここで

$$E^+_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}), \quad E^-_{ij} = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji}). \tag{B.6}$$

以下のことが成り立つことに注意する。

$$\sum_{i,j}(E_{ij})^k{}_l(E_{ji})^{k'}{}_{l'} = \delta^k{}_{l'}\delta^{k'}{}_l, \quad \sum_{m=1}^{N-1}(H_m)^i{}_j(H_m)^{i'}{}_{j'} = \delta^i{}_j\delta^{i'}{}_{j'}\left(\delta^{ii'} - \frac{1}{N}\right). \tag{B.7}$$

これらより T^a は $\sum_a (T^a)^i{}_j(T^a)^{i'}{}_{j'} = \delta^i{}_{j'}\delta^{i'}{}_j - \frac{1}{N}\delta^i{}_j\delta^{i'}{}_{j'}$ を満たす。

$su(N)$ の元 θ^aT^a の展開にはさまざまな表示がある。θ^m、$\theta^{(\pm ij)}$、$\theta^{(ij)}$ を次のように定義する。

$$\theta^aT^a = \sum_{m=1}^{N-1}\theta^mH_m + \sum_{i<j}(\theta^{(+ij)}E^+_{ij} + \theta^{(-ij)}E^-_{ij}) \tag{B.8}$$

$$= \sum_{m=1}^{N-1}\theta^mH_m + \sum_{i\neq j}\theta^{(ij)}E_{ij}. \tag{B.9}$$

$su(N)$ の基本の重み μ^i は

$$\mu^i = \sum_{k=1}^{i}\nu_k \quad (i = 1, \ldots, N-1) \tag{B.10}$$

であり、最高の重みはこれらの非負整数係数による線形結合で表される。最高の重み $\mu = \sum_{i=1}^{N-1} q_i\mu^i$ の表現のディンキン係数は $[q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}]$ である。これはヤング図の i 番目の行の箱の数 ℓ_i と以下のように関係している。

$$\ell_i = \sum_{k=i}^{N-1} q_k, \quad \ell_N = 0. \tag{B.11}$$

表現 $[q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}]$ の次元は

$$\dim\,[q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}] = \prod_{1\le i<j\le N}\left(1 + \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i}\right) \tag{B.12}$$

で、この表現の指標 $\chi^{\mathrm{SU}(N)}_{[q_1,q_2,\ldots,q_{N-1}]}$ は

$$\chi^{\mathrm{SU}(N)}_{[q_1,q_2,\ldots,q_{N-1}]} = \mathrm{tr}_{[q_1,q_2,\ldots,q_{N-1}]}(e^{iG^my_m}) = \frac{\Delta(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N)}{\Delta(0, 0, \ldots, 0)} \tag{B.13}$$

であり、

$$\Delta(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N) = \det(z_j^{\ell_i+N-i}), \tag{B.14}$$

$$z_i = e^{iy'_i}, \quad y'_i = \nu^i \cdot y = \sum_{i=1}^{N-1} (\nu^i)_m y_m \tag{B.15}$$

である。z_i あるいは y'_i は互いに独立ではないこと、すなわち $\prod_{i=1}^N z_i = 1$ と $\sum_{i=1}^N y'_i = 0$ に注意せよ。

$\Delta(0,0,\ldots,0)$ はよく知られた Vandermonde 行列式

$$\Delta(0,0,\ldots,0) = \prod_{1\le i<j\le N} (z_i - z_j) \tag{B.16}$$

であり、

$$|\Delta(0,0,\ldots,0)|^2 = \prod_{i\neq j} (z_i - z_j) \tag{B.17}$$

は次の直交性関係の積分測度を与える。

$$\frac{1}{N!}\left(\prod_{i=1}^{N-1}\int_0^{2\pi}\frac{dy'_i}{2\pi}\right)|\Delta(0,0,\ldots,0)|^2 \left(\chi^{\mathrm{SU}(N)}_{[q'_1,q'_2,\ldots,q'_{N-1}]}\right)^* \chi^{\mathrm{SU}(N)}_{[q_1,q_2,\ldots,q_{N-1}]} = \delta_{q_1,q'_1}\delta_{q_2,q'_2}\ldots\delta_{q_{N-1},q'_{N-1}}. \tag{B.18}$$

$[q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}]$ の複素共役表現は $[q_{N-1}, q_{N-2}, \ldots, q_1]$ であり、その指標は $[q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}]$ の指標の複素共役で与えられる。

参考文献

[1] T. Banks, "*Matrix Theory*", `hep-th/9710231`, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **67** (1998) 180.

