

中央集中荷重方式による木材曲げ試験体の応力分布とたわみ

—はりの初等曲げ理論の精度について—

大 草 克 己
(森林土木学研究室)

Stress Distribution and Deflection in the Bending Wood Specimen Subjected to the Central Concentrated Load

—On the Accuracy of the Elementary Bending Theory—

Katsumi OKUSA
(Laboratory of Forest Civil Engineering)

1. 緒 言

木材の各種の強度試験のうち、静的曲げ試験は試験体の作製、荷重の負荷、変形(たわみ)の測定などがきわめて正確かつ容易に行われるので、もっともしばしば実行されている。しかも、いわゆる2点荷重方式で、荷重と同時に純曲げ区間におけるはりの上縁および下縁の線ひずみを測定すれば、簡単な計算で、木材の基本的かつ独立な力学的性質である引張および圧縮に関する諸特性値を求め得るという利点もある。^{1,2)}

現行の規格化されている木材の静的曲げ試験、JIS Z 2122³⁾、ASTM D 143⁴⁾等では、Fig. 1に示されるような長方形断面(幅： b 、高さ： h)の直線はりの両端近くを単純に支持し、スパン($L=2\ell$)の中央に集中荷重(P)を加える方式で行われる。

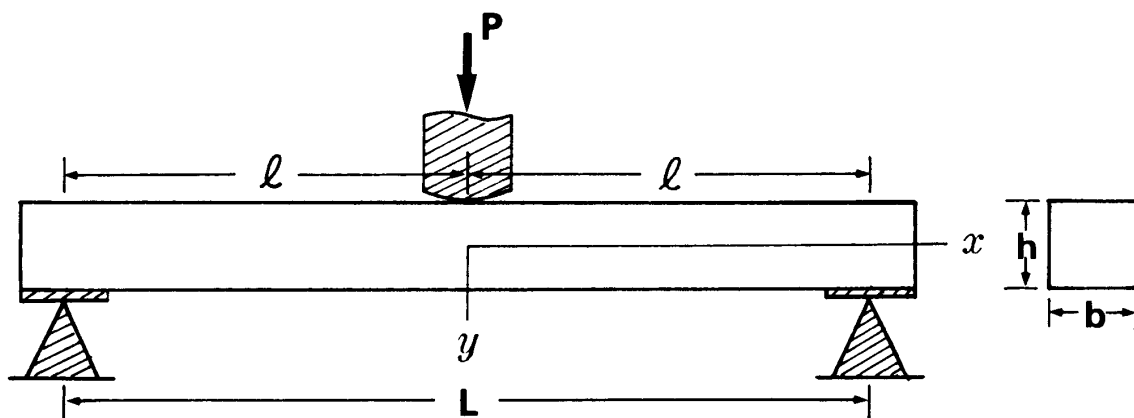


Fig. 1. Bending test under concentrated load at middle span.

試験体内部に生じる垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} については、比例限内において、いわゆる材料力学のはり理論⁵⁾に基づく(1)式および(2)式が適用される。

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y = \frac{6P}{bh^3}(\ell - x)y \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{S}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{3P}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (2)$$

M: 曲げモーメント, S: せん断力, $I = bh^3/12$: 断面の慣性モーメント

スパン中央の全たわみ δ_0 , 曲げたわみ δ_b , せん断による付加たわみ δ_s の計算には(3), (3-1), (3-2)式が適用される。

$$\delta_0 = \delta_b + \delta_s = \frac{PL^3}{48 E_x I} \left(1 + 1.2 \frac{E_x}{G_{xy}} \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (3)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{48 E_x I} = \frac{PL^3}{4 E_x b h^3} \quad (3-1),$$

$$\delta_s = \frac{PLh^2}{40 G_{xy} I} = \frac{3PL}{10 G_{xy} b h} \quad (3-2)$$

E_x : X 方向のヤング率, G_{xy} : X, Y 軸に関するせん断弾性係数

Fig. 1 にみられるように、この試験体にはその軸(x 軸)に垂直な y 方向の荷重が負荷されるので、加重点および支点の近傍には当然に垂直応力 σ_y が発生する。したがって(1), (2)式で表される σ_x , τ_{xy} の分布に乱れが生じ、はりのたわみについても(3)式で計算される δ_0 からのかい離が生じる。その程度は主としてスパン一はりたけ比(L/h)に依存すると考えられるから、実際に曲げ試験が行われる可能性のある範囲について、より正確な有限要素解を求め、材力公式(1), (2), (3)の精度を吟味した。また、木材は著しい異方体であるので、等方体はりとの比較も一部試みた。

次節以下で具体的な数量値が示されるとき、長さの単位はmm, 力の単位はkgfである。

II. はり問題における有限要素解の精度

構造解析をはじめとする多くの理工学的問題の数値解析の手法としてきわめて有効な有限要素法は、要素内の変位関数に、隣接要素との境界上で連続性を保持する関数を用いるときには、要素分割をこまかくしていった極限において完全な厳密解に収束することが知られている。⁸⁾⁹⁾

文献 10)におけると同じ要素を用い、はりにおける要素分割と解の精度について文献 11)で若干の吟味を行ったが、それを参考にし、Fig. 2 の直交異方体の片持はりについてさらに検討を加えた。

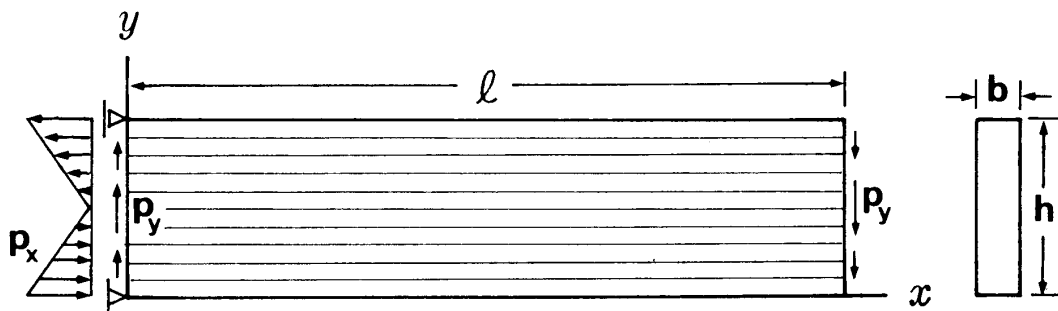


Fig. 2. Orthotropic cantilever loaded at the free end.

