入試における募集単位の大きさの問題

磯 川 幸 直

(2001年10月15日 受理)

On problem of volumes of recruitment in entrance examination

ISOKAWA Yukinao

1 はじめに

大学入試において，募集単位を細分化して実施することは，様々な問題を引き起こすおそれがある。細分化された募集単位は，大学入試前に入学後の専攻を決めることを受験生に強制し，専門的知識の土台にあるべき幅広い興味と関心を奪うことになりかねない。さらに細分化された募集単位は，本来ならば合格できる実力をもった受験生が，同じ募集単位に同程度の実力をもった受験生がたまたま多く受験することにより，不合格になる可能性を大きくする。この後者の可能性は，入試を実施する側にとっては，募集人数を満たすために成績順位の低い受験生まで合格させなければならない事態を引き起こす。本論文では，この後者の弊害について定量的な研究を行う。

第２節では，このような定量的な研究を行うための方法について説明する。同一の試験科目および試験問題を課するいくつかの学科を考え，それらの学科でまとめて募集する場合と，それぞれの学科ごとに募集する場合を比較する。ただし学科ごとに募集する場合に，各受験生がそれぞれの学科を受験する確率は，入試成績とは無関係であると仮定する。この仮定のもとで，次の２つの量を用いて比較を行なう：

・学科でまとめて募集する場合には合格するが，学科ごとに募集する場合には不合格となる受験生の割合。この割合を，不合格者割合と呼ぶことにする。

・学科ごとに募集する場合に合格とする最低得点の受験生の順位と，学科でまとめて募集する場合に合格とする最低得点の順位との比。この比を，境界順位比と呼ぶことにする。

第３節では，第２節で説明した方法にしたがって，数学的な解析を行なう。その結果，不合格者割合と境界順位比の平均値および標準偏差（ゆらぎ）の大きさを決める主な要因は，次の２つである事を示す：

・それぞれの学科の募集人数の比と，受験生がそれぞれの学科を志望する傾向の比の，アンバランスの度合。

・関係するすべて学科の募集人数の合計。

具体的には，アンバランスの度合が大きいほど，また募集人数の合計が小さいほど，不合格者割合と境界順位比の平均値および標準偏差は大きくなる。すなわち募集区分の大きさを大きくすることが望ましくなる。

第４節では，第３節で解析した結果の意味について議論する。さらに募集区分の仕方の問題と，複数志望制との関連について論ずる。

2 研究方法

2.1 学科数が２つの場合

Ａ学科およびＢ学科の２つの学科を考え，学科の募集人員数はそれぞれa，b人であるとする。さらに学科ごとに募集を行なう場合に，ランダムに選んだ受験生がＡ学科を受験する確率をp，Ｂ学科を受験する確率をqとする（もちろん$p+q=1$）。そしてこれらの確率について次の仮定をおく：

「確率p，qは受験生の試験成績とは無関係である」。

はじめに不合格者割合を定義する。学科ごとに募集を行なう場合に，両学科の受験生の試験成績を１つにまとめた仮想の順位表を作る。両学科を合わせて募集を行なう場合には，この順位表は仮想のものでなく実際に用いられる順位表となるが，この順位表において順位$a+b$までが合格となる。一方，学科ごとに募集を行なう場合，この$a+b$人のうち，たまたまa人より多くの受験生が（X人とする）Ａ学科を志望する可能性や，たまたまb人より多くの受験生が（Y人とする）Ｂ学科を志望する可能性がある。このとき$X-a$人または$Y-b$人が，学科を合わせて募集する場合には合格しているはずなのに，学科ごとに募集を行なったことにより不合格となる受験生の人数となる。不合格者割合は，この人数を$a+b$で割った量と定義する。入試においては，この不合格者割合がより小さくなる制度が望ましい。

次に境界順位を定義する。学科ごとに募集を行なう場合に，両学科がともに募集人員を満たすために，仮想の順位表において，順位Wまでの受験生を合格としなければならなかったとする。もちろん境界順位Wは，かならず$a+b$以上である。境界順位比は，この境界順位Wと$a+b$の比$W/(a+b)$で定義する。入試においては，この境界順位比がより小さくなる制度が望ましい。

ところで，不合格者割合や境界順位比は，入試が行なわれるたびに変化する量である。したがっ

てこれらは偶然的に変動する量であると考えることができる。そこで次節では，これらの量自体ではなく，これらの平均値および標準偏差を計算する。

2.2 学科数が３つの場合

学科数が３つの場合も同様に考察することができる。Ａ学科，Ｂ学科，Ｃ学科の３つの学科を考え，学科の募集人員数はそれぞれa，b，c人であるとする。さらに学科ごとに募集を行なう場合，ランダムに選んだ受験生がＡ学科を受験する確率をp，Ｂ学科を受験する確率をq，Ｃ学科を受験する確率をrとする（もちろん$p+q+r=1$）。そしてこれらの確率について次の仮定をおく：

「確率p，q，rは受験生の試験成績とは無関係である」。

不合格者割合および境界順位比は，学科数が２つの場合と同様に定義することができる。

3 募集区分の大きさがもたらす影響の解析

3.1 学科数が２つの場合

はじめに不合格者割合と境界順位比の平均値および標準偏差の大きさに関して一般的に成り立つ法則を述べる（それらの法則の数学的な証明は付録で述べる）。Ａ学科，Ｂ学科の募集人数の募集人数の合計に対する割合をそれぞれα，βで表す：

$$\alpha=\frac{a}{a+b},\beta=\frac{b}{a+b}$$

このとき不合格者割合の平均値に関して次のことを示すことができる。

・確率pが募集人数の割合αと異なる場合，不合格者割合の平均値は，その差$|p-\alpha|$に近似的に等しい。

・確率pが募集人数の割合αと等しい場合，不合格者割合の平均値は，募集人数の合計$a+b$の平方根に，近似的に反比例する。

すなわち不合格者割合の平均値は，受験生がその学科を志望する度合と，募集人数がアンバランスであるほど大きくなる。たまたまこの両者のバランスがとれている場合，募集人数の合計が少ないほど，不合格者割合の平均値は大きくなる。

また不合格者割合の標準偏差に関しては次のことを示すことができる。

・不合格者割合の標準偏差は，募集人数の合計$a+b$の平方根に，近似的に反比例する。

すなわち不合格者割合は，募集人数の合計が少ないほど，大きく変動する。

次に境界順位比について解析する。まず境界順位比の平均値に関して次のことを示すことができる。

・確率pが募集人数の割合αと異なる場合，境界順位比の平均値は，比α/pと比β/qの大きい方に，近似的に等しい。

・確率pが募集人数の割合αと等しい場合，不合格者割合の平均値は，近似的に1に等しい。

すなわち境界順位比の平均値は，不合格者割合の平均値の場合と同様，受験生がその学科を志望する度合と，募集人数がアンバランスであるほど大きくなる。また境界順位比の標準偏差は，

・確率pが募集人数の割合αと異なる場合，境界順位比の標準偏差は，募集人数の合計$a+b$の平方根に，近似的に反比例する。

・確率pが募集人数の割合αと等しい場合，不合格者割合の平均値は，募集人数の合計$a+b$の1/4乗根に，近似的に反比例する。

すなわち境界順位比は，募集人数の合計が少ないほど，大きく変動する。

以上の一般的な法則を，具体的な場合に詳しく例証しよう。

例1　$p=1/2$，すなわち各受験生がA学科とB学科を受験する確率が等しい場合。

この場合に，両学科の募集人数を横軸および縦軸とし，不合格者割合の平均値を高さとして描いたグラフを，図1に示す。図1より，次の事実を読みとることができる。

・両学科の募集人数が異なるほど，不合格者割合の平均値は大きくなる。たとえば$a=10$，$b=10$の場合は約0.088と小さいが，$a=20$，$b=10$の場合は約0.169となり，$a=30$，$b=10$の場合は約0.250と，ほぼ1/4の受験生が，学科別に募集したことが原因で不合格となる。

