

## 木材のテーパーはりのたわみとせん断破壊強さについて

大 草 克 己  
(森林土木学研究室)

### Deflection and Shear Failure Strength of Tapered Wood Beam

Katsumi OKUSA  
(Laboratory of Forest Civil Engineering)

#### I. まえがき

引張り側にテーパー縁をもつ木材のはりではせん断が主因と考えられる破壊を生じる。著者は木材のせん断に対する強さについて、現行の JIS または ASTM 等の試験方法による値が、その材料の真のせん断強さを表わすものであるか、疑問とせざるを得ないことを述べて来た<sup>1,2)</sup>。せん断破壊を生ずるテーパーはりの破壊荷重を測定し、一定の破壊基準を適用すれば、木材のせん断強さを逆算によって求めることが可能ではないか。本研究はこのような考えにもとづいて行なわれた。

以下の節で具体的な数量値が示されるとき、力の単位は kgf であり、長さの単位は mm である。

#### II. テーパーはりの全域が弾性である場合の応力およびたわみの計算式

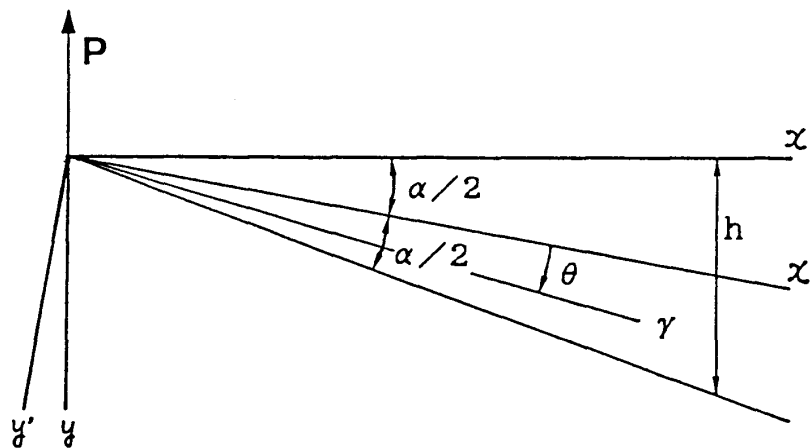


Fig. 1 A wedge under a concentrated load ( $P$ ) at its apex.

Fig. 1 のように上縁を水平においた無限長のくさび (厚さ= $b$ ) の先端に鉛直上向きに集中荷重  $P$  が作用するとき、くさびの内部に生ずる応力は、くさびの頂角  $\alpha$  の 2 等分線を基線 ( $x'$ ) とする極座標

• この研究の概要は第38回日本木材学会大会 (1988. 7) で発表した。

( $r, \theta$ ) を用いると、弾性論による厳密解として次式を得る<sup>3)</sup>。

$$\sigma_r = \frac{2P}{br} F_1(\alpha, \theta), \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

$$F_1(\alpha, \theta) = \sin(\alpha/2) \cos \theta / (\alpha + \sin \theta) + \cos(\alpha/2) \sin \theta / (\alpha - \sin \theta) \quad (1-1)$$

これを直角座標  $x', y'$  に関する成分に変換すると

$$s_x' = \sigma_r \cos^2 \theta, \quad s_y' = \sigma_r \sin^2 \theta, \quad t_{xy}' = \sigma_r \cos \theta \sin \theta \quad (2)$$

となり、さらに  $x, y$  座標に関する成分に変換すると、 $x$  方向の垂直応力  $s_x$  は

$$s_x = \cos^2(\alpha/2) s_x' + \sin^2(\alpha/2) s_y' - 2 \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) t_{xy}' \quad (3)$$

となる。

Fig. 1 のくさびにおいて、ある特定の  $x$  断面における曲げ応力  $\sigma_x$  を材料力学式を適用して計算すると

$$\sigma_x = \frac{M}{I} (y - h/2) = \frac{12}{bh^3} Px (y - h/2) \quad (4)$$

となる。M は曲げモーメント、I は断面の慣性モーメントを表わす。(4) 式より

$$(\sigma_x)_{y=h} = 6Px/bh^2 \equiv \sigma_1 \quad (5)$$

とし、 $\sigma_x$  の  $s_x$  に対する相対誤差率  $e$  を

$$e = (\sigma_x - s_x) / \sigma_1 \quad (6)$$

のように定義すると(1)～(5)式より

$$e = 2 \tan(\alpha/2 + \theta) / \tan \theta - \frac{1}{3} F_1(\alpha, \theta) F_2(\alpha, \theta) \cos(\alpha/2 + \theta) \tan^2 \alpha - 1 \quad (7)$$

$$F_2(\alpha, \theta) = \cos^2(\alpha/2) \cos^2 \theta + \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \theta - 2 \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) \cos \theta \sin \theta \quad (7-1)$$

となり、誤差率  $e$  は  $\alpha$  と  $\theta$  のみの関数であることが知れる。いま  $\tan \alpha = 0.125$  および  $\tan \alpha = 0.150$  とし、 $e$  と  $y/h (= \tan(\alpha/2 + \theta) / \tan \alpha)$  の関係を求めると Fig. 2 のようになる。 $\tan \alpha < 0.150$  では  $|e| < 2.0\%$  であるからくさびの頂角  $\alpha$  が小さいときには、実用的に十分な精度で曲げ応力  $\sigma_x$  の計算に材料力学のはり公式(4)を用いることが出来る。

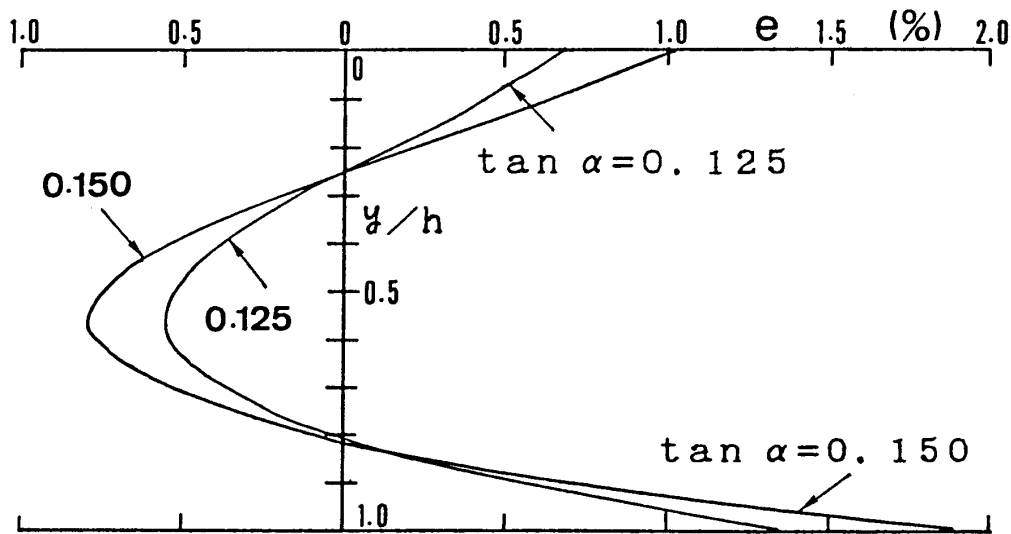


Fig. 2 The relative error (e: eq. (6)) of value ( $\sigma_x$ ) in the elementary bending equation to exact value ( $s_x$ ) in the elastic theory.