木材(直交異方体)の弾性主軸(X, Y)を Fig. 2 のように直交座標軸(x, y)と平行におくと, 2次元弾性問題に対する Airy の応力関数 $\phi(x, y)$ の支配方程式は(4)式となる。¹⁰⁾

$$k_1^2 k_2^2 \partial^4 \phi / \partial x^4 + (k_1^2 + k_2^2) \partial^4 \phi / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \phi / \partial y^4 = 0 \quad (4)$$

$$k_1^2 k_2^2 = E_x / E_y \quad (4-1)$$

$$k_1^2 + k_2^2 = E_x / G_{xy} - 2\mu_{xy} \quad (4-2)$$

E_y : Y 方向のヤング率

μ_{xy} : X 方向の垂直応力による, X, Y 方向ひずみに関するポアソン比

(4)式に対して

$$\phi = (6P/bh^3) (\ell - x) (y^3/3 - hy^2/2) \quad (5)$$

は明らかにその解であり, この応力関数から導かれる応力成分は

$$\sigma_x = (6P/bh^3) (\ell - x) (2y - h) \quad (6)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = -(6P/bh^3) (h - y)y \quad (8)$$

となり,¹¹⁾ これに対応するひずみ成分($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$)は, 平面応力状態を仮定すると

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x = (6P/bh^3 E_x) (\ell - x) (2y - h) \quad (9)$$

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y = -(6\mu_{xy} P / bh^3 E_x) (\ell - x) (2y - h) \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = -(6P/bh^3 G_{xy}) (h - y)y \quad (11)$$

となる。ただし u は x 方向, v は y 方向の変位である。

(6), (7), (8)の応力式を Fig. 2 の $\ell \times h$ の領域に適用すると, 力(表面力: p_x, p_y)に関する境界条件は

$$\begin{aligned} y=0, y=h : p_x=0, p_y=0 \\ x=\ell : p_x=0, p_y=\tau_{xy}; \int_0^h b p_y dy = -P \\ x=0 : p_x = -(6P/bh^3) \ell (2y-h) \\ p_y = -\tau_{xy}; \int_0^h b p_y dy = P \end{aligned} \quad (12)$$

となって, Fig. 2 に示されている状態と一致する。

(9)式を x について, また, (10)式を y について積分し, その結果を(11)式に代入し, さらに次の変位条件

$$x=0, y=0 : u=v=0; x=0, y=h : u=0 \quad (13)$$

を与えると, 変位は次の(14), (15)式となる。

$$\begin{aligned} u = (P/bh^3 E_x) \{ 3(2\ell x - x^2)(2y - h) \\ + (E_x/G_{xy} - \mu_{xy})(h^2 y - 3hy^2 + 2y^3) \} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v = -(P/bh^3 E_x) \{ 6\mu_{xy}(\ell - x)(y^2 - hy) \\ + (E_x/G_{xy} - \mu_{xy})h^2 x + 6\ell x^2 - 2x^3 \} \end{aligned} \quad (15)$$

Fig. 2 で $\ell = 200$, $h = 20$, $b = 1$ とし, $0 < x < 20$ および $190 < x < 200$ の区間では, 大きさ 1×1 , $22 < x < 188$ の区間では, 大きさ 2×2 の正方形要素とし, 両区間の間を三角形要素(2×2 の正方形領域を, その左または右, いずれか一方の垂直辺の中心に節点をもつような3個の三角形要素に分割し, 計算の結果得られた各三角形要素の応力値から, その面積を重みとする平均値を求め, それをもとの正方形図心位置の応力とする)で連結し, 要素総数 1490(節点総数 1596)に分割した。

$x=0$ の境界上で, 下から i 番目の節点に

$$(p_x)_i = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} (6P/bh^3) \ell (2y - h) dy$$

$$(p_y)_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} (6P/bh^3)(h-y)ydy$$

$x = \ell$ の境界上で、同じく下から i 番目の節点に

$$(p_x)_i = 0$$

$$(p_y)_i = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} (6P/bh^3)(h-y)ydy$$

で定まる節点力を与える。上式で i は 1 から 21 までであり、

$$y_i = i - 1.5, \quad y_{i+1} = i + 0.5$$

ただし、 $i=1$ では $y_1=0$ 、 $i=21$ では $y_{21}=20$ とする。

また、変位については、 $(x=0, y=0)$ の節点、および $(x=0, y=h)$ の節点に、それぞれ(13)式で定められる節点変位を与えて有限要素解を求めた。剛性方程式の解法には共役傾斜法¹⁸⁾を用い、各反復における残差の絶対値最大の値が(節点荷重の絶対値最大値) $\times 10^{-7}$ 以下になるところで計算を打ち切ることとした。(14)式および(15)式で、 $x = \ell$ 、 $y = 0$ とし、その点の変位を \bar{u} 、 \bar{v} とすると

$$\bar{u} = -3P\ell^2/bh^2E_x \quad (16)$$

$$\bar{v} = -(P\ell/bh^3E_x)[(E_x/G_{xy} - \mu_{xy})h^2 + 4\ell^2] \quad (17)$$

となる。等方体では、 $E_x = E_y = E$ 、 $G_{xy} = G$ 、 $\mu_{xy} = \mu$ となり、さらに

$$E/G = 2(1 + \mu)$$

の関係があるから(16)、(17)式はそれぞれ

$$\bar{u} = -3P\ell^2/bh^2E \quad (18)$$

$$\bar{v} = -(P\ell/bh^3E)[(2 + \mu)h^2 + 4\ell^2] \quad (19)$$

となる。

$$E_x = 750, \quad E_y = 30, \quad G_{xy} = 35, \quad \mu_{xy} = 0.60$$

として¹⁰⁾得られた有限要素解は

$$\bar{u}_{FEM} = -0.39972 \quad \textcircled{1} \quad \bar{v}_{FEM} = -5.6056 \quad \textcircled{2}$$

であった。それに対して(16)式および(17)式による弾性論的厳密解は

$$\bar{u}_{EXACT} = -0.4 \quad \textcircled{3} \quad \bar{v}_{EXACT} = -5.6110 \quad \textcircled{4}$$

となり、(FEM)/(EXACT)は

$$\textcircled{1}/\textcircled{3} = 0.99930 \quad \textcircled{2}/\textcircled{4} = 0.99904$$

となる。

等方体を対象に

$$E = 500, \quad G = 200, \quad \mu = 0.25$$

としたときの有限要素解は

$$\bar{u}_{FEM} = -0.59740 \quad \textcircled{5} \quad \bar{v}_{FEM} = -8.0111 \quad \textcircled{6}$$

厳密解は(18)、(19)式から

$$\bar{u}_{EXACT} = 0.6 \quad \textcircled{7} \quad \bar{v}_{EXACT} = -8.045 \quad \textcircled{8}$$

となり、

$$\textcircled{5}/\textcircled{7} = 0.99567 \quad \textcircled{6}/\textcircled{8} = 0.99579$$

となった。

Fig. 2 の要素分割を行った後、各節点の x 座標を

$$x(n) \leftarrow x(n) \times 75/200, \quad n=1, 2, 3, \dots, 1596$$

として、一様に x 座標値を短縮し、スパンを 200 から 75 にした後の直交異方体での解は

$$\bar{u}_{FEM} = -0.024941 \quad \textcircled{9} \quad \bar{v}_{FEM} = -0.15188 \quad \textcircled{10}$$