・募集人数の合計が小さいほど，不合格者割合の平均値は大きくなる。たとえば$a=30$，$b=30$の場合は約0.051，$a=20$，$b=20$の場合は約0.063，$a=10$，$b=10$の場合は約0.088であるが，$a=5$，$b=5$になるとは約0.123と，1割を越える。

また，やはり両学科の募集人数を横軸および縦軸とし不合格者割合の標準偏差を高さとして描いたグラフを，図2に示す。図2より，不合格者割合の平均値の場合と同様の事実を読みとることができる。ただし変化のこまかな様子は少し異なり，不合格者割合の平均値は両学科の募集人数の差に，不合格者割合の標準偏差は募集人数の合計に，より敏感に反応する。

次に，両学科の募集人数を横軸および縦軸とし，境界順位比の平均値を高さとして描いたグラフを，図3に示す。図3より，境界順位比の平均値も，不合格者割合の平均値と，同様に変化する傾向があることが読み取れる。

・両学科の募集人数が異なるほど，境界順位比の平均値は大きくなる。たとえば$a=10$，$b=10$の場合は約1.176，$a=20$，$b=10$の場合は約1.338，$a=30$，$b=10$の場合は約1.500となる。この最後の$a=30$，$b=10$の場合，学科別に募集したことが原因で，学科を合わせて募集した

場合と比べて約1.5倍ほど成績順位が低い受験生まで合格としなければいけないことを意味している。

・募集人数の合計が小さいほど，境界順位比の平均値は大きくなる。たとえば$a=30$，$b=30$の場合は約1.103，$a=20$，$b=20$の場合は約1.125，$a=10$，$b=10$の場合は約1.176，$a=5$，$b=5$の場合は約1.246となる。

また，やはり両学科の募集人数を横軸および縦軸とし境界順位比の標準偏差を高さとして描いたグラフを，図4に示す。図4より，境界順位比の平均値の場合と同様の事実を読みとることができる。ただし変化のこまかな様子は少し異なり，不合格者割合の平均値は両学科の募集人数の差に，不合格者割合の標準偏差は募集人数の合計に，より敏感に反応する。

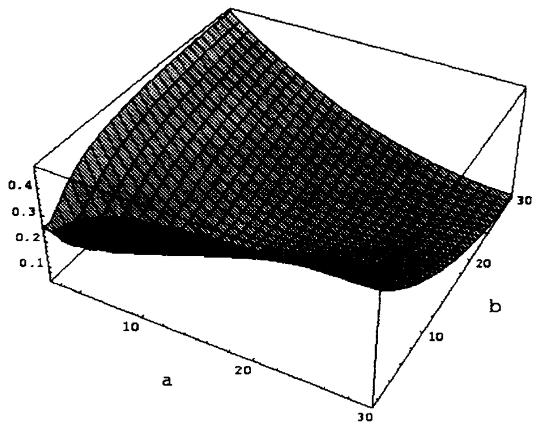

図1．不合格者割合の平均値：$p=1/2$の場合

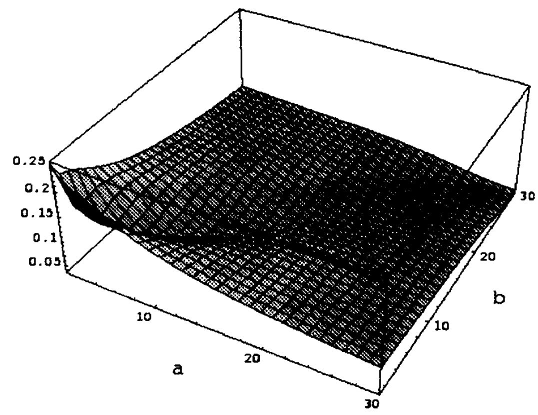

図2．不合格者割合の標準偏差：$p=1/2$の場合

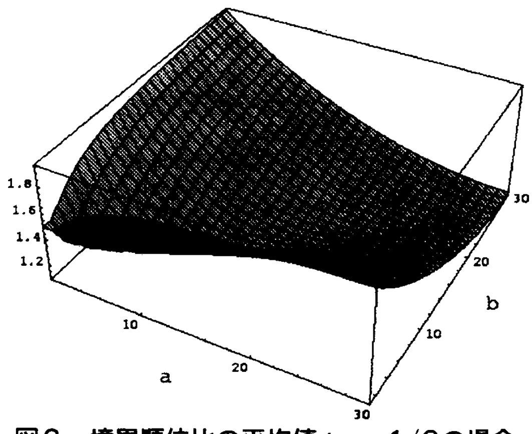

図3．境界順位比の平均値：$p=1/2$の場合

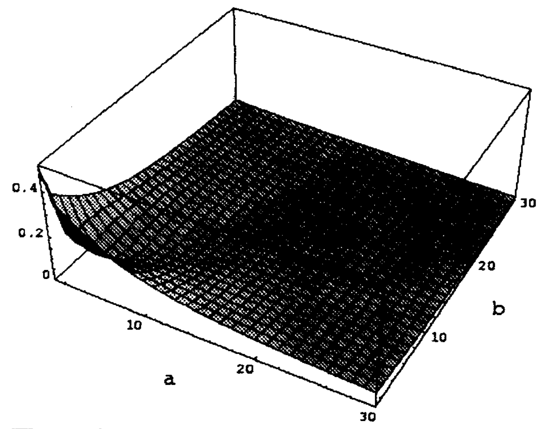

図4．境界順位比の標準偏差：$p=1/2$の場合

例2　$a=b$，すなわち両学科の募集人員数が等しい場合。

この場合に，たとえば$a=b=15$として，横軸に確率pを縦軸に不合格者割合の平均値を描いたグラフが図5である。図5より，確率pが変化するとき，不合格割合者の平均値は大きく変化することが読み取れる。たとえば$p=0.5$のときはわずかに約0.072であるが，$p=0.7$のとき約1.200となり，$p=0.9$のときは約0.400に達する。また横軸に確率pを縦軸に不合格者割合の標準偏差を描

いたグラフが図６である。図６より，確率pが変化するとき，不合格割合者の標準偏差は二山の奇妙な変化する。

次にま横軸に確率pを縦軸に境界順位比の平均値を描いたグラフが図７である。境界順位比の平均値も，確率pが変化するとき，大きく変化することを示している。たとえば$p=0.5$のときはわずかに約1.144であるが，$p=0.7$のとき約1.668であり，$p=0.9$のときは約5.000に達する。また横軸に確率pを縦軸に境界順位比の標準偏差を描いたグラフが図８である。