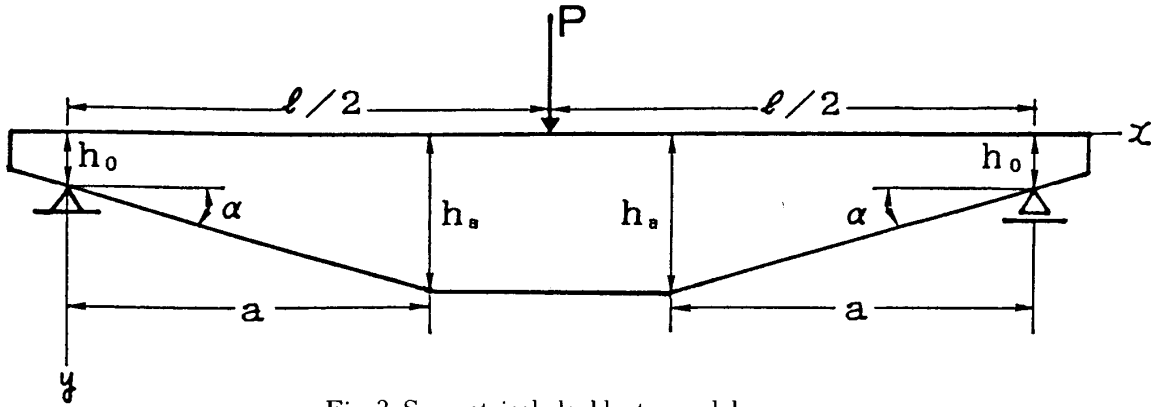


Fig. 3 Symmetrical double tapered beam.

Fig. 3 に示すような左右対称な両テーパーはり

$$0 \leq x \leq a : h = h_0 + x \tan \alpha \quad (8-1)$$

$$a \leq x \leq l/2 : h = h_a \quad (\text{一定}) \quad (8-2)$$

の中央に集中荷重 P を加える曲げ試験において、曲げ応力  $\sigma_x$ 、せん断応力  $\tau_{xy}$ 、鉛直応力  $\sigma_y$  について、材料力学のはり公式を適用すると次の (9)、(10)、(11) 式が得られる。

$$\sigma_x = (6P/bh) (y/h - 1/2) (x/h) \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = (3P/bh) \{ [3(y/h)^2 - 2(y/h)] (x/h) (dh/dx) + [(y/h) - (y/h)^2] \} \quad (10)$$

$$\sigma_y = (3P/bh) \{ [4(y/h) - 3] (x/h) (dh/dx) + 2[1 - (y/h)] \} (y/h)^2 (dh/dx) \quad (11)$$

これら (9)、(10)、(11) 式は Maki and Kuenzi<sup>4)</sup> によって導かれ、その後沢田、丸山<sup>5)</sup> によって追認されている。

$$(\sigma_x)_{y=0} = -3Px/bh^2 \equiv \sigma_2 \quad (12)$$

とし、 $|\sigma_2|$  の最大値は、テーパ部 ( $0 < x < a$ ) においては

$$\frac{d}{dx} |\sigma_2| = (3P/bh^4) [h^2 - 2hx(dh/dx)] = 0$$

から、 $x = h/2 \tan \alpha$  したがって、

$$x = h_0 / \tan \alpha \equiv x_m \quad (13-1)$$

$$h = 2h_0 \quad (13-2)$$

の断面に生じ

$$|\sigma_2|_{\max} = 3P/4bh_0 \tan \alpha \equiv \sigma_m \quad (13)$$

となる。また中央平行部での最大値は  $x = l/2$  に生じ

$$|\sigma_2|_{\max} = 3P\ell/2bh_a^2 \equiv \sigma_b \quad (14)$$

となる。

テーパ縁におけるせん断応力は (10) 式から

$$(\tau_{xy})_{y=h} = (3P/bh) (x/h) \tan \alpha \quad (10-1)$$

となり、

$$\frac{d}{dx} (\tau_{xy})_{y=h} = (3P \tan \alpha / b) (h - 2x \tan \alpha) / h^3 = 0$$

から、同じく  $x = x_m$  断面で最大となり、それを  $\tau_h$  と記すと (10-1) と (13) 式から

$$\tau_h = 3P/4bh_0 = \sigma_m \tan \alpha \quad (15)$$

となる。また、テーパー縁での  $\sigma_y$  の最大値を  $\sigma_{y,h}$  と記すと、まったく同様にしてそれは  $x=x_m$  断面に生じ

$$\sigma_{y,h} = \sigma_m \cdot \tan^2 \alpha \quad (16)$$

となることが知られる。

ここで適用している材料力学式によれば、中央平行部ではもちろん  $\sigma_y = 0$  であり、また  $\tau_{xy}$  は (10) 式より

$$\tau_{xy} = (3P/bh_a) (y/h_a) (1 - y/h_a) \quad (17)$$

となる。したがって、 $\tau_{xy}$  は  $y = h_a/2$  で最大となり、それを  $\tau_0$  と記すと

$$\tau_0 = 3P/4bh_a = \tau_h (h_0/h_a) < \tau_h \quad (18)$$

となる。

(9), (10), (11) 式の応力による弾性ひずみエネルギー  $U$  は

$$U = \int_0^\ell \int_0^h (\sigma_x^2/2E_x + \tau_{xy}^2/2G_{xy} + \sigma_y^2/2E_y) b dy dx \equiv U_B + U_S + U_V \quad (19)$$