厳密解は

$$\bar{u}_{\text{EXACT}} = -0.025 \quad (11) \quad \bar{v}_{\text{EXACT}} = -0.15276 \quad (12)$$

となり

$$\textcircled{9}/\textcircled{10} = 0.99764 \quad \textcircled{10}/\textcircled{12} = 0.99424$$

を得た。

以上の結果から、このような分割と方法による有限要素解は完全な厳密解に対して、誤差1%以内の精度をもつ十分に正確な近似値であると考えることが出来る。

III. 中央集中荷重を受ける曲げ試験体の応力分布

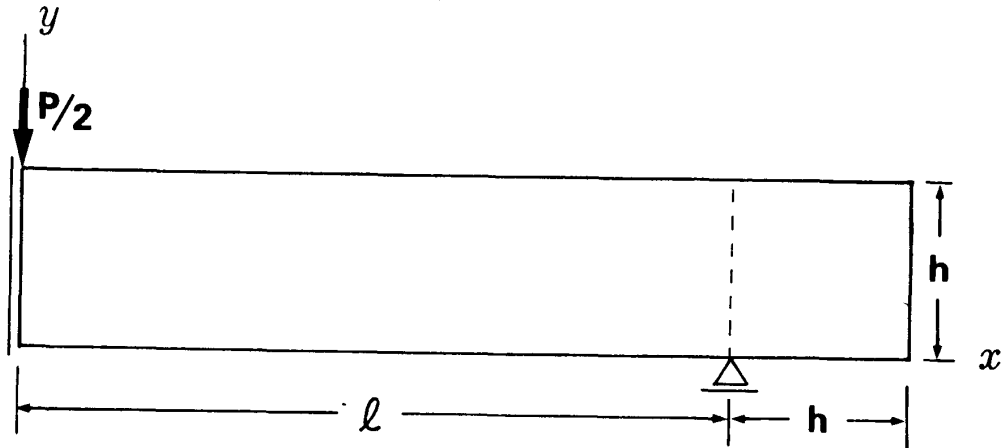


Fig. 3. Right-half of bending specimen subjected to the central load.

Fig. 2の $\ell \times h$ の領域に、Fig. 3のように $h \times h$ の領域を付加し、 $(\ell + h) \times h$ を中央集中荷重を受ける単純はりのスパン中央より右半分を表すものとする。 $\ell \times h$ の領域の要素分割は前節と同じにし、それに、さらに $h \times h$ の部分を加え、全体の要素総数を1740(節点総数1829)とした。

中央集中曲げ試験の条件に対応させるため

$$x=0, 0 \leq y \leq h : u=0$$

$$x=\ell, y=0 : v=0$$

$$x=0, y=h : \text{節点力 } P/2 = -0.5$$

を与えた。

有限要素法による要素図心 (x, y) の応力値を s_x, s_y, t_{xy} で表す。材料力学のはり公式による応力を

$$\sigma_x = (6P/bh^3)(\ell - x)(h/2 - y) \quad (20-1)$$

$$\tau_{xy} = (3P/bh^3)(h - y)y \quad (20-2)$$

とし、 σ_x の最大値を σ_0 とすると

$$\sigma_0 = 3P \ell / bh^2 \quad (20)$$

である。

前述のように、ここでの有限要素解は弾性論的厳密解のきわめて正確な近似値と考えられるので、次式によって、初等はり公式の誤差率を定義した。

$$r_x = (s_x - \sigma_x) / \sigma_0 \quad (21)$$

$$r_y = S_y / \sigma_0 \quad (22)$$

$$r_{xy} = (t_{xy} - \tau_{xy}) / \sigma_0 \quad (23)$$

要素法による計算は

$$P/2=0.5, E_x=750, E_y=30, G_{xy}=35, \mu_{xy}=0.60, h=20, b=1$$

とし、スパンは Fig. 3 の区間 ℓ のみを x 方向に一定の割合で縮小し、(1) $\ell=200$, (2) 175, (3) 150, (4) 125, (5) 100, (6) 75 として行った(なお, $x=\ell$ で要素寸法の急変を避けるため, 右端 $h \times h$ 部分の要素の幅は, $x \leq \ell$ での要素の幅から, $\ell < x < (\ell + h)$ 区間で漸増するように変化させた)。したがって, スパンーはりたけ比(L/h)はそれぞれ(1) 20, (2) 17.5, (3) 15, (4) 12.5, (5) 10, (6) 7.5 となる。計算の結果から, 各 L/h に対応して付表(Appendix)の App. (1)から, App. (6)に, また App. ()-1, -2, -3 にそれぞれの L/h における r_x, r_y, r_{xy} を示した。表の数値は $x=0 \sim \ell, y=0 \sim h$ の領域内にある各要素の図心の位置に対して, 表の中での対応する位置に記されており, その値は各 r の値(21), (22), (23)式による計算値)を 10^3 倍したものである。前述のように, 最初 $\ell \times h = 200 \times 20$ の領域に対して, $0 < x < 20$ の区間では 1×1 の要素を $20 \times 20 = 400$ 個, $20 < x < 190$ の区間では 2×2 の要素を, $85 \times 10 = 850$ 個(連結領域すなわち $20 < x < 22$ および $188 < x < 190$ の区間では, 3 個の三角形要素を合体して 1 個の 2×2 の正方形要素におきかえる), $190 < x < 200$ の区間では 1×1 の要素を $10 \times 20 = 200$ 個, 合計 1450 個の正方形要素を配置している。付表ではこのような要素枠が存在するものとして, 各枠内に, 右づめで $\pm \cdot \triangle \triangle \triangle$ の書式で数値が記入されている。ただし, 十符号と小数点, ならびに小数点に続くゼロは省略されている。なお, スパンが $\ell=200$ から ℓ_i になった場合は, 各要素の x 方向の長さが一様に $(\ell_i/200)$ 倍される。したがって各要素は $1 \times (\ell_i/200)$ および $2 \times 2 (\ell_i/200)$ の長方形となる。すなわち, 最初, $\ell=200$ のときの正方形要素は, 高さ一定のまま, 幅だけが一様に短縮される。

付表の App. (1)-1 の第 1 行, 第 1 列(要素図心: $x=0.5, y=19.5$)にある数値 $\blacktriangledown - 392 \blacktriangledown$ は

$$r_x = -392 \times 10^{-3} = -0.392 = -39.2 \%$$

を意味する。 r_x は(21)式で定義されるものであるから, $x=0.5, y=19.5$ の点における正確値(に非常に近いと考えられる値)は

$$s_x = \sigma_x + r_x \cdot \sigma_0$$

であるが App. (1)は $\ell=200$ の場合であるから

$$(20)式: \sigma_0 = 3 \times 1 \times 200 / (1 \times 20^2) = 1.5$$

$$(20-1)式: \sigma_x = (6/20^3) (200 - 0.5) (10 - 19.5) = -1.4214$$

したがって

$$s_x = -1.4214 + (-0.392) \times 1.5 = -2.0094 \approx -2.01$$

として得られる。なお付表の空白となっている所は r の値, すなわち誤差率が 1%未満であることを意味し, 太い実線で囲まれている部分は誤差率が 10%以上, 細い実線で囲まれている部分は誤差率が 5%以上である領域を示す。