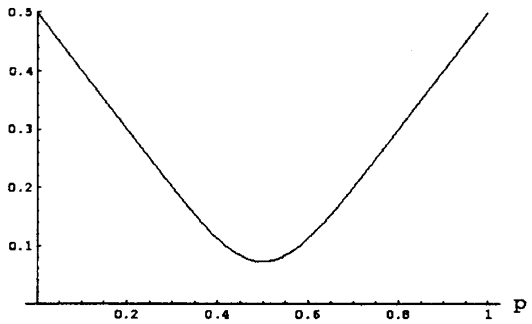

図５．不合格割合者の平均値：$a=b$の場合

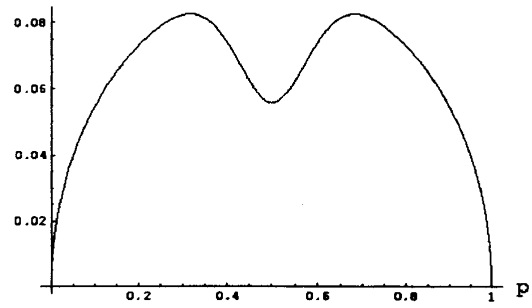

図６．不合格割合者の標準偏差：$a=b$の場合

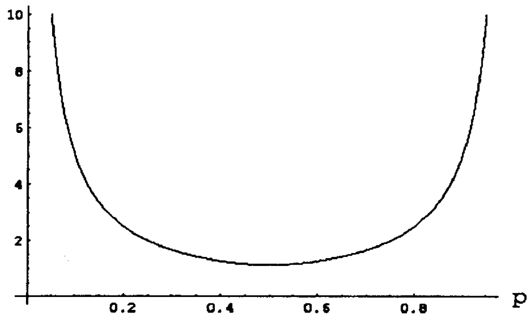

図７．境界順位比の平均値：$a=b$の場合

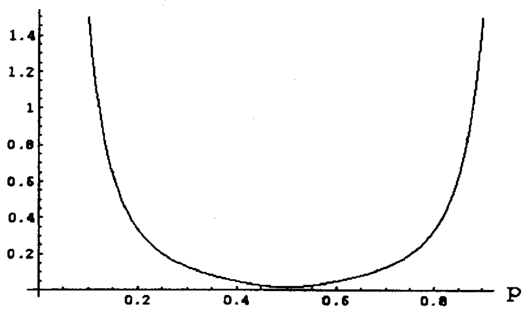

図８．境界順位比の標準偏差：$a=b$の場合

3.2　学科数が３つの場合

学科数が３の場合も，学科数が２の場合と同様の事柄が示せる。

例3　$a=13$，$b=14$，$c=11$の場合（これは鹿児島大学教育学部の，教育学専修，心理学専修，養護学校教員養成課程の前期日程の募集人数である）。

この場合に，確率p，qを横軸および縦軸にとり，不合格者割合の平均値を高さとして描いたグラフが図９である。図９の曲面が最も窪む場所は，確率p，q，rが募集人数の割合に一致する$p=13/38$，$q=14/38$の場所とほぼ一致する。そしてそのときの不合格者割合の平均値の大きさは約0.091である。しかしＡ学科を志望する確率が増えて，たとえば$p=20/38$，$q=10/38$となると不合格者割合の平均値の大きさは約0.191に増える。また，確率p，qを横軸および縦軸にとり，境界

順位比の平均値を高さとして描いたグラフが図10である。図10で曲面が最も窪む場所は，やはり確率p，q，rが募集人数の割合に一致する$p=13/38$，$q=14/38$とほぼ一致する。そしてそのときの，境界順位比の平均値の大きさは約1.244である。しかしA学科を志望する確率が増えてたとえば$p=20/38$，$q=10/38$となると境界順位比の平均値の大きさは約1.601に増える。

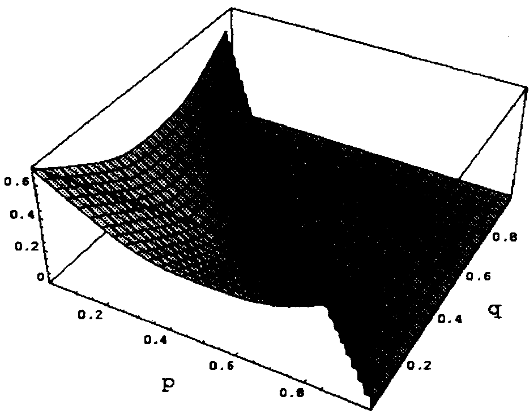

図9．不合格者割合の平均値：$a=13$，$b=14$，$c=11$の場合

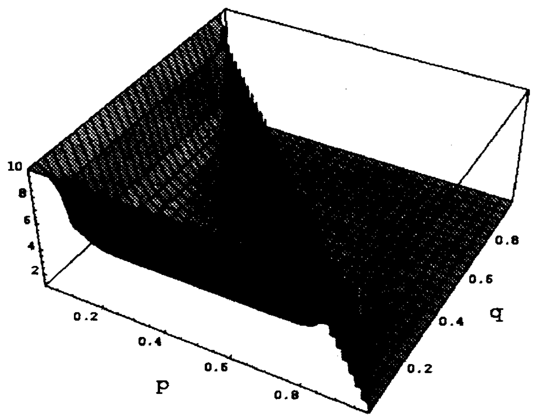

図10．境界順位比の平均値：$a=13$，$b=14$，$c=11$の場合

例4　$a=5$，$b=6$，$c=4$の場合（これは鹿児島大学教育学部の，教育学専修，心理学専修，養護学校教員養成課程の後期日程の募集人数である)。

この場合に，確率p，qを横軸および縦軸にとり，不合格者割合の平均値を高さとしてグラフを描くと，図9とよく似たグラフが描かれる。グラフの曲面が最も窪む場所は，確率p，q，rが募集人数の割合に一致する$p=5/15$，$q=6/15$の場所とほぼ一致する。そしてそのときの不合格者割合の平均値の大きさは約0.141である。この値は図9の場合の値0.091よりかなり大きい。値が大きくなる理由は主として，募集人数の合計が例3の場合より小さいことによる。また確率p，qを横軸および縦軸にとり，境界順位比の平均値を高さとしてグラフを描くと，図10とよく似たグラフが描かれる。グラフの曲面が最も窪む場所は，確率p，q，rが募集人数の割合に一致する$p=5/15$，$q=6/15$の場所とほぼ一致する。そしてそのときの，境界順位比の平均値の大きさは約1.392である。この値は図10の場合の値1.244よりわずかしか大きくない。このように境界順位比の平均値は，募集人数の合計に，不合格者割合の平均値の場合ほどは関係しない。

4　結論

前節で行なった解析の結果は，次のようにまとめることができる。

・不合格者割合と境界順位比の平均的な大きさは，受験生がそれぞれの学科を志望する比と募集人数の比のアンバランスの度合が大きくなるほど，大きくなる。卑近な言葉で言えば，人気のある学科と人気の無い学科がある場合，両学科でまとめて募集することが望ましい。

・一方，不合格者割合と境界順位比のゆらぎに関しては，両学科で募集人数の合計が小さいほど，より大きくゆらぐ。すなわち合計人数が少ない場合，それぞれの学科で別々に入試を行なうとき，ある年度の入試ではたまたま不合理さが目立たない結果になったとしても，別のある年度の入試では著しく不合理な結果になりことがありうる。

入試には必ず，ある程度の不合理さがつきまとう。本論文で考察した不合格者割合と境界順位比に関しても，不合理さを完全に解消することはできない。しかし，たとえそのような限界があるにしても，不合理さの度合をできるかぎり小さくすることは，入試を実施する側の責務であると考える。

たとえば学科数が3つで$a=5$，$b=6$，$c=4$である場合，不合格者割合の平均値を2割以下にするためには，図11で（p，q）が楕円の内部になければいけない。この楕円の外部にある場合，すなわち3学科の志望率にある程度の差がある場合，3学科を合わせて募集することが望ましい（横軸はp，縦軸はqを表す)。同様のことは境界順位比に関しても言える。

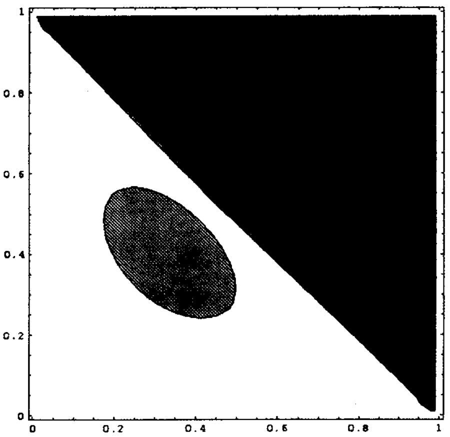

図11．不合格者割合の平均値が２割以下である（p，q）の範囲：$a=5$，$b=6$，$c=4$の場合

ところで，一方で細分化された募集単位を維持しながら，他方で募集単位を大きくするのと類似の効果をもつことが期待される手段として，複数志望制が採用されることがある。しかし複数志望制にはいくつか欠点がある。それは相変わらず，受験生に大学入試前に入学後の専攻を決めることを強制し続ける。さらにそれは，入試制度の複雑化を招くことにより，入試を実施する側にとって，実施上でのミスを誘発しやすくなるだけでなく，受験生の側にとっては，選抜方法をわかりにくく