として計算され、カステリアノの定理を用いると荷重点のたわみ  $\delta$  は

$$\delta = \partial U / \partial P = \delta_B + \delta_S + \delta_V$$

$$\delta_B = \partial U_B / \partial P = (6P/bE_x) g_B \quad (20)$$

$$g_B = [\log(h_a/h_0) - \frac{1}{2}(h_0/h_a)^2 + 2(h_0/h_a)^2 - 1.5] / \tan^3 \alpha + [(\ell/2)^3 - a^3] / 3h_a^3 \quad (20-1)$$

$$\delta_S = \partial U_S / \partial P = (3P/5bG_{xy}) g_S \quad (21)$$

$$g_S = [4 \log(h_a/h_0) - 2(h_0/h_a)^2 + 7(h_0/h_a) - 5] / \tan \alpha + (\ell/2 - h_a) / h_a \quad (21-1)$$

$$\delta_V = \partial U_V / \partial P = (3P \tan \alpha / 35bE_y) g_V \quad (22)$$

$$g_V = 22 \log(h_a/h_0) - 9(h_0/h_a)^2 + 32(h_0/h_a) - 23 \quad (22-1)$$

となる。

$$b=20, h_0=15, h_a=40, \ell=420 \quad (23)$$

$$E_x=750, G_{xy}=35, E_y=30 \quad (24)$$

として (20), (21), (22) 式より  $\delta_B$ ,  $\delta_S$ ,  $\delta_V$  を計算し、それぞれの全たわみ  $\delta$  に対する比を示すと Table 1 のようになる。Table 1 の ( ) 内の数値は、同じスパン  $\ell$  で、高さが  $\bar{h}$  の一様断面はりに対するものであり<sup>6)</sup>、 $\bar{h}$  は Fig. 3 のテーパーはりの平均高さ、すなわち

$$\bar{h} = [h_a \ell - a(h_a - h_0)] / \ell$$

として定まるものである。

$\tan \alpha$	$\delta_B / \delta$	$\delta_S / \delta$	$\delta_V / \delta$
0.125	0.7965 (0.8968)	0.1998 (0.1032)	0.0037
0.150	0.7741 (0.8835)	0.2205 (0.1165)	0.0054

Table 1. The ratio of elastic deflection due to bending ( $\delta_B$ ), shearing ( $\delta_S$ ), and vertical ( $\delta_V$ ) stress to total elastic deflection ( $\delta$ ) in a tapered wood beam (values in parentheses are those of the beam having a uniform cross section).

Table 1 から明らかなように、テーパーはりでは一様断面はりに比べてせん断による付加たわみの割合が約 2 倍となり、せん断応力の影響が顕著であることが知られる。また鉛直応力  $\sigma_y$  のたわみに及ぼす効果はほとんど無視し得る程度のものである。

Ⅲ. テーパ-はりの一部に塑性域が生じた後の応力およびたわみの計算式

荷重が増大して(13)式の  $\sigma_m$ , または(14)式の  $\sigma_b$  がその木材の圧縮比例限応力を超えると, はりの圧縮縁に近い部分に塑性域が発生する。木材の応力・ひずみ関係に, 引張りでは破壊時まで直線, 圧縮では, 圧縮強さ  $\sigma_c$  を降伏応力とする完全弾塑性型を仮定すると, 塑性域発生後の応力分布は Fig. 4 のようになる<sup>7)</sup>。

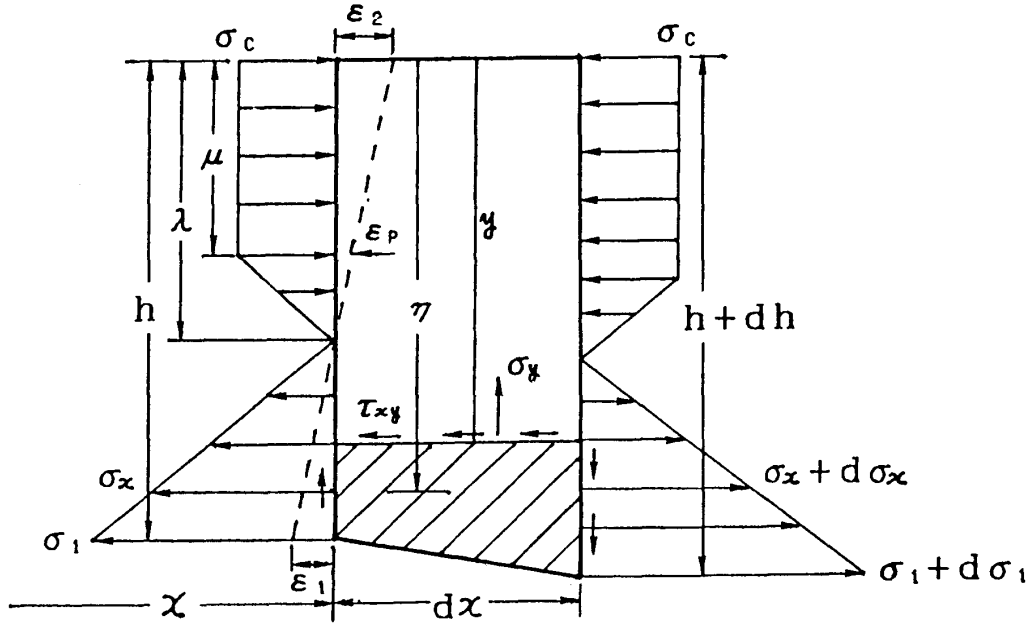


Fig. 4 Stress distribution in a tapered wood beam after occurrence of the plastic zone.

Fig. 4 を参照し, 平面保持の仮定およびフック則から

$$\sigma_1 / (h - \lambda) = \sigma_c / (\lambda - \mu) \tag{25}$$

断面全体について水平方向の力のつり合い条件から,

$$h\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_c)(h - \mu)$$

したがって,

$$\sigma_1 = \sigma_c(h + \mu) / (h - \mu) \tag{26}$$

(25), (26) 式より

$$\lambda = (h^2 + \mu^2) / 2h \tag{27}$$

x 断面における曲げモーメントを M とすると, モーメントのつり合い条件から

$$M = \sigma_c b h (h + 2\mu) / 6 \tag{28}$$

したがって,

$$\mu = 3M / b h \sigma_c - h / 2 \tag{29}$$

となる。y > mu における  $\sigma_x$  は Fig. 4 の関係および(27)式から

$$\sigma_x = (\sigma_1 + \sigma_c)(\eta - \lambda) / (h - \mu) = \sigma_c(2h\eta - h^2 - \mu^2) / (h - \mu)^2 \tag{30}$$

となる。

はり下縁の引張り応力  $\sigma_1$  が最大となる断面は (26), (8-1), および(29)式から

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial h} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

を求め、 $d\sigma_1/dx=0$ とおくと、Fig. 3のはりのテーパ部で $x=h_0/\tan\alpha$ となり、前節(13-1)の $x_m$ と一致することが知られる。また、中央平行部で $\sigma_1$ が最大となる断面は $x=l/2$ 、すなわちスパン中央であることは明白である。

(13)および(14)式から

$$\sigma_m/\sigma_c=3P/4\sigma_c b h_0 \tan\alpha \equiv \gamma \quad (31)$$

$$\sigma_b/\sigma_c=3P\ell/2\sigma_c b h_a^2 \equiv \beta \quad (32)$$

として、 $\gamma$ 、 $\beta$ を定義すると、 $\gamma>1$ かつ $\beta>1$ のときこのテーパはりの塑性域はFig. 5の斜線部のようになる。Fig. 5では判り易くするため塑性域の深さ $\mu$ を拡大して表わしてある。

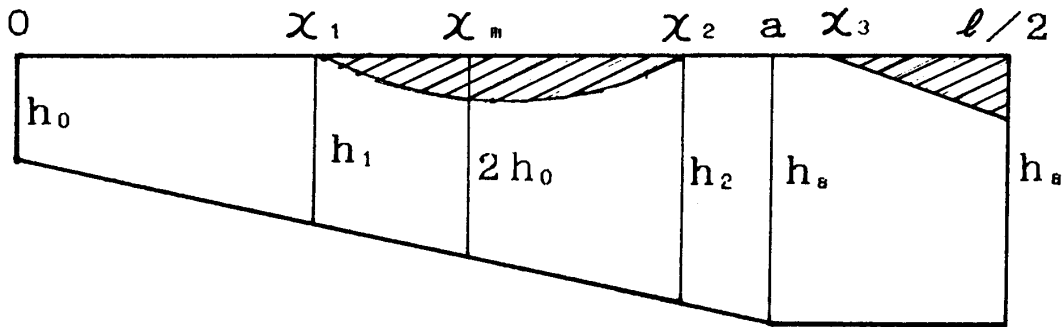


Fig. 5 The plastic zone (hatched region) in a tapered wood beam.