なお, r_x の表について, $h > 10$ では $\sigma_x < 0$ であるから, そこで, $r_x < 0$ なら正しい圧縮応力の絶対値 $|s_x|$ が $|\sigma_x|$ より大きく, $r_x > 0$ なら $|s_x|$ は $|\sigma_x|$ より小さいことを意味する。また $h < 10$ で $r_x < 0$ なら $|s_x|$ は σ_x より小さく, $r_x > 0$ なら $|s_x|$ は σ_x より大きいことを意味する。

App. (7)は等方体($E=500, G=200, \mu=0.25$)のはりで, スパンーはりたけ比 $L/h=15$ についてのものであり, App. (3)の異方体はりの数値と比較されるべきものである。

初等はり公式による値と有限要素法解との差異の様相をより明確に把握するため, 一例として, App.

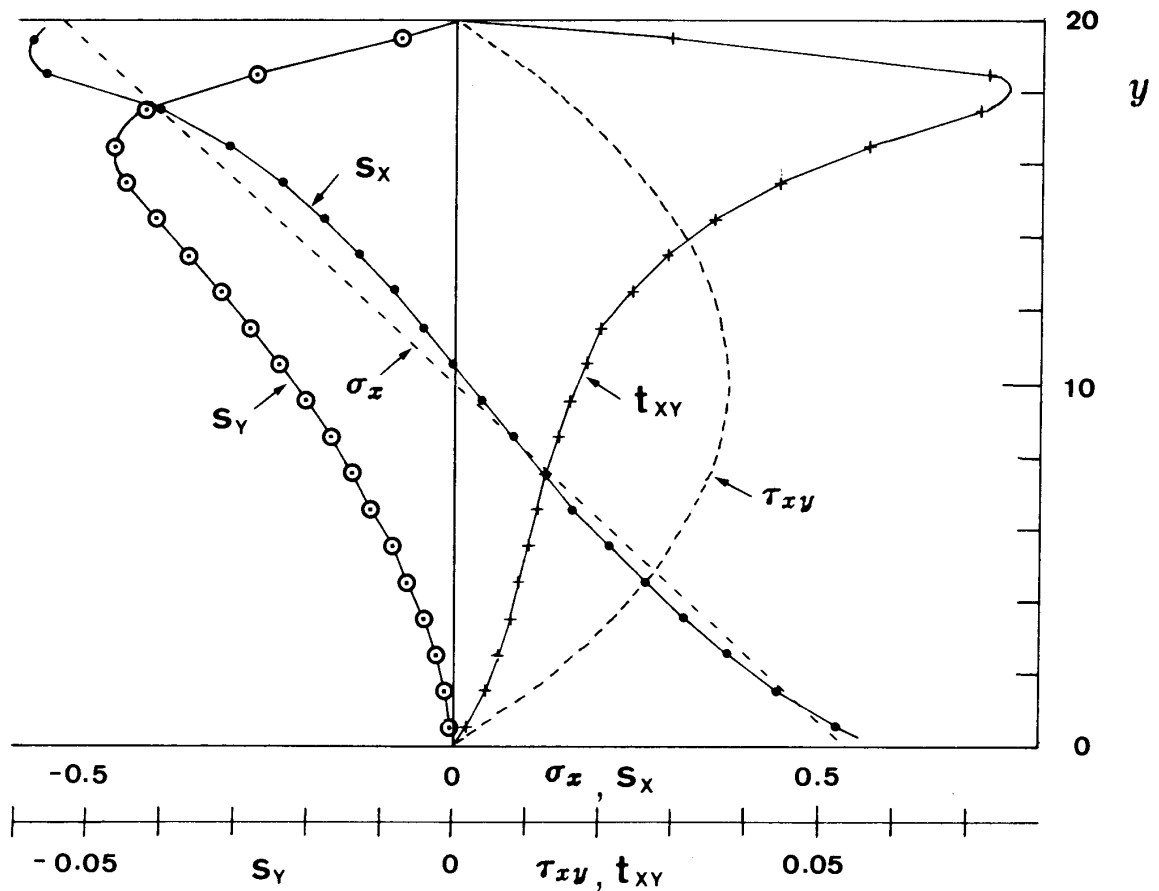


Fig. 4. Distribution of stress along the depth of cross-section at $x=4$ in the orthotropic beam as shown in Fig. 3 (span-to-depth ratio $L/h=7.5$, half span $\ell=75$).

s_x, s_y, t_{xy} : stresses calculated by FEM.

σ_x, τ_{xy} : stresses calculated by elementary bending formulae.

(6)すなわち $L/h=7.5$ の r_x, r_y, r_{xy} の各第 11 列目, すなわち $x=10.5 \times 75 / 200 = 3.9375 \doteq 4.0$ 断面での σ_x, τ_{xy} と s_x, s_y, t_{xy} のグラフを Fig. 4 に示す。

IV. 中央集中荷重点の変位

有限要素法による解から, 荷重点 ($x=0, y=20$ の節点) の垂直 (y 方向) 変位 $v(0, 20)$ の絶対値を δ_{FEM} で表す。これは中央集中荷重方式による曲げ試験での荷重点たわみの十分に正確な近似値である。

(3-1), (3-2) および(3)式で $L=2\ell$ として求められる δ_b, δ_s , および δ_0 はいわゆる初等はり公式による計算値である。

これらの値を一括して Table 1 に示す。この表には要素法による解 δ_{FEM} とはり公式による全たわみ δ_0 との比, および δ_0 のなかでのせん断付加たわみ δ_s の割合もそれぞれの () 内に示されている。

Table 1. Deflection in the beam subjected to the central concentrated load.

	L/h	L	δ_o	δ_b	δ_s (δ_s/δ_o)	δ_{FEM} (δ_{FEM}/δ_o)	δ_M (δ_M/δ_o)
(1)	20.0	400	2.8381	2.6667	0.17140(0.0604)	2.8907 (1.0185)	2.8251 (0.9954)
(2)	17.5	350	1.9365	1.7865	0.15000(0.0775)	1.9919 (1.0286)	1.9247 (0.9939)
(3)	15.0	300	1.2536	1.1250	0.12860(0.1026)	1.3117 (1.0463)	1.2429 (0.9915)
(4)	12.5	250	0.75818	0.65104	0.10714(0.1413)	0.81865 (1.0798)	0.74835 (0.9870)
(5)	10.0	200	0.41904	0.33333	0.08571(0.2045)	0.48167 (1.1495)	0.40996 (0.9783)
(6)	7.5	150	0.20492	0.14063	0.06429(0.3137)	0.26947 (1.3150)	0.19648 (0.9588)
(7)	15.0	300	1.7100	1.6875	0.02250(0.0132)	1.7080 (0.9988)	1.7033 (0.9961)

L : span, h : depth of beam, δ_o : total deflection of loading point calculated by eq. (3)
 δ_b : deflection due to bending moment calculated by eq. (3-1), δ_s : deflection due to shearing force calculated by eq. (3-2), δ_{FEM} : total deflection of loading point to the supporting point calculated by FEM, δ_M : difference between the vertical displacement of center in the loading cross-section and that in supporting cross-section.