し，入試方法に対する不信感を増大させるおそれがある。

しかし複数志望制にはこれ以外にも弊害がある。それはたとえば学科数が2つの場合，第2志望学科に合格する受験生が，不本意入学の場合とよく似た心理的ジレンマに陥りやすいことである。そこで第2志望学科に合格する受験生の割合はなるべく減らすべきであろう。ところが実は，この第2志望学科に合格する受験生の割合は，これまで考察してきた不合格者割合と全く同じものなのである。したがって，それぞれの学科を志望する比とそれぞれの学科の募集人数の比がアンバランスであるほど，また募集人数の合計が少ないほど，第2志望学科に合格する受験生の割合は大きくなる。すなわち，複数志望制は募集単位を大きくするのと類似の効果をもつことが期待されて導入されているにもかかわらず，実は不合格者割合を第2志望学科に合格する受験生の割合にすりかえるだけのものであることがわかる。

本論文では，受験生がそれぞれの学科を志望する比と募集人数の比のアンバランスの度合が大きい場合，または募集人数の合計が小さい場合，不合格者割合と境界順位比の面で生じる不合理さを減らすために，募集単位を大きくすべきであることを論証した。ただしこの結論は，受験生がそれぞれの学科を志望する傾向と，入試成績の間に相関がないという仮定のもとで成立するものである。すなわち，それぞれの学科のいわゆる偏差値がかなり異なる場合には，本論文で得た結論は正しくなくなる可能性がある。このような場合の募集単位きさの問題の検討，さらにまた実際の鹿児島大学教育学部での入試において，本論文の仮定が満たされているかどうかの統計的な検証は，将来の課題である。

5 付録

この付録では本論において利用した関係式を証明する。m個の学科A_1，$A_2, \ldots$，Amを考え，それぞれの募集人数はa_1，$a_2, \ldots$，a_mであるとし，また学科別に入試を行う場合にそれぞれの学科を受験する確率はp_1，$p_2, \ldots$，p_mであるとする。

5.1 不合格者割合

不合格者割合ξは，多項分布（$a_1 + a_2 + \cdots + a_m$，p_1，$p_2, \ldots$，p_m）にしたがう確率変数（X_1，$X_2, \ldots$，X_m）を用いて

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)_+$$

のように表すことができる。ここで$n = a_1 + \cdots + a_m$であり，また（x）$_+$は$x \geq 0$ならばxを，そう

でないならば０を表す記号である。

以下この節では，学科数が２の場合のみを考察する。このとき不合格者割合ξは，2項分布（$a+b,\ p$）にしたがう確率変数Xを用いて，

$$\xi=\frac{(X-a)_{+}+(a-X)_{+}}{a+b}$$

のように表すことができる。

はじめに平均値$E(\xi)$を計算する。２項確率を

$$f(k)=f(k,n,p)=\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$$

で表すならば，

$$(a+b)E(\xi)=\sum_{k\ge a+1}(k-a)f(k)+\sum_{k\le a-1}(a-k)f(k)$$

である。そこで

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge a+1}f(k)&=1-\sum_{k\le a-1}f(k)-f(a),\\ \sum_{k\ge a+1}kf(k)&=(a+b)p-\sum_{k\le a-1}kf(k)-af(a)\end{aligned}$$

に注意すれば，

$$(a+b)E(\xi)=(a+b)p-a-2\sum_{k\le a-1}kf(k)+2a\sum_{k\le a-1}f(k)$$

が得られる。ここでさらに

$$\sum_{k\le a-1}kf(k)=(a+b)p\sum_{j\le a-2}f(j,a+b-1,p)$$

に注意する。すると

$$E(\xi)=p-\alpha-2a\sum_{k\le a-2}f(k,a+b-1,p)+2\alpha\sum_{k\le a-1}f(k,a+b,p)$$

が得られる。

一方，不合格者割合ξの２次モーメント$E(\xi^2)$は容易に計算できて

$$E(\xi^2)=\frac{E(X-a)^2}{(a+b)^2}=(p-\alpha)^2+\frac{pq}{n}$$

となる。以上をまとめて，次の結果を得る。

補助定理1.1.

$$E(\xi) = p-\alpha-2p\sum_{k\le a-2} f(k,a+b-1,p)+2\alpha\sum_{k\le a-1} f(k,a+b,p)$$

$$E(\xi^2) = (p-\alpha)^2+\frac{pq}{n}$$

これらの式を用いて数値計算を容易に行うことができる。2次モーメントを求める式は単純であるが，しかし平均値を計算する式からはその性質を理解することは難しい。そこで，a，bが十分大きい場合に，平均値E(ξ)の近似値を求めることにする。

定理1.1. a，bが十分に大きいとき，

$$E(\xi)\sim\begin{cases}|p-\alpha| & p\neq\alpha\text{である場合}\\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{pq}{2\pi n}} & p=\alpha\text{である場合}\end{cases}$$

また標準偏差は

$$Var(\xi)\sim\begin{cases}\sqrt{\dfrac{pq}{n}} & p\neq\alpha\text{である場合}\\ \left(1-\dfrac{1}{18\pi}\right)\sqrt{\dfrac{pq}{n}} & p=\alpha\text{である場合}\end{cases}$$

（証明）

$$S_1=\sum_{k\le a-1} f(k,a+b,p),\ S_2=\sum_{k\le a-2} f(k,a+b-1,p)$$

とおく。さらに$n=a+b$とおき，また

$$h_2(z)=z^2-1,\ h_3(z)=z^3-3z,\ h_5(z)=z^5-10z^3+15z$$

とおく（*Hermite*多項式)。すると近似的に

$$S_1 \sim \Phi(z_1)-\phi(z_1)\cdot\frac{1-2p}{6\sqrt{npq}}\cdot h_2(z_1)$$

$$S_2 = \Phi(z_2)-\phi(z_2)\cdot\frac{1-2p}{6\sqrt{npq}}\cdot h_2(z_2)$$

ただし,

$$z_1=\frac{(a-1)-(a+b)p}{\sqrt{(a+b)pq}},\ z_2=\frac{(a-2)-(a+b-1)p}{\sqrt{(a+b-1)pq}}$$

である。

そこで

$$z=\frac{a-(a+b)q}{\sqrt{(a+b)pq}}$$

とおくならば，

$$\begin{aligned} z_1 &= z-\frac{1}{\sqrt{npq}}, \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\left(z-\frac{2-p}{\sqrt{npq}}\right) \sim z\frac{2-p}{\sqrt{npq}}+\frac{z}{2n} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &\sim \Phi(z)+(z_1-z)\phi(z)+\frac{1}{2}(z_1-z)^2\phi'(z) \\ &= \Phi(z)-\frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(z)-\frac{1}{2npq}z\phi(z) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &\sim \phi(z)+(z_1-z)\phi'(z) \\ &= \phi(z)\left(1+\frac{1}{\sqrt{npq}}z\right) \end{aligned}$$

を得る。同様にして

$$\Phi(z_2)\sim\Phi(z)-\frac{2-p}{\sqrt{npq}}\phi(z)-\frac{4-5p+2p^2}{2npq}z\phi(z)$$

および

$$\phi(z_2)\sim\phi(z)\left(1+\frac{2-p}{\sqrt{npq}}z-\frac{1}{2n}z^2\right)$$

を得る。これより

$$S_1\sim\Phi(z)-\phi(z)\cdot\frac{1}{6\sqrt{npq}}\{6+(1-2p)h_2(z)\}$$

および

$$E(\xi)=(p-\alpha)(1-2\Phi(z))+\phi(z)\cdot\frac{1}{3\sqrt{npq}}\{p(2-p)-\alpha+(p-\alpha)(1-2p)h_2(z)\}$$

したがって

$$E(\xi)=(p-\alpha)(1-2\Phi(z))+\phi(z)\cdot\frac{1}{3\sqrt{npq}}\{p(2-p)-\alpha+(p-\alpha)(1-2p)h_2(z)\}$$

これより求める結論を得る。（Q. E. D.）

5．2　境界順位

境界順位Xの確率分布$\mathrm{P}(X \leq k)$ が

$$f_m(\theta, b; a_1, a_2 \cdots, a_m; p_1, p_2 \cdots, p_m) = \sum \frac{k!}{i_1! i_2 \cdots i_m!} p_1^{i1} p_2^{i2} \cdots p_m^{im}$$

であることは容易に分かる。ただし，和は

$$\begin{cases} i_1 \geq a_1, i_2 \geq a_2, \cdots, i_m \geq a_m \\ \quad k = i_1 + \cdots + i_m \end{cases}$$