[2] T. Banks, "*TASI Lectures on Matrix Theory*", `hep-th/9911068`.

[3] W. Taylor, "*M(atrix) Theory: Matrix Quantum Mechanics as a Fundamental Theory*", `hep-th/0101126`, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 419.

[4] B. de Wit, M. Luscher and H. Nicolai, "*The Supermembrane Is Unstable*", *Nucl. Phys.* **B320** (1989) 135.

[5] P. Yi, "*Witten Index and Threshold Bound States of D-branes*", `hep-th/9704098`, *Nucl. Phys.* **B505** (1997) 307.

[6] S. Sethi and M. Stern, "*D-Brane Bound States Redux*", `hep-th/9705046`, *Commun. Math. Phys.* **194** (1998) 675.

[7] M. Porrati and A. Rozenberg, "*Bound states at threshold in supersymmetric quantum mechanics*", `hep-th/9708119`, *Nucl. Phys.* **B515** (1998) 184.

[8] M. B. Green and M. Gutperle, "*D-particle bound states and the D-instanton measure*", `hep-th/9711107`. *JHEP* **9801** (1998) 005.

[9] G. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, "*D-particle bound states and generalized instantons*", hep-th/9803265, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000) 77.

[10] W. Krauth, H. Nicolai and M. Staudacher, "*Monte Carlo Approach to M-Theory*", hep-th/9803117, *Phys. Lett.* **B431** (1998) 31.

[11] W. Krauth and M. Staudacher, "*Finite Yang-Mills Integrals*", hep-th/9804199, *Phys. Lett.* **B435** (1998) 350.

[12] W. Krauth and M. Staudacher, "*Eigenvalue Distributions in Yang-Mills Integrals*", hep-th/9902113, *Phys. Lett.* **B453** (1999) 253.

[13] W. Krauth, J. Plefka and M. Staudacher, "*Yang-Mills Integrals*", hep-th/9911170, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1171.

[14] M. Claudson and M. B. Halpern, "*Supersymmetric Ground State Wavefunctions*", *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 689.

[15] S. Samuel, "*Solutions of Extended Supersymmetric Matrix Models for Arbitrary Gauge Groups*", hep-th/9705167, *Phys. Lett.* **B411** (1997) 268.

[16] S. Sethi, M. Stern, "*Invariance Theorems for Supersymmetric Yang-Mills Theories*", hep-th/0001189, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000) 487.

[17] S. Sethi, M. Stern, "*The Structure of the D0-D4 Bound State*", hep-th/0002131, *Nucl. Phys.* **B578** (2000) 163.

[18] J. Froehlich and J. Hoppe, "*On Zero-Mass Ground States in Super-Membrane Matrix Models*", hep-th/9701119, *Commun. Math. Phys.* **191** (1998) 3.

[19] J. Hoppe, "*On the Construction of Zero Energy States in Supersymmetric Matrix Models*", hep-th/9709132; "*On the Construction of Zero Energy States in Supersymmetric Matrix Models II*", hep-th/9709217; "*On the Construction of Zero Energy States in Supersymmetric Matrix Models III*", hep-th/9711033.

[20] J. Hoppe and S.-T. Yau, "*Absence of Zero Energy States in Reduced SU(N) 3d Supersymmetric Yang Mills Theory*", hep-th/9711169.

[21] G. M. Graf and J. Hoppe, "*Asymptotic Ground State for 10 Dimensional Reduced Supersymmetric SU(2) Yang Mills Theory*", hep-th/9805080.

[22] J. Hoppe and S.-T. Yau, "*Absence of Zero Energy States in the Simplest* $d = 3 (d = 5?)$ *Matrix Models*", hep-th/9806152.