V. 考 察

一様断面の直線はりに対する初等曲げ理論では、周知のように、曲げモーメント M による変形は、はりの軸に垂直な断面が平面のままで回転し、線ひずみ ϵ_x 、したがって垂直応力 σ_x は断面の高さにそって直線的に変化するものとして(1)式が導かれる。また M が x によって変化するときには、 $dM/dx=S$ の関係にあるせん断力 S が作用し、S によるせん断応力 τ_{xy} については、x と x+dx の垂直断面、および y=(一定)の水平断面で切りとられるはり要素の水平方向の力のつり合い条件から(2)式が導かれる。はりの軸に対して横方向に作用する荷重による垂直応力 σ_y はまったく考慮しないということがその特徴である。

はり断面の高さ h に対してスパン L が相当に長いはり、すなわちスパン-はりたけ比 L/h が相当に大きいものでは、上記の σ_x 、 τ_{xy} の式は実用的に十分な精度を有することが認められている。しかし L/h が小さくなるに従って σ_y の存在が無視出来なくなり、 σ_y についての考慮と、それに応じて生ずる(1)式および(2)式の誤差が実際的にも重大な問題になる。

L/h が極端に小さいもの、いわゆる deep beam は、機械部品(たとえば、歯車の歯などは L/h の非常に小さい片持はり)とみなされる)として各所に実際に使用されるので、deep beam problem として古くから関心がもたれている。^{12,13,14,15)} しかしこれら deep beam に対する解析解はほとんど

すべて無限級数の形であるから、応力、変形等を実際に計算するときには当然有限な項数で打ち切らざるを得ない。したがって得られる解は、このような意味での近似解であり、各 L/h における各 (x, y) 点に対する解を求めるためには相当な計算量となる。

木構造の分野でも、各種のほぞ(柄)やせん(栓)、しゃち(車知)などは、deep beam problem としての解析が必要であり、また JIS および ASTM 等で規定している木材のせん断試験体のせん断断面応力の分布¹⁶⁾なども同種の問題と解される。

この論文では主として木材の曲げ試験を考慮の対象としたので、スパン—はりたけ比としては $L/h=7.5\sim 20$ の範囲をとり上げた。応力に関する計算結果は付表に示されているが、この表(App. ()-1, -2, -3)の第1列, 第1行の数値は、その左上の節点が荷重作用点である要素の、また最後の列, 最下行の数値は、その右下の節点が反力作用点である要素の図心位置における応力に対する誤差率である。前者の絶対値を r_{\max} , 後者のそれを \bar{r}_{\max} として、Table 2 の④および⑩欄に再記する。実際の曲げ試験は Fig. 1 のように鋼製の loading block (接触面の半径 $R=75$) を介して荷重が加えられるので、loading block に接する木材はりの接触面は、その形状に応じた変形を生じ、その変形は荷重の増大とともに次第に大きくなり、荷重の分布面は広がってゆく。したがって、荷重点近傍の応力や変形を問題とするためには、弾塑性接触論的取り扱いが必要である。有限要素法では、荷重は節点に集中して働らく力として与えられるが、それは幾何学的に真の集中力を表わすとともに、隣接節点との間の各距離の $1/2$ の区間に作用する分布力の合力も同じく節点力で表わす。曲げ試験で荷重がきわめて小さいときには、ほとんど1点に作用すると考えられるが、荷重がある程度の大きさになれば、接触面の拡がりに応じて、 $x=0, y=h$ の節点以外に隣接する数個の節点にも、一定の法則に従った節点力を与えなければならない。しかし、中央集中荷重方式では、スパン中央に対して左、右完全に対称であるから、それら分布荷重の合力は同じく $x=0, y=h$ の点を通る。以上の諸点から、Table 2 の r_{\max} および \bar{r}_{\max} の数値の大きさそのものについてはあいまいさが残るが、相対的な指標としてはそれなりの意味があり、 L/h の減少とともに誤差率は指数曲線的に大きくなること、応力の種別については、いずれも $r_x > r_y > r_{xy}$ の関係が認められる。また、Table 2 の(7)の行は等方体のはりであるが、スパン—はりたけ比 L/h , および半スパン ℓ は、異方体の(3)の行の L/h と ℓ に等しく、両者を比較すると $(r_x)_{\max}$, $(\bar{r}_x)_{\max}$ は、等方体が異方体より著しく小さい。しかし $(r_y)_{\max}$, $(\bar{r}_y)_{\max}$, $(r_{xy})_{\max}$, $(\bar{r}_{xy})_{\max}$ についてはあまり大きな差がないことが認められる。

(21), (22), (23)の各式で定義される誤差率がそれぞれ 10%, 5% および 1% 以上である範囲の、荷重点から支点方向への距離を $x_{.10}$, $x_{.05}$ および $x_{.01}$ とし、また支点からスパン中央に向かって、同じく誤差率が 10, 5, 1% 以上の範囲の距離を $\bar{x}_{.10}$, $\bar{x}_{.05}$, $\bar{x}_{.01}$ で表わし、それらを Table 2 の⑤, ⑦, ⑨ および⑫, ⑭, ⑯欄に示す。若干の例外はあるが(おそらく要素分割の粗さに起因すると思われる)、 L/h の減少とともに x , \bar{x} ともに増大する。スパン内での相対的位置を表わすために $\xi = x/\ell$, $\bar{\xi} = \bar{x}/\ell$ として無次元化すると、同じく Table 2 の⑥, ⑧, ⑩ および⑬, ⑮, ⑰欄のようになる。 ξ , $\bar{\xi}$ ともに L/h の減少につれて指数曲線的に増大する。等方体では異方体に比べて、特に r_x に関して、 x , \bar{x} および ξ , $\bar{\xi}$ ともに著しく小さい。すなわち σ_x の誤差の広がり範囲は、木材(直交異方体)のほりが等方体のそれに比べて非常に大きいことが知られる。

Fig. 4 には $\ell = 75$, $L/h = 7.5$ の木材はりについて、 $x = 4.0$ 断面での応力分布が示されているが、せん断応力 t_{xy} の分布は、はり公式による放物線分布(τ_{xy})とは相当に異なった形になり、また、初等はり公式では無視される s_y が t_{xy} とほとんど同程度の大きさであることがみられる。

Airy の応力関数の支配方程式(4)における係数 k_1 , k_2 は直交異方 2 次元問題での示性数と呼ばれ、

Table 2. Relative error of stress calculated by the elementary bending theory.