の範囲でとる。

境界順位の平均値，分散等を計算するために，次の母関数を求める：

$$\begin{aligned} F_m(\theta, b) &= F_m(\theta, b; a_1, a_2, \cdots, a_m; p_1, p_2, \cdots, p_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+b)!}{k!} f_m(\theta, b; a_1, a_2, \cdots, a_m; p_1, p_2, \cdots, p_m) \theta^k \end{aligned} \tag{1}$$

ここでbは任意の非負整数とする。すると次の漸化式が成立する。

補助定理2. 1.

$$\begin{aligned} & F_m(\theta, b; a_1, a_2, \cdots, a_m; p_1, p_2, \cdots, p_m) \\ = \ & \frac{1}{(a_m - 1)!(1 - p_m \theta)^{b+1}} \int_0^{p_m} t^{a_m - 1} (1-t)^b \\ & F_{m-1}(q_m(1-t), a_m + b; a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \cdots, \tilde{p}_{m-1})\, dt \end{aligned} \tag{2}$$

ただし

$$p_j = \frac{p_j \theta}{(1 - p_m)\theta} (j = 1, 2, \cdots, m-1)$$

および

$$q_m = \frac{(1 - p_m)\theta}{1 - p_m \theta}$$

とおく。

（証明）

$$F_m(\theta,b) = \sum_{i_1\geq a_1,\cdots,i_{m-1}\geq a_{m-1}} \frac{1}{i_1!\cdots i_{m-1}!}(p_1\theta)^{i_1}\cdots(p_{m-1}\theta)^{i_{m-1}}$$

$$\sum_{k-(i_1+\cdots+i_{m-1})\geq a_m} \frac{(k+b)!}{(k-(i_1+\cdots+i_{m-1}))!}(pm\theta)^{k-(i_1+\cdots+i_{m-1})}$$

$$= \sum_{i_1\geq a_1,\cdots,i_{m-1}\geq a_{m-1}} \frac{1}{i_1!\cdots i_{m-1}!}(p_1\theta)^{i1}\cdots(p_{m-1}\theta)^{i_{m-1}}$$

$$\sum_{j\geq am} \frac{(i_1+\cdots i_{m-1}+b+j)!}{j!}(p_m\theta)^j$$

ここで２項定理の剰余項に関する有名な公式を用いると，

$$F_m(\theta,b) = \sum_{i_1\geq a_1,\cdots,i_{m-1}\geq a_{m-1}} \frac{(i_1+\cdots+i_{m-1}+b)!}{i_1!\cdots i_{m-1}!}(p_1\theta)^{i1}\cdots(p_{m-1}\theta)^{i_{m-1}}$$

$$\cdot(1-p_m\theta)^{-(i_1+\cdots i_{m-1}+b+1)}\cdot\frac{B(p_m\theta,a_m,i_1+\cdots+i_{m-1}+b+1)}{B(a_m,i_1+\cdots+i_{m-1}+b+1)}$$

ただし，B（x，a，b）は不完全ベータ関数を表す：

$$B(x,a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt,\quad B(a,b)=B(1,a,b).$$

したがって

$$F_m(\theta,b) = \frac{1}{(a_m-1!)(1-p_m\theta)^{b+1}}\int_0^{p_m} t^{a_{m-1}}(1-t)^b dt$$

$$\sum_{i_1\geq a_1,\cdots,i_{m-1}\geq a_{m-1}} \frac{(a_m+b+i_1+\cdots i_{m-1})!}{i_1!\cdots i_{m-1}!}(p_1)^{i_1}\cdots(p_{m-1})^{i_{m-1}}(q_m(1-t))^{i_1+\cdots i_{m-1}}$$

$$= \frac{1}{(a_m-1)!(1-p_m\theta)^{b+1}}\int_0^{p_m} t^{a_{m-1}}(1-t)^b dt$$

$$\sum_k (q_m(1-t))^k {\sum}' \frac{(a_m+b+k)!}{i_1!\cdots i_{m-1}!}(p_1)^{i_1}\cdots(p_{m-1})^{i_{m-1}}$$

ただし，最後のΣ'は

$$\begin{cases} i_1\geq a_1,\cdots,i_{m-1}\geq a_{m-1} \\ k=i_1+\cdots+i_{m-1} \end{cases}$$

の範囲でとる。

これより証明すべき式が直ちに得られる。(**Q. E. D.**)

補助定理2.1の漸化式を用いて母関数(1)を求めると，次の補助定理のようになる。

補助定理2.2

$$F_m(\theta,b) = \frac{(a_1+a_2+\cdots a_m+b)!}{(a_1-1)!(a_2-1)!\cdots(a_m-1)!}\cdot\frac{1}{(1-\theta)^{b+1}} \cdot\iint\cdots\int_D t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_2^{a_2-1}\cdots t_m^{a_m-1}(1-t_1-t_2-\cdots-t_m)^b\,dt_1dt_2\cdots dt_m \tag{3}$$

ただし積分範囲Dは，1次不等式

$$D=\left\{(t_1,t_2,\cdots,t_m):\lambda_j t_j+\sum_{i\neq j}t_i<1\quad(\text{すべての}\ j=1,2,\cdots,m\ \text{に対して})\right\} \tag{4}$$

で定義されるm次元領域で，ここで

$$\lambda_j=\frac{1-(1-p_j)\theta}{p_j\theta} \tag{5}$$

である。

（証明）　$m=1$の場合，確率$P(X\leq k)$は，$k<a_1$の場合0に等しく，$k\geq a_1$の場合1に等しい。したがって

$$\begin{aligned}
F_1(\theta,b) &= \sum_{k\geq a_1}\frac{(k+b)!}{k!}\theta^k \\
&= b!(1-\theta)^{-(b+1)}\frac{B(\theta,a_1,b+1)}{B(a_1,b+1)} \\
&= \frac{(a_1+b)!}{(a_1-1)!}(1-\theta)^{-(b+1)}\int_{\lambda_1t_1<1}t_1^{a_1-1}(1-t_1)^b\,dt_1
\end{aligned}$$

となり，(3)は成立する。

さて式(3)が$m-1$のとき，成立していると仮定する。このとき漸化式(2)を用いると，

$$\begin{aligned}
F_m(\theta,b) &= \frac{1}{(a_m-1)!(1-p_m\theta)^{b+1}}\int_0^{p_m}u^{a_m-1}(1-u)^b \\
&\quad\cdot F_{m-1}(q_m(1-u),a_m+b;a_1,a_2,\dots,a_{m-1};p_1,p_2,\dots,p_{m-1})du \\
&= \frac{1}{(a_m-1)!(1-p_m\theta)^{b+1}}\cdot\frac{(a_1+\cdots a_{m-1}+b)!}{(a_1-1)!\cdots(a_{m-1}-1)!} \\
&\quad\cdot\int_0^{p_m}u^{a_{m-1}}(1-u)^b(1-q_m(1-u))^{-(a_m+b+1)}du \\
&\quad\cdot\iint\cdots\int_D t_1^{a_1-1}\cdots t_{m-1}^{a_{m-1}-1}(1-t_1-\cdots-t_{m-1})^b\,dt_1\cdots dt_{m-1}
\end{aligned}$$

ただし，領域$\tilde{D}$は，1次不等式系

$$D=\left\{(t_1,t_2,\cdots,t_{m-1}):\lambda_j(u)t_j+\sum_{i\neq j,i\leq m-1}t_i<1\quad(\text{すべての}j=1,2,\cdots,m-1\text{に対して})\right\} \tag{6}$$

で定義される$m-1$次元領域で，ここで

$$\tilde{\lambda}_j(u)=\frac{1-(1-\tilde{p}_j)q_m(1-u)}{\tilde{p}_j q_m(1-u)} \tag{7}$$

である。

そこで

$$v=\frac{u}{1-q_m(1-u)}$$

のように変数変換すると，

$$u^{a_{m-1}}(1-u)^b(1-q_m(1-u))^{-(a_m+b+1)}du=(1-q_m)^{-(b+1)}v^{a_m-1}(1-v)^b dv$$