[23] J. Froehlich, G. M. Graf, D. Hasler, J. Hoppe and S.-T. Yau, "*Asymptotic Form of Zero Energy Wave Functions in Supersymmetric Matrix Models*", `hep-th/9904182`, *Nucl. Phys.* **B567** (2000) 231.

[24] J. Hoppe, V. Kazakov and I. K. Kostov, "*Dimensionally Reduced SYM*$_4$ *as Solvable Matrix Quantum Mechanics*", `hep-th/9907058`, *Nucl. Phys.* **B571** (2000) 479.

[25] M. Bordemann, J. Hoppe and R. Suter, "*Zero Energy States for SU(N): A Simple Exercise in Group Theory ?*", `hep-th/9909191`.

[26] J. Hoppe, "*Asymptotic Zero Energy States for SU(N greater or equal 3)*", `hep-th/9912163`.

[27] J. Hoppe and J. Plefka, "*The Asymptotic Groundstate of SU(3) Matrix Theory*", `hep-th/0002107`.

[28] G. M. Graf, D. Hasler and J. Hoppe, "*Vanishing index for supersymmetric 2-matrix model with odd dimensional gauge group*", `hep-th/0205285`.

[29] D. Hasler and J. Hoppe, "*Asymptotic Factorisation of the Ground-State for SU(N)-invariant Supersymmetric Matrix-Models*", `hep-th/0206043`.

[30] J. Hoppe, "*Membranes and Matrix Models*", `hep-th/0206192`.

[31] D. Hasler and J. Hoppe, "*Zero Energy States of Reduced Super Yang-Mills Theories in* $d+1 = 4, 6$ *and 10 dimensions are necessarily Spin(d) invariant*", `hep-th/0211226`.

[32] J. Hoppe and D. Lundholm, "*On the Construction of Zero Energy States in Supersymmetric Matrix Models IV*", `arXiv.org:0706.0353 [hep-th]`.

[33] V. Bach, J. Hoppe and D. Lundholm, "*Dynamical Symmetries in Supersymmetric Matrix Models*", `arXiv.org:0706.0355 [hep-th]`, *Doc. Math.* **13** (2008) 103.

[34] J. Hoppe, D. Lundholm and M. Trzetrzelewski, "*Octonionic twists for supermembrane matrix models*", `arXiv.org:0803.1316 [hep-th]`, *Annales Henri Poincare* **10** (2009) 339.

[35] J. Hoppe, D. Lundholm and M. Trzetrzelewski, "*Construction of the Zero-Energy State of SU(2)-Matrix Theory: Near the Origin*", `arXiv.org:0809.5270 [hep-th]`, *Nucl. Phys.* **B817** (2009) 155.

[36] J. Hoppe, D. Lundholm and M. Trzetrzelewski, "*Spin(9) Average of SU(N) Matrix Models I. Hamiltonian*", `arXiv.org:0809.5271 [hep-th]`, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 043510.

[37] M. Hynek and M. Trzetrzelewski, "*Uniqueness of the coordinate independent Spin(9)×SU(2) state of Matrix Theory*" arXiv:1004.3397 [hep-th].

[38] M. Trzetrzelewski, "*The number of gauge singlets in supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics*", arXiv:0708.2946 [hep-th], *Phys. Rev.* **D76** (2007) 085012.

[39] M. B. Halpern and C. Schwartz, "*Asymptotic Search for Ground States of SU(2) Matrix Theory*", `hep-th/9712133`, *Int. J. Mod. Phys.* **A13** (1998) 4367.

[40] A. Konechny, "*On Asymptotic Hamiltonian for SU(N) Matrix Theory*", `hep-th/9805046`, *JHEP* **018** (1998) 9810.

[41] Y. Michishita, "*On gauge transformation property of coordinate independent SO(9) vector states in SU(2) Matrix Theory*", arXiv:1008.2580 [hep-th], *JHEP* **09** (2010) 075.

[42] Y. Michishita, "*Counting SO(9)×SU(2) representations in coordinate independent state space of SU(2) Matrix Theory*", arXiv:1009.3256 [math-ph], *J. Math. Phys.* **52** (2011) 092102.

[43] Y.-H. Lin and X. Yin, "*On the Ground State Wave Function of Matrix Theory*", arXiv:1402.0055 [hep-th].