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰
	L/h	ℓ	r_{max}	$x_{.10}$	$\xi_{.10}$	$x_{.05}$	$\xi_{.05}$	$x_{.01}$	$\xi_{.01}$	\bar{r}_{max}	$\bar{x}_{.10}$	$\bar{\xi}_{.10}$	$\bar{x}_{.05}$	$\bar{\xi}_{.05}$	$\bar{x}_{.01}$	$\bar{\xi}_{.01}$
r_x																
(1)	20	200	.392	2.50	.0125	5.50	.0275	19.5	.0975	.197	1.50	.0075	2.50	.0125	8.50	.0425
(2)	17.5	175	.463	2.19	.0125	5.69	.0325	20.1	.1146	.233	1.31	.0075	3.06	.0175	8.31	.0475
(3)	15	150	.559	3.38	.0225	6.38	.0425	24.6	.1642	.281	1.88	.0125	3.38	.0225	8.12	.0542
(4)	12.5	125	.696	4.06	.0325	7.19	.0575	28.4	.2275	.350	2.19	.0175	5.31	.0425	18.63	.1242
(5)	10	100	.903	5.25	.0525	7.75	.0775	31.3	.3125	.454	2.75	.0275	4.75	.0475	20.25	.2025
(6)	7.5	75	1.251	7.31	.0975	7.31	.0975	36.8	.4908	.628	3.56	.0475	3.81	.0508	36.81	.4908
(7)	15	150	.210	0.30	.0025	1.13	.0075	10.1	.0675	.105	0.38	.0025	0.38	.0025	2.63	.0175
r_y																
(1)	20	200	.263	0.50	.0025	2.50	.0125	8.5	.0425	.132	0.50	.0025	0.50	.0025	5.50	.0275
(2)	17.5	175	.324	1.31	.0075	2.19	.0125	10.1	.0575	.161	0.44	.0025	1.31	.0075	5.69	.0325
(3)	15	150	.408	1.13	.0075	2.63	.0175	10.9	.0725	.203	0.38	.0025	1.13	.0075	7.13	.0475
(4)	12.5	125	.532	1.56	.0125	3.43	.0275	12.5	.0975	.264	0.94	.0075	1.56	.0125	7.94	.0635
(5)	10	100	.728	2.25	.0225	4.75	.0475	15.9	.1594	.360	1.25	.0125	2.25	.0225	8.25	.0825
(6)	7.5	75	1.070	3.19	.0425	5.81	.0775	14.3	.1908	.528	1.31	.0175	3.19	.0425	10.56	.1408
(7)	15	150	.535	1.13	.0075	2.63	.0175	7.9	.0525	.265	0.38	.0025	1.13	.0075	5.63	.0375
r_{xy}																
(1)	20	200	.248	0.50	.0025	2.50	.0125	9.5	.0475	.124	0.50	.0025	0.50	.0025	6.50	.0325
(2)	17.5	175	.301	1.31	.0075	3.06	.0175	10.1	.0575	.150	0.44	.0025	1.31	.0075	7.44	.0425
(3)	15	150	.372	1.89	.0125	4.13	.0275	10.9	.0725	.186	0.38	.0025	1.88	.0125	7.13	.0475
(4)	12.5	125	.475	2.19	.0175	4.69	.0375	11.6	.0925	.237	0.94	.0075	2.19	.0175	7.94	.0635
(5)	10	100	.633	3.25	.0325	5.75	.0575	11.3	.1125	.316	1.25	.0125	3.25	.0325	9.25	.0925
(6)	7.5	75	.903	3.94	.0525	7.32	.0975	12.8	.1708	.452	1.69	.0225	3.56	.0475	10.56	.1408
(7)	15	150	.276	1.13	.0075	1.88	.0125	4.9	.0325	.138	0.38	.0025	1.13	.0075	4.13	.0275

L/h : span-to-depth ratio. ℓ : halfspan ($L=2\ell$). r_x , r_y , r_{xy} : relative errors of stresses defined by eqs. (21), (22), and (23). r_{max} , \bar{r}_{max} : maximum relative errors at the elements nearest to the loading point, and the supporting point. $x_{.10}$, $x_{.05}$, $x_{.01}$: distances from the loading cross-section to the cross-section in which the relative errors are 10%, 5%, and 1%. $\bar{x}_{.10}$, $\bar{x}_{.05}$, $\bar{x}_{.01}$: distances from the supporting cross-section to the cross-section in which the relative errors are 10%, 5%, and 1%. $\xi=x/\ell$, $\bar{\xi}=\bar{x}/\ell$.

直交異方体の弾性定数によって (4-1), (4-2) 式の関係で定まる。ここで計算に用いた弾性定数に対しては $k_1=4.35$, $k_2=1.15$ である。等方体では $k_1=k_2=1$ であるから、物体の形状と荷重条件が同じであれば、弾性定数 (E , G または μ) の大きさの違いは、その応力分布の形に影響を与えない。それに対して、直交異方体での応力分布は、形状と荷重条件が同一であっても、示性数 k_1 , k_2 の値によって変化する¹⁰⁾。Tang および Jane¹⁷⁾ は直交異方体のはりが集中荷重を受ける問題の解析解を Fourier 級数を用いて求めている。ただし、はりの両端は材料力学で称する単純支持ではなく、Fig. 2 の p_y のような分布力が両端面に生じて荷重を支えるという条件になっている。実際の曲げ試験の支持条件に一致する解析解が得られるなら、それが無限級数の形であっても、断面を特定して、その応力分布に対する示性数 k_1 , k_2 の影響を吟味するのには、有限要素法より有効であると思われるので今後の検討課題としたい。

中央集中荷重による荷重点の変位、すなわちはりのたわみに関する計算値は Table 1 に示されている。有限要素法による十分に正確な近似値 δ_{FEM} は、はり公式による δ_0 に比べて、 $L/h=20$ に対する 1.9% から、 $L/h=7.5$ の 31.5% にわたって、 δ_{FEM} が δ_0 より大きい。すなわち (3) 式による計算値は、曲げ試験における荷重点の実際のたわみに対してかなり過小な予測値を与える。また δ_0 のうち、せん断による付加たわみ δ_s の割合は $L/h=20 \sim 7.5$ に対応して 6.0~31.4% を占めることが知られる。

JIS によれば、木材の曲げ試験は $L/h=14$ とし、比例限内での荷重差 Δp に対応するスパン中央たわみの差 Δy を測定し

$$E = \frac{L^3}{48I} \frac{\Delta p}{\Delta y} = \frac{L^3}{4bh^3} \frac{\Delta p}{\Delta y} \quad (24)$$