であり，また$u=p_m\theta$のとき$v=1/\lambda_m$であることに注意して，

$$\begin{aligned}&\int_0^{p_m}u^{a_m-1}(1-u)^b(1-q_m(1-u))^{-(a_m+b+1)}du\\&\qquad\iint\cdots\int_{\tilde{D}}t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_{m-1}^{a_{m-1}-1}(1-t_1-t_2-\cdots-t_{m-1})^b dt_1dt_2\cdots dt_{m-1}\\&=(1-q_m)^{-(b+1)}\int_0^{1/\lambda_m}v^{a_m-1}(1-v)^b dv\\&\qquad\iint\cdots\int_{\tilde{D}}t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_{m-1}^{a_{m-1}-1}(1-t_1-t_2-\cdots-t_{m-1})^b dt_1dt_2\cdots dt_{m-1}\end{aligned}$$

となる。

そして領域$\tilde{D}$を定義する1次不等式系の係数は

$$\tilde{\lambda}_j(u)=\frac{1-(1-p_j)\theta-p_j\theta v}{p_j\theta(1-v)}$$

となる。右辺を$\hat{\lambda}_j(v)$と書くことにする。

そこでさらに

$$t_m=v(1-t_1-\cdots-t_{m-1})$$

変数変換する。すると

$$\begin{aligned}&v^{a_m-1}(1-v)^d dv\cdot t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_{m-1}^{a_{m-1}-1}(1-t_1-t_2-\cdots-t_{m-1})^b dt_1dt_2\cdots dt_{m-1}\\&=t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}\cdots t_m^{a_m-1}(1-t_1-t_2-\cdots-t_m)^b dt_1dt_2\cdots dt_m\end{aligned}$$

を示すことができる。また$j=1,2,...,m-1$に対して，1次不等式

$$\hat{\lambda}_j(\nu)t_j + \sum_{i \neq i, i \leq m-1} t_i < 1$$

が

$$\lambda_j t_j + \sum_{i \neq j, i \leq m} t_i < 1$$

と同値になること，および１次不等式$\nu < 1/\lambda_m$が

$$\lambda_m t_m + \sum_{1 \leq i \leq m-1} t_i < 1$$

と同値になることを容易に確かめることができる。こうして帰納法により証明が終る。(Q. E. D.)

母関数$F_m(\theta, 0)$に現れる積分をあらためて$K(\theta)$で表すことにする：

$$K(\theta) = \iint \cdots \int_D t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1} \cdots t_m^{a_m-1} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \tag{8}$$

この関数$K(\theta)$を用いて，境界順位Xの平均値および２次モーメントを計算するには次のようにすればよい。

補助定理2.3.

$$E(X) = \frac{K'(1)}{K(1)} \tag{9}$$

$$E(X^2) = \frac{K''(1)}{K(1)} + E(X) \tag{10}$$

（証明）　関数$K(\theta)$に関して，

$$K(1) = \frac{(a_1-1)!(a_2-1)!\cdots(a_m-1)!}{(a_1+a_2+\cdots a_m)!}$$

であることは容易に確かめることができる。
したがって

$$F_m(\theta, 0) = \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{K(\theta)}{K(1)} \cdot$$

さて次の公式はよく知られている：

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P(X > k)$$

そこでL' Hospitalの公式を用いて，

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{\theta\to 1}\sum_{k=0}^{\infty} P(X>k)\theta^k \\ &= \lim_{\theta\to 1}\left(\frac{1}{1-\theta} - F_m(\theta,0)\right) = \frac{1}{K(1)}\cdot\lim_{\theta\to 1}\frac{K(1)-K(\theta)}{1-\theta} \\ &= \frac{K'(1)}{K(1)} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E(X^2)-E(X)) &= \lim_{\theta\to 1}\sum_{k=1}^{\infty} kP(X>k)\theta^{k-1} \\ &= \lim_{\theta\to 1}\frac{d}{d\theta}\sum_{k=0}^{\infty} P(X>k)\theta^k = \lim_{\theta\to 1}\frac{d}{d\theta}\frac{K(1)-K(\theta)}{1-\theta} \\ &= \frac{1}{2}\frac{K''(1)}{K(1)} \end{aligned}$$

（Q. E. D.）

補助定理2. 3より，境界順位Xの平均値を求めるためには，関数$K(\theta)$の導関数を計算する必要がある。

補助定理2. 4.

$$K'(\theta) = K_1'(\theta) + \cdots + K_m'(\theta) \tag{11}$$

ここでたとえば$K_1'(\theta)$は

$$K_1'(\theta) = \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\int\cdots\int_{D_1} t_2^{a_2-1}\cdots t_m^{a_m-1}\left(1-\sum_{i=2}^{m} t_i\right)^{a_1} dt_2\cdots dt_m \tag{12}$$

で，積分領域D_1は

$$D_1 = \left\{(t_2,\cdots,t_m) : \left(\frac{1-\theta}{p_j\theta}+1+\frac{p_1}{p_j}\right)t_j + \sum_{i\neq j, i>=2} t_i < 1 \ \ (\text{すべての}\, j+2,\dots,m\, \text{に対して})\right\} \tag{13}$$

である。積分$K_2'(\theta)$，. . . ，$K_{\mathrm{m}}'(\theta)$も同様に定義される。

（証明） 関数$K(\theta)$を定義する積分領域は，m個の半空間$\lambda_j t_j + \sum_{i\neq i} t_i < 1$（と$m$個の半空間$t_j > 0$）の交わりである，$m$次元多胞体である。
そしてθが微小量$d\theta > 0$だけ変化するとき，この多胞体は，m個の超平面$\lambda_j t_j + \sum_{i\neq i} t_i = 1$の

部分においてのみ変化する。したがって

$$dK(\theta)=dK_1'(\theta)+\cdots+dK_m'(\theta)$$

となり，ここでたとえば$dK_1'(\theta)$は，2つの超平面$\lambda_1 t_1+\sum_{i\geq 2} t_i=1$と$(\lambda_1+d\lambda_1)t_1+\sum_{i\geq 2} t_i=1$に挟まれ，かつ残り$m-1$個の半空間により囲まれた領域上での積分となる。だから

$$\begin{aligned} K_1'(\theta) &= \int \mathrm{L} \int_{\lambda_j t_j+\sum_{i\neq j} t_i<1\ (\text{すべての}\ j\geq 2\ \text{に対して})} t_2^{a_2-1}\ \mathrm{L}\ t_m^{a_m-1} dt_2\ \mathrm{L}\ dt_m \\ &\quad \int_{(1-\sum_i t_i)/\lambda_1<t_1<(1-\sum_i t_i)/(\lambda_1+d\lambda_1)} t_1^{a_1-1} dt \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}=-\frac{1}{p_1\theta^2}$$

および

$$\frac{1}{\lambda_1+d\lambda_1}\sim\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{|d\lambda_1|}{\lambda_1}\right)$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} K_1'(\theta) &= \int\cdots\int t_2^{a_2-1}\cdots t_m^{a_m-1} dt_2\cdots dt_m\cdot\left(\frac{1-\sum_{i\geq 2} t_i}{\lambda_1}\right)^{a_1-1}\cdot\frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^2}\left(1-\sum_{i\geq 2} t_i\right) \\ &= \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\int\cdots\int t_2^{a_2-1}\cdots t_m^{a_m-1}\left(1-\sum_{i\geq 2} t_i\right)^{a_1} dt_2\cdots dt_m \end{aligned}$$

となる。そして半空間を定める1次不等式は

$$\begin{aligned} \lambda_j t_j+\sum_{i\neq j} t_i &= \lambda_j t_j+\sum_{i\neq j, i\geq 2} t_i+\frac{1}{\lambda_1}\left(1-\sum_{i\geq 2} t_i\right) \\ &= \left(\frac{\lambda_1\lambda_j-1}{\lambda_1-1}\right)t_j+\sum_{i\neq j, i>=2} t_i \\ &< 1 \end{aligned}$$

と書き直すことができる。あとは

$$\frac{\lambda_1\lambda_j-1}{\lambda_1-1}=\frac{1-\theta}{p_j\theta}+1+\frac{p_1}{p_j}$$

に注意すれば証明が終わる。(Q. E. D.)