Fig. 5の $x_1$ 、 $x_2$ はテーパ部において

$$\sigma_2=6M/bh^2=\sigma_c \quad (33)$$

の条件を満足する $x$ の値であり、(31)式の $\gamma$ を用いて表わすと

$$x_1, x_2=x_m[2\gamma-1\pm 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}] \quad (34)$$

となり、対応するはりの高さ $h_1$ 、 $h_2$ は

$$h_1, h_2=2h_0[\gamma\mp\sqrt{\gamma(\gamma-1)}] \quad (35)$$

となる。また中央平行部で、同じく(33)式の条件を満足する $x$ を $x_3$ とすると

$$x_3=l/2\beta \quad (36)$$

となる。

$dM/dx=S$ (せん断力) $\neq 0$ の場合、その断面に塑性域が発生した後のせん断応力 $\tau_{xy}$ は、Fig. 4のはり要素の斜線をつけた部分について、水平方向の力のつり合い条件

$$\int_y^h \sigma_x b d\eta + \tau_{xy} b dx = \int_y^{h+dh} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) b d\eta$$

から

$$\tau_{xy} = \left\{ (h+\mu) [3y^2 - 2(h+2\mu)y + \mu(2h+\mu)] \sigma_c \frac{dh}{dx} + \frac{6}{b} (h-y)(y-\mu) \frac{dM}{dx} \right\} / (h-\mu)^3 \quad (37)$$

となる。(37)式で $y=h$ とすると次式が得られる。

$$(\tau_{xy})_{y=h} = \sigma_c (h+\mu) (dh/dx) / (h-\mu) \quad (38)$$

またテーパ縁での鉛直応力 $\sigma_y$ は鉛直方向の力のつり合い条件

$$(\sigma_y)_{y=h} b dx = \int_h^{h+dh} (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) b d\eta$$

から

$$(\sigma_y)_{y=h} = \sigma_c (h+\mu) (dh/dx)^2 / (h-\mu) \quad (39)$$

となる。

(26)式を用いると(38), (39)式は

$$(\tau_{xy})_{y=h} = \sigma_1 (dh/dx) \tag{38-1}$$

$$(\sigma_y)_{y=h} = \sigma_1 (dh/dx)^2 \tag{39-1}$$

とかけるから Fig. 3 のような一様なテーパー, すなわち  $dh/dx = \tan\alpha$  : (一定) のはりでは,  $[(\tau_{xy})_{y=h}]_{\max}$  および  $[(\sigma_y)_{y=h}]_{\max}$  は  $\sigma_1$  が最大となる  $x = x_m = h_0 / \tan\alpha$  の断面と一致し, それぞれの最大値を前節と同様  $\tau_h, \sigma_{yh}$  と記す。

塑性域発生後の Fig. 3 のテーパーはりにおける荷重点のたわみ  $\delta$  は,  $\tan\alpha$  が小さいから, 直線はりにおける次の関係式<sup>8)</sup> が近似的に適用出来るものとする。次式で  $\rho$  はたわみ曲線の曲率半径を表わす。

$$\delta_b = \int_0^{\ell/2} \frac{x}{\rho} dx \tag{40}$$

Fig. 4 の線ひずみ  $\epsilon$  の分布から

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_1}{h-\lambda} = \frac{\sigma_1}{E_x(h-\lambda)}$$

となり, (26) および(27) の関係を用いると

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sigma_c h}{E_x(h-\mu)^2}$$

したがって(40)式は

$$\delta_b = \frac{2\sigma_c}{E_x} \int_0^{\ell/2} \frac{x h}{(h-\mu)^2} dx \tag{41}$$

とかける。(41)式において  $\mu \rightarrow 0 : \sigma_c \rightarrow \sigma_2 = 6M/bh^2$  とすると

$$\delta_b = \int_0^{\ell/2} x \frac{12M}{Ebh^3} dx = \int_0^{\ell/2} x \frac{M}{EI} dx \tag{42}$$

となって, 全域弾性の場合のよく知られている式が得られる。

(41)式によって一部に塑性域が発生した後の曲げたわみを計算するには, Fig. 5 を参照して

$$\delta_b = \int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^a + \int_a^{x_3} + \int_{x_3}^{\ell/2} \equiv \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \tag{43}$$

としなければならない。 $\delta_0, \delta_2, \delta_3$  は断面全体がなお弾性にとどまる ( $\mu=0$ ) 部分の, また  $\delta_2, \delta_4$  は断面の圧縮側に塑性域が発生 ( $\mu \neq 0$ ) している部分の  $\delta_b$  に対する寄与分を表わす。なお,  $0 \leq x \leq a$  では  $x = (h-h_0)/\tan\alpha$ ,  $dx = dh/\tan\alpha$  として,  $x$  についての積分を  $h$  についての積分に変換すれば計算が容易になる。結果を整理して示すと次の(44)~(48)式のようになる。

$$\delta_0 = \frac{6P}{E_x b \tan^3 \alpha} \left[ f(h) \right]_{h_0}^{h_1} \tag{44}$$

$$f(h) = \log h + 2(h_0/h) - \frac{1}{2}(h_0/h)^2 \tag{44-1}$$

$$\delta_1 = \frac{8\sigma_c}{E_x \tan^2 \alpha} \left[ F_4(h) - h_0 F_3(h) \right]_{h_1}^{h_2} \tag{45}$$

$$u(h) = Ah^2 + Bh + C; A=3, B=-4yh_0, C=4yh_0^2 \tag{45-1}$$

$$F_4(h) = \int \frac{h^4}{u^2} dh = \frac{h^3}{Au} - \frac{2B}{A} F_3(h) - \frac{3C}{A} F_2(h) \tag{45-2}$$

$$F_3(h) = \int \frac{h^3}{u^2} dh = [(3AC - B^2)Bh + C(2AC - B^2)]/A^2qu \\ + (1/2A^2) \log u - [B(6AC - B^2)/2A^2q] F_0(h) \\ ; q = 4AC - B^2 (> 0) \quad (45-3)$$