で曲げヤング率 E を求めるように規定している。

(3) 式の右辺 () 内の第 2 項はせん断たわみに対する補正項であり、これを Δ_s で表わす。 $L/h=14$ とし、 $E_x=750$, $G_{xy}=35$ に対する Δ_s の値は

$$\Delta_s = 1.2(E_x/G_{xy})(h/L)^2 = 0.131$$

となる。したがって (24) 式による E は、この試験体の真のヤング率 E_x に対して

$$E = E_x / (1 + \Delta_s) = E_x / 1.131 = 0.884 E_x$$

となるから、12% 程度過小な評価になる。この論文で用いた E_x と G_{xy} は木材工業ハンドブック³⁾ によるスギ材の E_L と G_{LT} の値であり、 $E_x/G_{xy}=21.4$ となる。沢田⁶⁾ によると、 X 軸を木材の繊維方向としたとき、主要なほとんどの針葉樹材で、 E/G は 15~20、広葉樹材で 10~15 の範囲にある。このことから、曲げ試験によって E を評価しようとする場合、針葉樹材では L/h を 20 以上、広葉樹材では 15 以上とすべきであると提言している。 $L/h=20$ に対し、 $E/G=15 \sim 20$ のとき $\Delta_s=0.045 \sim 0.060$ 、 $L/h=15$ に対し $E/G=10 \sim 15$ のとき $\Delta_s=0.053 \sim 0.080$ であるから、(24) 式による E と真のヤング率 E_x との比は

$$E/E_x = 1 / (1 + \Delta_s) = 1 / 1.045 \sim 1 / 1.080 = 0.96 \sim 0.93$$

となる。すなわち、スパン-はりたけ比を 15 あるいは 20 としたとき、中央集中荷重方式の曲げ試験による荷重-たわみの関係から、(24) 式を用いて算出される E は、その木材の真のヤング率に対し 4~7% の過小評価になる。(等方体については、Table 1 の (7) の行から、 δ_s は δ_0 の僅か 3% であることがみられるが、一般金属材料のポアソン比 μ は 0.25~0.30、したがって $E/G=2(1+\mu)=2.5 \sim 2.6$ であるから、せん断付加たわみはそれ程大きな問題とはされない)。

ところで、上述の所論は、もっぱら (3) 式と (24) 式に関するものであったが、Table 1 の δ_{FEM} は、 L/h

h が 20 から 7.5 の範囲で、(3)式で算出される δ_0 よりも、さらに約 2% から 30% 大きくなることを示している。すなわち、中央集中荷重による木材の曲げ試験では、(3)式のように、せん断による付加たわみを考慮してもなお補正し得ない、たわみ量増大の他の要因があることが知られる。しかもその効果は、スパン一はりたけ比が小さくなるにともなって、幾何級数的に発現している。当然に予想されることは σ_y の効果である。Table 1 の δ_{FEM} は荷重点、すなわち Fig. 1 の Loading block 下面の支点に対する相対的垂直変位量であるから、荷重点および支点断面内での横圧縮による変位も当然そのなかに含まれている。集中荷重 $P=1$ に対する横 (y) 方向の短縮量 Δv は、有限要素解によると、 $L/h=20\sim 7.5$ の範囲において、

荷重点断面 ($x=0$) では

$$0 < y < h/2 \text{ 区間} : \Delta v = (8.98 \sim 5.23) \times 10^{-3}$$

$$h/2 < y < h \text{ 区間} : \Delta v = (41.73 \sim 48.03) \times 10^{-3}$$

支点断面 ($x=l$) では

$$0 < y < h/2 \text{ 区間} : \Delta v = (23.87 \sim 24.96) \times 10^{-3}$$

$$h/2 < y < h \text{ 区間} : \Delta v = (1.52 \sim 1.53) \times 10^{-3}$$

であった。木材はりの図心 ($y=h/2$) をつらねる軸線のたわみ δ_M は

$$\delta_M = |v(0, h/2) - v(l, h/2)| \quad (25)$$

で求められる。Table 1 の右端の欄にこの δ_M および δ_M/δ_0 の比を示した。この数値からは、(3)式の δ_0 が、材料力学で称するスパン中央のたわみとして、やや過大な予測値となるが、その差は 0.5~4.0% 程度にとどまり、実用的な精度としてはおおむね十分であると考えられる。ただし、実際の曲げ試験でのたわみ測定は、上に説明した δ_M に相当するものでなければならない。

VI. 要 約

木材の曲げ試験は通常 Fig. 1 のように、長方形断面の単純はりに対して中央集中荷重方式で行なわれ、弾性応力 σ_x , τ_{xy} は (1), (2) 式で、スパン中央の弾性たわみ δ_0 は (3) 式で計算される。しかし、これら初等曲げ理論にもとづくはり公式は、弾性論的に完全に厳密な式ではないから、スパン一はりたけ比 L/h があまり大きくないはりでは必ずしも十分な精度が保証されるとは期待出来ない。

Fig. 1 に対する境界条件を完全に満足し、しかも、いわゆる closed form の解析解は得られていない。したがって、この論文では有限要素法を用いて十分に正確な近似解を求め、初等曲げ理論式の精度についての吟味を行った。

有限要素法による解の精度は、要素分割のこまかさに大きく依存するから、厳密解が求められる Fig. 2 の片持はりについて検討し、 $l \times h = 200 \times 20$ の領域を 1490 個の要素 (寸法: 1×1 および 2×2) に分割すれば、片持はり自由端変位が厳密解に対して誤差 1% 以内の精度で得られることを確かめた。この分割を Fig. 3 の $l \times h$ の部分にそのまま適用し、支点を超えるはりの部分に対し、 $h \times h$ の領域を付加し、全体で要素数を 1740 とした。

主としてスパン一はりたけ比 L/h との関係を検討するため、分割方式はそのままで、 $0 \leq x \leq l$ の区間を一定の割合で一様に短縮し、 $h=20$ (一定); $l=200, 175, 150, 125, 100, 75$ の 6 種類について計算を行ない、各点の応力 s_x , s_y , t_{xy} および荷重点のたわみ δ_{FEM} を求めた。計算に用いた弾性定数は、もっとも主要な構造用木材であるスギの E_L , E_T , G_{LT} , μ_{LT} を、それぞれ E_x , E_y , G_{xy} , μ_{xy} とした。

初等はり理論による σ_x , τ_{xy} , ($\sigma_y=0$) の公式誤差率 r_x , r_y , r_{xy} を(21), (22), (23)式で定義し, その結果を付表(App. (1)~App. (6))に示した。荷重点および支点にもっとも近い要素における誤差率の絶対値が最大となるので, それを r_{\max} , \bar{r}_{\max} とし, また荷重点(および支点)から右(左)方向へ, 応力の誤差率が 10, 5, 1%以上になる範囲の長さを $x_{.10}$, $x_{.05}$, $x_{.01}$ ($\bar{x}_{.10}$, $\bar{x}_{.05}$, $\bar{x}_{.01}$), スパン ℓ に対する相対位置を $\xi=x/\ell$ ($\bar{\xi}=\bar{x}/\ell$) として, これらを Table 2 に示した。 r_{\max} , $\xi_{.10}$, $\xi_{.05}$, $\xi_{.01}$ 等はいずれも $h/L=20\sim 7.5$ の範囲で, L/h が小さくなるに従って指数曲線的に増大する。等方体の r_x は直交異方体のそれより著しく小さく, r_y は逆に少し大きく, ξ_x は等方体で著しく小さいことが知られた。