補助定理2.4を用いれば，境界順位Xの平均値および2次モーメントを計算することができる。しかし一般のmに対して，それらの式はは非常に複雑になる。そこで$m=2$，3の場合に対する計算結果だけを次の述べる。ただし

$$C_2 = \frac{(a+b)!}{(a-1)!(b-1)!},$$
$$C_3 = \frac{(a+b+c)!}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!}$$

とおき，また関数$D(x,\ y,\ a,\ b,\ c)$はディリクレ分布の分布関数で定数倍を除いたものとする：

$$D(x,y,a,b,c) = \int_0^x \int_0^y s^{a-1} t^{b-1} (1-s-t)^{c-1} ds dt$$

定理2.1.

$m=2$の場合，

$$E(X) = C_2 \left\{ \frac{1}{p} B(q,b,a+1) + \frac{1}{q} B(p,a,b+1) \right\} \tag{14}$$

$$E(X^2) = C_2 \left\{ \frac{a+1-p}{p^2} B(q,b,a+1) + \frac{b+1-q}{q^2} B(p,a,b+1) + p^{a-1} q^b + p^a q^{b-1} \right\} \tag{15}$$

$m=3$の場合，

$$E(X) = C_3 \{ m(a,b,c,p,q,r) + m(b,c,a,q,r,p) + m(c,a,b,r,p,q) \} \tag{16}$$

$$E(X^2) = C_3 \{ s(a,b,c,p,q,r) + s(b,c,a,q,r,p) + s(c,a,b,r,p,q) \} \tag{17}$$

ただし，

$$\begin{aligned} m(a_1,a_2,a_3,p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{p_1} \Bigg\{ & B(p_2,a_2,a_3+a_1+1) B\left(\frac{p_3}{p_3+p_1}, a_3, a_1+1\right) + \\ & B(p_3,a_3,a_2+a_1+1) B\left(\frac{p_2}{p_2+p_1}, a_2, a_1, +1\right) \\ & - D(p_2,p_3,a_2,a_3,a_1+1) \Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(a_1,a_2,a_3,p_1,p_2,p_3) = & \frac{a_1+1-p_1}{p_1} m(a_1,a_2,a_3,p_1,p_2,p_3) \\ & + \frac{1}{p_1} \left\{ B(p_2,a_2,a_3+a_1+1) \frac{p_3^{a_3} p_1^{a_1}}{(p_3+p_1)^{a_3+a_1}} + B(p_3,a_3,a_2+a_1+1) \frac{p_2^{a_2} p_1^{a_1}}{(p_2+p_1)^{a_2+a_1}} \right\} \end{aligned}$$

とおく。

（証明） 以下の証明においては，$m=2$の場合，a_1，a_2，p_1，p_2はそれぞれa，b，p，qを表すものとし，また$m=3$の場合，a_1，a_2，a_3，p_1，p_2，p_3はそれぞれa，b，c，p，q，rを表すものとする。

$m=2$ の場合，補助定理2.4を用いて，

$$K_1'(\theta) = \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\int_{\left(\frac{1-\theta}{p_2\theta}+1+\frac{p_1}{p_2}\right)t_2<1} t_2^{a_2-1}(1-t_2)^{a_1}\,dt_2$$
$$= \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}B(p_2\theta, a_2, a_1+1)$$

したがって

$$K_1'(1) = \frac{1}{p_1}B(p_2, a_2, a_1+1).$$

同様にして$K_2'(\theta)$も計算できるので，(14)を得ることができる。
さらに$K_1'(\theta)$を微分すると，

$$K_1''(\theta) = \left(-\frac{2}{p_1\theta^3\lambda_1^{a_1+1}}+\frac{a_1+1}{p_1^2\theta^4\lambda_1^{a_1+2}}\right)B(p_2\theta, a_2, a_1+1)$$
$$+\frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\cdot p_2(p_2\theta)^{a_2-1}(1-p_2\theta)^{a_1}$$

したがって

$$K_1''(1) = \left(-\frac{2}{p_1}+\frac{a_1+1}{p_1^2}\right)B(p_2, a_2, a_1+1)+p_1^{a_1-1}p_2^{a_2}.$$

同様にして $K_2''(1)$ も計算できるので，(15)を得ることができる。

次に$m=3$ の場合を考える。ふたたび補助定理４より，

$$K_1'(\theta) = \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\iint t_2^{a_2-1}t_3^{a_3-1}(1-t_2-t_3)^{a_1}\,dt_2dt_3$$

ここで積分領域は

$$\begin{cases} \dfrac{1-p_3\theta}{p_2\theta}t_2+t_3<1 \\ t_2+\dfrac{1-p_2\theta}{p_3\theta}t_3<1 \end{cases}$$

である。２直線 $\frac{1-p_3\theta}{p_2\theta}t_2+t_3=1$, $t_2+\frac{1-p_2\theta}{p_3\theta}t_3=1$ の交点の座標は（t_2, t_3）=（$p_2\theta$，$p_3\theta$）であることに注意して，

$$K_1'(\theta) = \left\{\int_0^{p_2\theta}dt_2\int_0^{\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}(1-t_2)}dt_3+\int_0^{p_3\theta}dt_3\int_0^{\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}(1-t_3)}dt_2-\int_0^{p_2\theta}dt_2\int_0^{p_3\theta}dt_3\right\}$$
$$t_2^{a_2-1}t_3^{a_3-1}(1-t_2-t_3)^{a_1}$$

ところがこの第１項は

$$\int_0^{p_2\theta} t_2^{a_2-1}dt_2 \int_0^{\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}(1-t_2)} t_3^{a_3-1}(1-t_2-t_3)^{a_1}dt_3$$
$$= \int_0^{p_2\theta} t_2^{a_2-1}dt_2 \cdot \int_0^{\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}} w^{a_3-1}(1-w)^{a_1}dw$$
$$= B(p_2\theta, a_2, a_3+a_1+1)B\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}, a_3, a_1+1\right)$$

となる。同様に第２項は

$$B(p_3\theta, a_3, a_2+a_1+1)B\left(\frac{p_2}{1-p_2\theta}\right)$$

に等しくなる。一方，第３項は

$$D(p_2\theta, p_3\theta, a_2, a_3, a_1+1)$$

と表すことができる。したがって

$$\begin{aligned} K_1'(\theta) &= \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}\left\{B(p_2\theta, a_2, a_3+a_1+1)B\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}, a_3, a_1+1\right)\right. \\ &\quad + B(p_3\theta, a_3, a_2+a_1+1)B\left(\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}, a_2, a_1+1\right) \\ &\quad \left. - D(p_2\theta, p_3\theta, a_2, a_3, a_1+1)\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

を得る。同様にして $K_2'(\theta), K_3'(\theta)$ も計算でき，合わせて⑯が得られる。次に２次モーメントを計算しよう。式⑱を

$$K_1'(\theta) = \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}(k_{11}(\theta)+k_{12}(\theta)+k_{13}(\theta))$$

と書くことにする。すると

$$\begin{aligned} K_1''(\theta) &= \left(-\frac{2}{p_1\theta^3\lambda_1^{a_1+1}} + \frac{a_1+1}{p_1^2\theta^2\lambda_1^{a_1+2}}\right)(k_{11}(\theta)+k_{12}(\theta)+k_{13}(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{p_1\theta^2\lambda_1^{a_1+1}}(k_{11}'(\theta)+k_{12}'(\theta)+k_{13}'(\theta) \end{aligned}$$

はじめに

$$\begin{aligned} k_{11}'(\theta) &= p_2(p_2\theta)^{a_2-1}(1-p_2\theta)^{a_3+a_1}\cdot B\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}, a_3, a_1+1\right) \\ &\quad B(p_2\theta, a_2, a_3+a_1+1)\cdot\frac{p_3}{(1-p_2\theta)^2}\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}\right)^{a_3-1}\left(1-\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}\right)^{a_1} \end{aligned}$$