$$F_2(h) = \int \frac{h^2}{u^2} dh = [(B^2 - 2AC)h + BC]/Aqu + (2C/q) F_0(h) \quad (45-4)$$

$$F_0(h) = \int \frac{dh}{u^2} = (2/\sqrt{q}) \tan^{-1}[(2Ah + B)/\sqrt{q}] \quad (45-5)$$

$$\delta_2 = \frac{6P}{E_x b \tan^3 \alpha} \left( f(h) \right)_{h_2}^{h_a} \quad (46)$$

$$\delta_3 = \frac{2P}{E_x b h_a^3} (x^3 - a^3) \quad (47)$$

$$\delta_4 = \frac{8h_a \sigma_c}{9E_x} \left( \frac{Q}{P} \right)^2 \left( \varphi(x) \right)_{x_3}^{\ell/2} \quad (48)$$

$$\varphi(x) = \log(Qh_a - Px) + 1/(1 - Px/Qh_a) \\ ; Q = bh_a \sigma_c \quad (48-1)$$

次に、せん断による付加たわみ  $\delta_s$  を  $\delta_b$  のそれに対応して

$$\delta_s = \delta_0' + \delta_1' + \delta_2' + \delta_3' + \delta_4' \quad (49)$$

として求める。 $\delta'$  はその断面の平均せん断ひずみ  $\bar{\gamma} = S/b(h - \mu) G_{xy} = P/2b(h - \mu) G_{xy}$  を用い、次の様にして計算する。

$$\delta' = k \int_{x'}^{x''} \bar{\gamma} dx = k \frac{P}{2G_{xy}b} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(h - \mu)} \quad (50)$$

(50) 式の  $k$  は全域弾性、すなわち全域で  $\mu = 0$  の場合、(50) 式による値が(21) 式のそれと一致するための係数であり、テーパー部に対する  $k$  を  $k_1$  とすると

$$k_1 = 1.2 [4 \log(h_a/h_0) - 2(h_0/h_a)^2 + 7(h_0/h_a) - 5] / \log(h_a/h_0) \quad (51)$$

$$h_a = 40, h_0 = 15 \text{ に対して } k_1 = 1.5502 \quad (51-1)$$

中央平行部に対する  $k$  を  $k_2$  とすると

$$k_2 = 1.2 \quad (51-2)$$

とする必要がある。

(50) 式により (49) 式の各  $\delta'$  を求めると次の (53) ~ (57) 式が得られる。

$$\delta_0' = k_1 (P/2G_{xy}b \tan \alpha) \log(h_1/h_0) \quad (53)$$

$$\delta_1' = k_1 (P/3G_{xy}b \tan \alpha) \left( \psi(h) \right)_{h_1}^{h_2} \quad (54)$$

$$\psi(h) = \frac{1}{2} \log[h^2 - Q'(h - h_0)] + (Q'/S') \tan^{-1}[(2h - Q')/S'] \\ ; Q' = P/b\sigma_c \tan \alpha, S' = \sqrt{Q'(4h_0 - Q')} \quad (54-1)$$

$$\delta_2' = k_1 (P/2G_{xy}b \tan \alpha) \log(h_a/h_2) \quad (55)$$

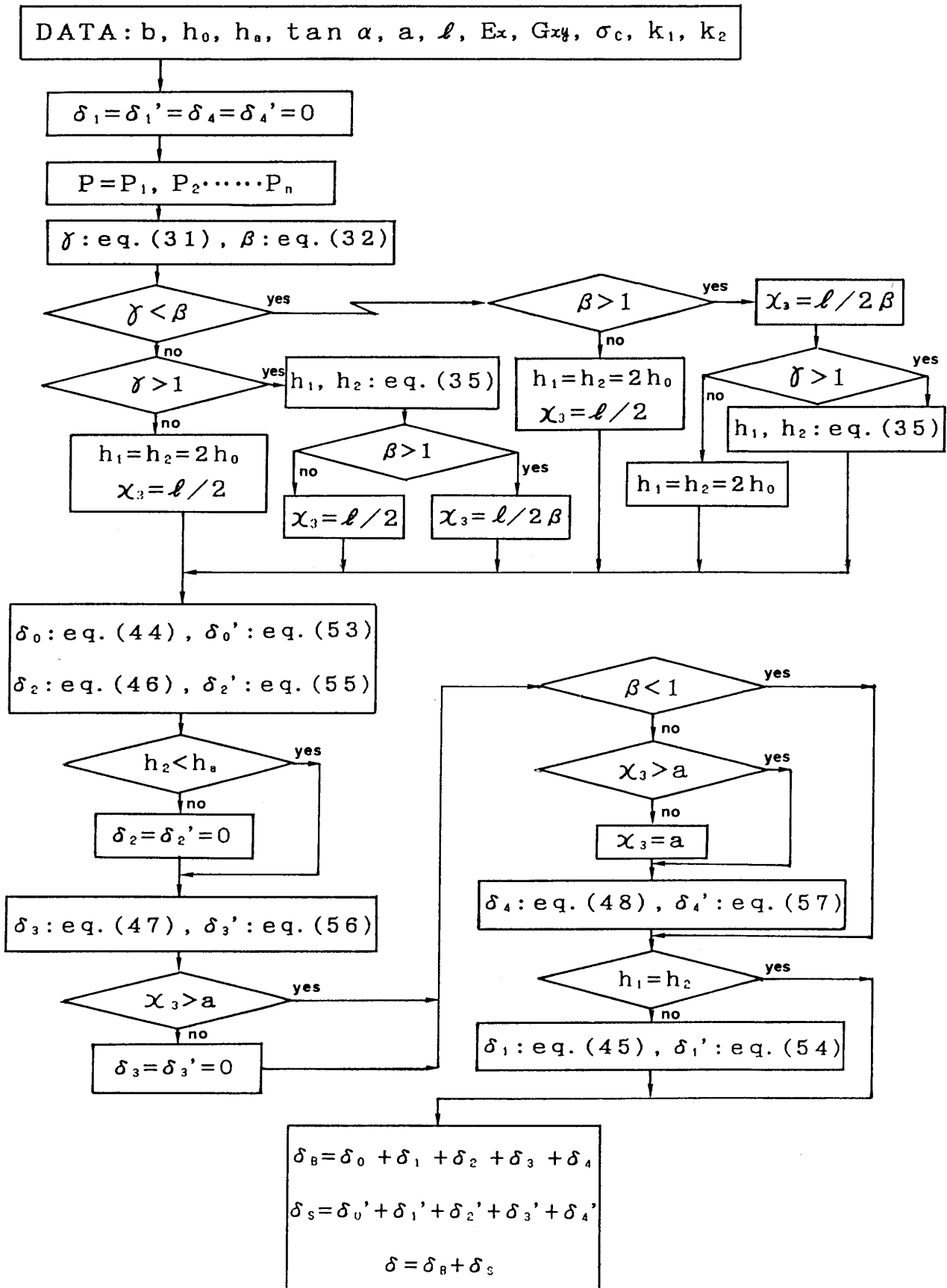
$$\delta_3' = k_2 (P/2G_{xy}bh_a) (x_3 - a) \quad (56)$$

$$\delta_4' = k_2 (\sigma_c h_a / G_{xy}) \log[(\sigma_c b h_a^2 - Px_3) / (\sigma_c b h_a^2 - P\ell/2)] \quad (57)$$

(44) ~ (48) 式および (53) ~ (57) 式を用いて、荷重  $P$  とたわみ  $\delta$  の関係を求める計算手順は次の Flow-Chart に従う。



The Flow Chart for the Calculation of Deflection in the Tapered Beam.