たわみに関する計算値は一括して Table 1 に示される。要素法によって得られる荷重点たわみ δ_{FEM} は, L/h が 20 から 7.5 に減少するにともなって, (3)式による δ_0 の 1.02 倍から 1.32 倍に増大する。すなわち, 初等はり理論による全たわみ δ_0 は実際の荷重点たわみに対しかなり過小な値である。

しかし, スパン中央の断面図心と支点断面の図心間の垂直変位差 δ_M (25式) に対しては, δ_0 は逆に若干過大な評価になるが, その誤差は 0.4~4.0% の範囲にとどまる。実際の曲げ試験では, Loading block 下面の垂直変位ではなく, 上記の δ_M に相当する量を測定する必要がある。

JIS および ASTM では $L/h=14$ とし, (24)式でヤング率 E を計算するように規定しているが, 木材のせん断付加たわみはかなり大きいから, 上記の δ_M に対応する測定値を用いても, (24)式による E はその木材試験体の真のヤング率 E_x に対して 5~10% 過小な推定となる。

曲げ試験における荷重点および支点での接触応力, 木材の異方性示数 k_1 , k_2 の応力分布および変形に及ぼす影響等については, 今後さらに考究を要する問題であると考えらる。

Summary

Bending test of wood specimen is usually performed by the method as shown in Fig.1. The axial normal stress (σ_x), the shearing stress (τ_{xy}), and the total deflection (δ_0) of the loading point are calculated by eqs. (1), (2), and (3), respectively. And the normal stress (σ_y) perpendicular to the beam axis is neglected.

These elementary bending formulae, however, are not exact equations based on the elastic theory. Therefore the errors of above formulae cannot be neglected as the span-to-depth ratio of beam is smaller.

In this paper, the accurate values of the stresses (s_x , s_y : normal stress, t_{xy} : shearing stress) and the central deflection (δ_{FEM}) in the simple beam with rectangular section (depth $h=20$ mm, width $b=1$ mm) subjected to the central concentrated load ($P=1$ kgf) as shown in Fig.3 were calculated by the Finite Element Method (FEM). The region $\ell \times h$ (ℓ : half span) in Fig.3 was divided into the elements whose total number is 1490.

The displacement (u , v : components of the displacement parallel to the coordinate axes x , y) of the orthotropic cantilever loaded at the free end as shown in Fig. 2 are obtained by eqs. (14) and (15) based on the elastic theory. The error of the calculated values of displacement in this cantilever by FEM with the same partition (total number of elements is 1490) is less than 1 per cent, compared with the exact values obtained by eqs. (14) and (15).

The relative errors (r_x, r_y, r_{xy}) of the formulae based on the elementary bending theory are defined by eqs. (21), (22), and (23). These values are arranged in the table of Appendix. In this table, App. (1), (2), (3), (4), (5), and (6) correspond to the orthotropic (wood) beams in which the span-to-depth ratios (L/h) are 20, 17.5, 15, 12.5, 10, and 7.5, respectively. App. (7) corresponds to the

isotropic beam whose span-to-depth ratio is 15. The maximum relative errors (r_{\max} , \bar{r}_{\max}) occur at the elements nearest to the loading point, and the supporting point, respectively, and its values are shown in the columns ④, and ⑪ of Table 2. The relative errors of the elementary formulae become serious as the span-to-depth ratio of beam decreases.

As shown in Table 1, the relative vertical displacement (δ_{FEM}) of the loading point to the supporting point is considerably larger than the value (δ_0) calculated by equation (3) derived without the consideration on the contraction of beam due to the lateral compressive stress (σ_y). The difference (δ_M) between the vertical displacement of the center in the loading cross section and that in the supporting cross section is nearly equal to the central deflection (δ_0) by eq. (3). Therefore, in the actual bending test of wood specimen, the central deflection of beam have to measure the quantity corresponding to δ_M , and then the equation (3) should be applied instead of eq. (24) to estimate the elastic constants.

引用文献

- 1) 大草克己：木材のせん断に関する弾塑性論および破壊力学的研究(第2報)木材はりの水平せん断, 鹿大農演報, **7**, 29-68(1979)
- 2) Anderson, J. A. : Stress strain relationship for defect-free timber beams, Wood Science, **14**(1), 23-31(1981)
- 3) 林業試験場(監修)：木材工業ハンドブック, 改訂3版, p.131, p.983, 丸善, 東京(1982)
- 4) ASTM : 1981 Annual Book of ASTM Standards, Part 22, p.59-116, ASTM, Philadelphia (1981)
- 5) Timoshenko, S. and D. H. Young : Elements of Strength of Materials, 4th ed. p.111-132, p. 197-230, Van Nostrand, Princeton, (1962)
- 6) 沢田稔：木材の強度特性に関する研究, 主として, その木材梁への適用, 林試研報, **108**, 115-224(1958)
- 7) Biblis, E. J. : Shear deflection of wood beams, Forest Prod. J., **15**(11), 492-498(1965)
- 8) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method, 3rd ed., p. 20-41, Mc Graw-Hill, New York (1977)
- 9) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦(共編)：有限要素法ハンドブック, I. 基礎編, p. 3-17, 培風館, 東京(1982)
- 10) 大草克己：木材強度試験体(割裂・横引張・部分圧縮)応力の数値的解析, 鹿大農演報, **4**, 1-84(1976)
- 11) 大草克己：クラックを有する木材はりのモードIIエネルギー解放率, 鹿大農演報, **11**, 1-20(1983)
- 12) 渋谷寿一, 中原一郎：中央集中荷重を受ける短い単純支持はり, 機械学会論文集(第1部), **32**(237), 700-708(1966)
- 13) Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, 3rd ed., p.53-60, p.113-122, Mc Graw-Hill, New York(1970)
- 14) 小林道明, 石川博将, 秦謹一：短い片持ばりの二次元応力問題について, 機械学会論文集(第1部), **42**(357), 1355-1364(1976)
- 15) Ettouney, M. M., and W. Schmidt, Finite element solutions of deep beams, J. Structural Eng., **109**(7), 1569-1584(1983)
- 16) 大草克己：木材のせん断に関する弾塑性論および破壊力学的研究(第3報)椅子型(JIS)せん断試験体の応力特異性とエネルギー解放率, 鹿大農学術報告, **30**, 201-215(1980)

-
- 17) Tang, R. C., and B. A. Jane : Solution of an orthotropic beam by Fourier series, *Wood and Fiber*, 5 (2), 84-89 (1971)
 - 18) 山田嘉昭(編) : マトリックス法の応用, p. 229-320, 東大出版会, 東京 (1972)