および

$$k'_{12}(\theta) = p_3(p_3\theta)^{a_3-1}(1-p_3\theta)^{a_2+a_1}\cdot B\left(\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}, a_2, a_1+1\right)$$
$$B(p_3\theta, a_3, a_2+a_1+1)\cdot\frac{p_2}{(1-p_3\theta)^2}\left(\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}\right)^{a_2-1}\left(1-\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}\right)^{a_1}$$

は直接に微分して得ることができる。さらに

$$\begin{aligned} k'_{13}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\int_0^{p_2\theta}\int_0^{p_3\theta} t_2^{a_2-1}t_3^{a_3-1}(1-t_2-t_3)^{a_1}\,dt_2dt_3 \\ &= p_2\int_0^{p_3\theta}(p_2\theta)^{a_2-1}t_3^{a_3-1}(1-p_2\theta-t_3)^{a_1}\,dt_3 \\ &+ p_3\int_0^{p_2\theta}t_2^{a_2-1}(p_3\theta)^{a_3-1}(1-t_2-p_3\theta)^{a_1}\,dt_2 \end{aligned}$$

であることも容易に示すことができるので，

$$\begin{aligned} k'_{13}(\theta) &= p_2(p_2\theta)^{a_2-1}(1-p_2\theta)^{a_3+a_1}\cdot B\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}, a_3, a_1+1\right) \\ &+ p_3(p_3\theta)^{a_3-1}(1-p_3\theta)^{a_2+a_1}\cdot\left(\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}, a_2, a_1+1\right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &k'_{11}(\theta)+k'_{12}(\theta)+k'_{13}(\theta) \\ &= b(p_2\theta, a_2, a_3+a_1+1)\cdot\frac{p_3}{(1-p_2\theta)^2}\left(\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}\right)^{q_3-1}\left(1-\frac{p_3\theta}{1-p_2\theta}\right)^{a_1} \\ &+B(p_3\theta, a_3, a_2+a_1+1)\cdot\frac{p_2}{(1-p_3\theta)^2}\left(\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}\right)^{a_2-1}\left(1-\frac{p_2\theta}{1-p_3\theta}\right)^{a_1} \end{aligned}$$

を得る。これより⒄を導くことができる。(Q. E. D.)

定理2.1で得た境界順位の平均値および2次モーメントの式は，かなり複雑ではあるが，これを用いて数値計算をすることは容易である。しかし定性的な性質を調べる目的には適していない。そこでa_1, $a_2, \ldots$, a_mが十分に大きい場合の，境界順位の平均値および2次モーメントの漸近挙動を調べることにする。以下では，Φおよびϕはそれぞれ標準正規分布の分布関数および密度関数を表すものとする。

補助定理2.5.

ベータ分布，すなわち密度関数

$$g(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

である確率分布に対して，その分布関数を$G(x)$で表すと，a，$b\to\infty$であるとき，

$$G(x)\sim\Phi(z)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)$$

ここで

$$n=a+b,\alpha=\frac{a}{a+b},\beta=\frac{b}{a+b}$$

であり，また

$$z=\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}}(x-a)$$

（証明）　証明は通常の手続きにしたがえば行うことができるので，概略を示すにとどめる。確率変数Xがベータ分布にしたがうとし，それを標準化した確率変数をZとする：

$$Z=\left(X-\frac{a}{a+b}\right)/\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}}$$

するとZの確率密度$h(z)$は

$$\begin{aligned}h(z) &= \frac{1}{B(a,b)}\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}}\\ &\quad \left\{\frac{a}{a+b}+\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}}z\right\}^{a-1}\left\{\frac{b}{a+b}-\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}}z\right\}^{b-1}\end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}\log h(z) &= \log(n-1)!-\log(n\alpha-1)!-\log(n\beta-1)!+\log\sqrt{\frac{\alpha\beta}{n+1}}\\ &+ (n\alpha-1)\log\left\{\alpha+\sqrt{\frac{\alpha\beta}{n+1}}z\right\}++(n\beta-1)\log\left\{\beta-\sqrt{\frac{\alpha\beta}{n+1}}z\right\}\end{aligned}$$

ここでStirlingの公式および対数関数のTaylor展開を用いると，少々長い計算の結果

$$\log h(z)\sim-\log\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)$$

を得る。(Q. E. D.)

系2.1.

$m=2$ の場合。a，bが十分に大きいとき，境界順位比の平均値は次のようになる：

$$E(\eta)\sim\begin{cases}\dfrac{\alpha}{p} & もし p>\alpha であるならば\\ \dfrac{\beta}{q} & もし p<\alpha であるならば\\ 1+O\left(\dfrac{1}{n}\right) & もし p=\alpha であるならば\end{cases} \tag{19}$$

また境界順位比の標準偏差は

$$Ver(\eta)\sim\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{n}\right) & もし p\neq\alpha であるならば\\ \dfrac{\alpha\beta}{(2\pi n)^{1/4}} & もし p=\alpha であるならば\end{cases} \tag{20}$$

（証明）　$m=2$ の場合。

$C_2=(a+b)/B(a,b)$ に注意すれば，(14)より，

$$E(\eta)=E\left(\frac{X}{a+b}\right)=\frac{1}{p}\frac{B(q,b,a+1)}{B(a,b)}+\frac{1}{q}\frac{B(p,a,b+1)}{B(a,b)}$$

さらにベータ分布の分布関数Gの定義より

$$G(q;b,a+1)=\frac{B(q,b,a+1)}{B(a+1,b)}$$

であること，および

$$\frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}=\frac{a}{a+b}=\alpha,\quad \frac{B(a,b+1)}{B(a,b)}=\frac{b}{a+b}=\beta$$

であることを用いて，

$$E(\eta)=\frac{\alpha}{p}G(q;b,a+1)+\frac{\beta}{q}G(p;a,b+1)$$

を得る。したがって補助定理2.5を用いて，

$$z=\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}}(p-\alpha)$$

とおいて

$$\begin{aligned}
E(\eta) \;\sim\;& \frac{\alpha}{p}\left\{\Phi(z)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)\right\} \\
&+\frac{\beta}{q}\left\{\Phi(-z)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(-z)\phi(-z)\right\} \\
=\;& \frac{\alpha}{p}\left\{\Phi(z)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)\right\} \\
&+\frac{\beta}{q}\left\{1-\Phi(z)-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)\right\}
\end{aligned}$$

であることがわかる。よって$p>\alpha$の場合，$\Phi(z)$ は指数関数的に1に近付き，また$p<\alpha$の場合，$\Phi(z)$ は指数関数的に0に近付くことから，⒆を得る。

次に2次モーメントを扱う。⒂より

$$\begin{aligned}
E(\eta^2) \;=\;& \frac{E(X^2)}{(a+b)^2} \\
=\;& \frac{1}{n}\left\{\frac{n\alpha+1-p}{p^2}\alpha G(q;b,a+1)+\frac{n\beta+1-q}{q^2}\beta G(p;a,b+1)\right. \\
&\left.+\frac{p^{a-1}q^b+p^a q^{b-1}}{B(a,b)}\right\}
\end{aligned}$$

補助定理5および

$$B(a,b)\sim\sqrt{\frac{\alpha\beta n}{2\pi}}\frac{1}{(\alpha^\alpha\beta^\beta)^n}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
E(\eta^2) \;\sim\;& \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2\left\{\Phi(z)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)\right\} \\
&+\left(\frac{\beta}{q}\right)^2\left\{1-\Phi(z)-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\alpha-\beta}{3\sqrt{\alpha\beta}}h_3(z)\phi(z)\right\} \\
&+\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2\pi n}}\left\{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{q}{\beta}\right)^\beta\right\}^n
\end{aligned}$$

ここで量

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{q}{\beta}\right)^\beta$$

は，$p=\alpha$のときは1に等しく，それ以外のときは1より小さい。したがって

$$E(\eta^2)=\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha}{p}\right)^2 & \text{もし}p>\alpha\text{であるならば}\\ \left(\dfrac{\beta}{q}\right)^2 & \text{もし}p<\alpha\text{であるならば}\\ \sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2\pi n}} & \text{もし}p=\alpha\text{であるならば}\end{cases}$$

これより(20)を得る。（Q. E. D.）