#### IV. たわみについての計算値と測定値の比較

スギの気乾材を用い、断面  $20 \times 40$ 、長さ (L 方向) 460 の試験体を作製し、幅  $b=40$ 、高さ  $h=20$ 、スパン  $\ell=420$  とし、対称 2 点荷重方式により比例限内の曲げ試験を行なった。純曲げの部分で区間長  $a$  に対するたわみ  $\delta$  と荷重の関係測定し

$$E_x = (3a^2/2bh^3) (M/\delta) \quad (58)$$

によってヤング率  $E_x$  を求めた。M は荷重 P に対応する純曲げ部分での曲げモーメントである。

次にこの試験体を Fig. 3 に示す対称両テーパーはりに加工し、中央集中荷重による曲げ試験を行い、スパン中央ではり下面の変位  $\delta$  と荷重との関係を測定した。テーパーは  $\tan \alpha = 0.125$  と  $0.150$  とし、他の諸元は (23) 式の通りである。

(22) 式の  $\delta_V$  を無視すると、比例限内において

$$\delta = \delta_B + \delta_S = (6P/bE_x) g_B + (3P/5bG_{xy}) g_S = (6P/bE_x) \left[ g_B + \frac{1}{10} (E_x/G_{xy}) g_S \right]$$

したがって

$$E_x/G_{xy} = 10 [(\delta/P) (bE_x/6 - g_B)] / g_S \quad (59)$$

の関係が成り立つ。

(23) 式の諸元で

$\tan \alpha = 0.125$  に対しては

$$E_x/G_{xy} = 10 [(\delta/P) (20E_x/6) - 88.725] / 10.387 \quad (59-1)$$

$\tan \alpha = 0.150$  に対しては

$$E_x/G_{xy} = 10 [(\delta/P) (20E_x/6) - 71.682] / 9.5304 \quad (59-2)$$

となる。

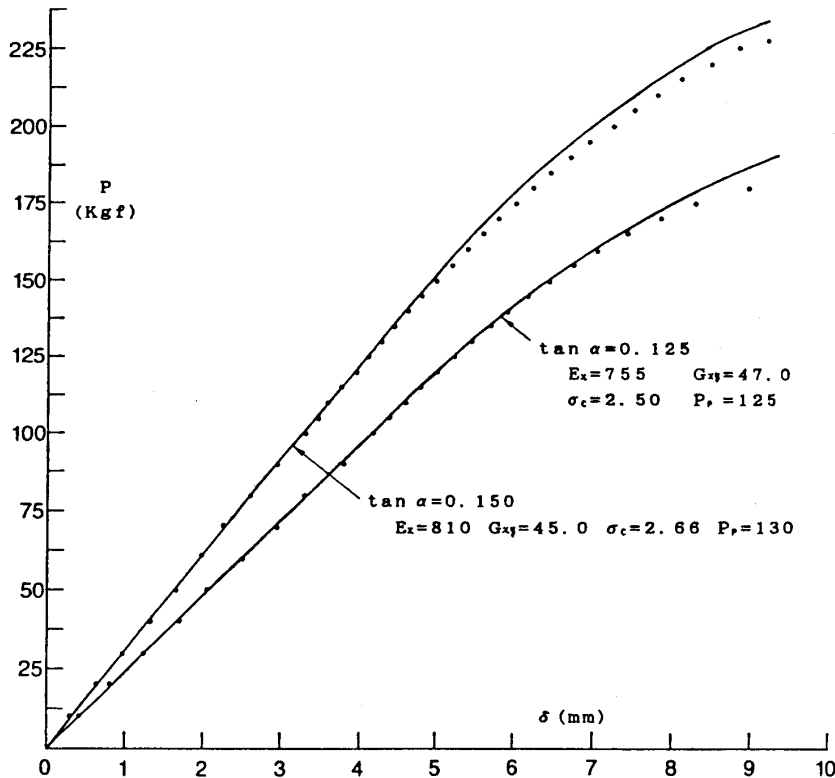


Fig. 6 Relationship between load (P) and deflection ( $\delta$ ) in a tapered wood beam.

— : calculated value  
 · : measured value

テーパーはりについて測定されたP- $\delta$ の直線部の勾配P/ $\delta$ を(59-1), または(59-2)式に代入すれば $E_x/G_{xy}$ の比が定まる。この比と既に測定されている $E_x$ とから $G_{xy}$ が算定される。またP- $\delta$ の比例限荷重 $P_p$ より,  $\tan\alpha=0.125$ の場合には(31)式の $\gamma=1$ として

$$\sigma_c = 3P_p / 4bh_0 \tan\alpha \quad (60-1)$$

$\tan\alpha=0.150$ の場合には, (32)式の $\beta=1$ として

$$\sigma_c = 3P_p \ell / 2bh_a^2 \quad (60-2)$$

の関係から圧縮強さ $\sigma_c$ が定まる。

Fig. 6に $\tan\alpha=0.125$ と $\tan\alpha=0.150$ のテーパーはりについて, 計算値(実線)と測定値( $\cdot$ )の各1例を示す。

上述の方法によるものであるから, 比例限以下では計算値と測定値は当然に一致する。荷重が比例限を超えると, III節による計算式と計算手順による値は測定値にかなりよく近似した値を与えるが, 荷重が増大するにつれてたわみの測定値が計算値より大きくなる。ここでの実験ではスパン中央下面の変位をダイヤルゲージで測定したので, 支点断面の横圧縮量も測定値に含まれ<sup>9)</sup>, また圧縮側における応力馳緩の問題<sup>9)</sup>もある。なおII, III節を通じここでの仮定では,  $x=a$ およびスパン中央断面で,  $\tau_{xy}$ の分布は不連続になるからその影響(それはたわみを小さくする方向に働く)もあり, またFig. 2に示される $\sigma_x$ の $s_x$ に対する誤差を考えれば, II, III節の計算式は実用的な近似式に過ぎない。

## V. 木材のせん断強さの推定

前節でみたようにたわみの計算値と測定値は破壊に近づくとつれて, そのかい離が大きくなる。したがって応力分布の仮定が, 特に破壊時まで妥当であるとは言い難いが, 概略的な近似として木材のせん断強さの推定を試みてみる。

木材が如何なる条件のもとで破壊するかについては, 今なお様々な論議がなされているが<sup>9)</sup>, ここでは複合応力状態のもとでのNorrisの破壊基準<sup>10,11)</sup>である(60)式を考える。

$$(\sigma_x/F_x)^2 - \sigma_x\sigma_y/F_xF_y + (\sigma_y/F_y)^2 + (\tau_{xy}/F_{xy})^2 = 1 \quad (60)$$

この式で $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ は直交異方体の力学的主軸をX, YとしX方向引張り強さ, Y方向引張り強さ, およびX, Yに関するせん断強さを表す。ここでの実験ではXは木材の繊維方向, Yは繊維に直角方向である。(60)式を $F_{xy}$ について解くと

$$F_{xy} = \tau_{xy} [1 - (\sigma_x/F_x)^2 + (\sigma_x\sigma_y/F_xF_y) - (\sigma_y/F_y)^2]^{-1/2} \quad (61)$$

となり, Fig. 3のテーパーはりでは, テーパー縁に生ずる最大応力が(26), (38-1), (39-1)より

$$\sigma_x = \sigma_1 = \tau_h / \tan\alpha, \quad \sigma_y = \tau_h \cdot \tan\alpha, \quad \tau_{xy} = \tau_h$$

であるから

$$F_{xy} = [1/\tau_h^2 - 1/(\tan\alpha F_x)^2 + 1/F_x \cdot F_y - (\tan\alpha/F_y)^2]^{-1/2} \quad (62)$$

とかける。また, 最大縁応力は $x=h_0/\tan\alpha$ ,  $h=2h_0$ の断面に生ずることを考えると(29)式の中のMは $M=Ph_0/2\tan\alpha$ となり, (26)および(38-1)式から

$$\tau_h = \sigma_c \tan\alpha (4bh_0\sigma_c \tan\alpha + 3P) / 3(4bh_0\sigma_c \tan\alpha - P) \quad (63)$$

とかける。(63)式のPに破壊荷重を代入するとテーパーはり破壊時の最大の $\tau_h$ が定まり, (62)式からせん断強さ $F_{xy}$ が計算される。

結果をTable 2に示す。実験に用いた材料は吉野産のスギ材で, 3本の角材(110×110)から試験体を切り出した。試片番号の最初の1ケタは角材の番号を示す。20×40断面のテーパーはり用の試験体2個と, 木口面で隣接する部分より $b \times h=20 \times 20$ 断面の直線はりを別に切り出し, 純曲げ試験

Specimen No.	$\tan\alpha$	$\sigma_c$	$F_x$	$F_y$	P	$\tau_h$	$F_{xy}$	$F'_{xy}$	
111	0.125	3.02	8.66	0.300	217	0.589	0.668	0.733	
112		2.67	8.66	0.300	164	0.420	0.446	0.464	
113		2.50	6.71	0.300	178	0.481	0.556	0.605	
114		2.56	6.71	0.300	171	0.449	0.509	0.545	
211		2.64	6.58	0.447	198	0.550	0.692	0.756	
212		2.13	6.58	0.447	151	0.407	0.455	0.472	
213		2.50	7.14	0.447	204	0.601	0.757	0.835	
214		2.57	7.14	0.447	181	0.486	0.558	0.588	
311		2.51	8.95	0.390	178	0.480	0.518	0.539	
312		2.82	8.95	0.390	221	0.632	0.727	0.790	
313		3.19	6.87	0.390	211	0.552	0.675	0.741	
121		0.150	2.67	8.66	0.300	224	0.600	0.656	0.718
122			2.66	8.66	0.300	228	0.617	0.679	0.748
123	2.45		6.71	0.300	173	0.439	0.474	0.503	
124	2.38		6.71	0.300	202	0.544	0.615	0.683	
221	2.40		6.58	0.447	203	0.546	0.625	0.671	
222	2.46		6.58	0.447	209	0.563	0.651	0.704	
223	2.40		7.14	0.447	192	0.504	0.553	0.582	
224	2.16		7.14	0.447	164	0.423	0.451	0.466	
321	2.99		8.95	0.390	216	0.550	0.589	0.620	
322	2.89		8.95	0.390	247	0.667	0.739	0.805	
323	2.34		6.87	0.390	197	0.528	0.591	0.633	

Table 2. The estimated shearing strength ( $F_{xy}$ ) of wood by means of bending the tapered beams. $\sigma_c$  : compressive strength $F_x$  : tensile strength parallel to grain $F_y$  : tensile strength perpendicular to grain $\tau_h$  : maximum shearing stress existing in a tapered beam at failure $F'_{xy}$  : estimated shearing strength by means of equation (61) without interaction term.

によって破壊曲げモーメント  $M_0$  を測定し

$$F_x = \sigma_c (bh^2\sigma_c + 6M_0) / 3(bh^2\sigma_c - 2M_0) \quad (63)$$

によって、2個のテーパーはりに対応する引張り強さを定めた。また、上記のテーパーはりおよび純曲げ用の試片を採取した部分とL方向に隣接する部分から横引張り試験体およびJISせん断試験体を切り出し、横引張り強さ  $F_y$  およびJISせん断強さ  $\tau_c$  を測定した。

Table 2の  $F_{xy}$  は  $\tan\alpha=0.125$  と  $\tan\alpha=0.150$  でほとんど差がないので、一括してその平均値および標準偏差を求め、 $\tau_c$  のそれと対比させると次のようになる。

$$\text{No. 1 角材 } F_{xy}=0.575\pm 0.092 \quad \tau_c=0.536\pm 0.083$$

$$\text{No. 2 } \sphericalangle \quad 0.593\pm 0.109 \quad 0.581\pm 0.070$$

$$\text{No. 3 } \sphericalangle \quad 0.604\pm 0.088 \quad 0.536\pm 0.064$$

データ数が少ないので結論は保留すべきであるが、今回の結果からは  $F_{xy}$  と  $\tau_c$  の間に明確な差はみられなかった。

破壊基準(60)式の左辺第2項の交絡項を考えない場合は、対応する(62)式の右辺[ ]内の第3項

が消える。そのときの値を  $F'_{xy}$  で表わすと Table 2 の最後のらんのようになり、平均値および標準偏差は

No. 1	角材	$F'_{xy}=0.625\pm 0.111$
No. 2	〃	$0.634\pm 0.131$
No. 3	〃	$0.688\pm 0.107$

のようになる。

Table 2 の  $\tau_h$  はテーパーはりが破壊するとき、テーパー縁に生じていたせん断応力の最大値である。ここでのテーパーはりはすべて明瞭なせん断破壊を示したから、もしせん断破壊が、同時に存在する他の応力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  に影響されないとすれば、この  $\tau_h$  がそのはり材料のせん断強さということになる。通常のはりの設計に当って、もっとも安全を期するなら、この  $\tau_h$  をその基準値にとることも考えられる。

なお、木材のテーパーはりで、テーパー縁が圧縮側にある場合にはせん断破壊を生じない<sup>5)</sup>。(61)式は等方体に対する Mises の条件を直交異方体に拡張したものであって<sup>11)</sup>,  $F_x$ ,  $F_y$  の正負には本来無関係のものである。このことから木材の破壊基準として(61)式には問題がある。複合応力のもとでの木材の破壊基準の解明について、今後より精緻な理論、および広範な実験的研究が望まれる。

## VI. 要 約

この研究では木材のテーパーはりにおける応力、たわみ、およびせん断破壊強さについて検討された。Fig. 3 の左右対称型両テーパーはりを対象にして、全域が弾性の範囲にある応力の計算式は(9), (10), (11)式、またたわみの計算式は(20), (21), (22)式で示される。荷重が比例限界を超えると、木材のはりでは圧縮側に塑性域が発生する。圧縮の応力—ひずみ線図に完全弾塑性型を仮定すると、塑性域発生後の応力分布は Fig. 4 のようになり、応力は(30), (37), (39)式で計算される。スパン中央、荷重点の曲げたわみは(43)~(48)式、せん断付加たわみは(53)~(57)式となり、それらを用いての計算手順は p.21 の Flow-Chart に示される。

たわみについての計算値と測定値の比較の1例が Fig. 6 に示される。

引張り側にテーパー縁のある Fig. 3 のテーパーはり、すべてテーパー縁でのせん断破壊によって破壊した。破壊荷重から、その木材のせん断強さ  $F_{xy}$  を(62)式にもとづいて計算すると Table 2 のような値となり、同じ角材から得られた JIS せん断試験体による強さ  $\tau_c$  と殆ど差が認められなかった。しかし(62)式が導かれた破壊基準は Norris の(60)式であるが、複合応力状態での木材の破壊基準はなお確定したものではないので、今後の研究の進展が望まれる。ここでの結果および考察から、現段階において、木材の通常のはりの設計に際して、Table 2 の  $\tau_h$  の値を基準にすればそれは十分に安全な値であると考えられる。

## 引用文献

- 1) 大草克己：直交異方弾塑性体としての木材の棒の振り，木材学会誌，Vol. 23, No. 5, 217-227 (1977)
- 2) 大草克己：木材のせん断に関する弾塑性論的研究（第3報）椅子型（JIS）せん断試験体の応力特異性とエネルギー解放率，鹿大農学術報，No. 30, 201-215 (1980)
- 3) Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier：Theory of Elasticity, 3rd. ed., p. 109-112, McGraw-Hill, New York (1970)
- 4) Maki, A. C. and E. W. Kuenzi：Deflection and Stresses of Tapered Wood Beams, U. S. For. Ser. Res. Paper, FPL 34, 1-54 (1965)

- 5) 沢田稔, 丸山武: 木質テーパービームに関する研究 (第1報) 集成テーパービームの曲げ剛性と強度, 北大農演報, Vol. 27, No. 2, 395-427 (1970)
- 6) 大草克己: 中央集中荷重方式による木材曲げ試験体の応力分布とたわみ一はりの初等曲げ理論の精度について, 鹿大農演報, No. 16, 25-59 (1988)
- 7) 大草克己: 木材のせん断に関する弾塑性論および破壊力学的研究 (第2報) 木材はりの水平せん断, 鹿大農演報, No. 7, 29-66 (1979)
- 8) 沢田稔: 木材梁に関する研究 (第3報) 矩形断面梁の荷重—撓曲線, 林試研報, No. 77, 69-102 (1955)
- 9) 増田稔: 木材の破壊条件に関する理論的考察, 京大農演報, No. 58, 241-250 (1986)
- 10) Norris, C. B.: Strength of Orthotropic Materials Subjected to Combined Stresses, U. S. For. Prod. Lab. Rept. No. 1816, 1-19 (1950)
- 11) 大草克己: 木材強度試験体(割裂・横引張・部分横圧縮) 応力の数値的解析, 鹿大農演報, No. 4, 1-84 (1976)

### Summary

Tapered wood beams having taper edge on the tension side break due to shear along the grain. In this work, it was undertaken to estimate the shearing strength of wood by means of bending the tapered wood beams.

The normal stress ( $\sigma_x$ ) in the wedge under a concentrated load ( $P$ ) at its apex as shown in Fig. 1 can be calculated by equation (3) based on the exact elastic theory. When the same normal stress is calculated by equation (4) based on the elementary bending theory, its value ( $\sigma_x$ ) very closely approximates to the above exact value as shown in Fig. 2, provided the slope of the taper is gentle.

For the symmetrical double tapered wood beam as shown in Fig. 3, if its total region retains its elasticity, bending ( $\sigma_x$ ), shearing ( $\tau_{xy}$ ), and vertical ( $\sigma_y$ ) stress are calculated by equations (9), (10), and (11), respectively. And, the deflection of the central loading point is calculated by equations (20) ~ (22).

If the maximum value of the elastic compressive stress in the tapered beam ( $\sigma_m$ : eq. (13) or  $\sigma_b$ : eq. (14)) exceeds the yielding compressive stress ( $\sigma_c$ ) of wood, the plastic zone occurs on the compression side of the beam, and the distribution of stresses becomes such as is shown in Fig. 4. After the occurrence of the plastic zone, the bending stress ( $\sigma_x$ ), and the shearing stress ( $\tau_{xy}$ ) in the tapered wood beam are calculated by equations (30), and (37), respectively, and the vertical stress ( $\sigma_{y-h}$ ) at the taper edge is calculated by equation (39).

When the plastic zones occur in the tapered beam as shown in Fig. 5, the central bending deflection ( $\delta_b$ ) is calculated by equations (43) ~ (48), and the central shearing deflection ( $\delta_s$ ) is obtained by equations (49), and (53) ~ (57). The calculation procedure of the deflection may follow the flow chart as shown in page 21.

The comparison of the calculated value to the measured value of the deflection is shown in Fig. 6. The calculated value closely approximates to the measured value. Therefore we may conclude that our assumption on the distribution of stresses in the tapered wood beam is appropriate.

In the test beams of *Sugi* (Japanese cedar), the maximum failure load ( $P$ ) were measured, and equation (60) was applied as the failure criterion of orthotropic materials for combined stresses in a two-dimensional stress system. Equation (62) is derived from equation (60). The estimated value of shearing strength ( $F_{xy}$ ) of wood may be obtained by equations (62) or (63).

The results obtained by such a way are shown in Table 2.

$F'_{xy}$  in Table 2 is the estimated value obtained from equation (61) without the interaction term. Since the failure criterion of wood has not yet been established, it is necessary that the studies on the failure criterion for the combined stresses be further developed. In this phase of research, it seems to be appropriate that  $\tau_h$  in Table 2 be adopted as a standard for the shearing strength of wood in the design of the ordinary wood beams.