

Axisymmetric Vibrations of Circular Laminated Plates Containing Multiple Delaminations of a Same Size

○学 福岡 和樹 (鹿児島大学) 正 有富 正男 (鹿児島大学)
 正 小田 美紀男 (鹿児島大学) 正 戸谷 眞之 (鹿児島大学)

Kazuki FUKUOKA, Masao ARITOMI, Mikio ODA and Masayuki TOYA

Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency

1. 緒言

本報では、異種材からなるN層の積層円板が、その中心部に大きさの等しい円形多重層間はく離を有する場合の軸対称自由振動を、面内変形の影響を考慮して理論解析する。また、大きさの等しいはく離をもつ四層の積層円板を製作して振動実験を行い、解析モデルの妥当性を検証している。

2. 理論解析

本論文では、図1に示すようなN枚の異種材を接着した半径Rの積層円板が、各層間の円板中心に半径cの大きさの等しいN-1個の円形はく離を有する場合を考える。積層円板の上面から第1層、第2層、・・・とし、第k層の厚さを h_k 、縦弾性係数を E_k 、ポアソン比を ν_k 、密度を ρ_k 、伸び剛性と曲げ剛性を C_k, D_k 、板上面から第k層の中央面までの距離を H_k とする。

いま、板の上面から

$$\eta = \sum_{k=1}^N H_k C_k / \sum_{k=1}^N C_k \quad (1)$$

のところ基準面を設け、基準面から第k層の中央面までの距離を d_k とし、基準面のr方向の面内変位を u^0 、z方向の円環部分のたわみをw、はく離部分の面内変位を u_k^0 、たわみを w_k とする。

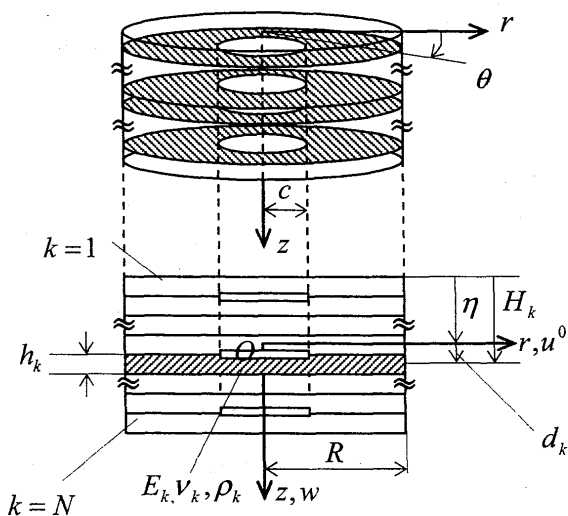


Fig.1 Geometry of a circular laminated plate containing multiple disk-shaped delaminations

次に座標 r, 時間 t, たわみ w, 面内変位 u^0 および各諸量を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{w}, \bar{u}^0, \bar{w}_k, \bar{u}_k^0, \bar{h}_k, \bar{\eta}) &= (w, u^0, w_k, u_k^0, h_k, \eta) / h \\ (\bar{\xi}, \bar{c}) &= (r, c) / R, \quad (\bar{C}, \bar{C}_{12}, \bar{C}_k) = (C, C_{12}, C_k) \frac{R^2}{D} \\ \bar{B}_{12} &= B_{12} \frac{R}{D}, \quad (\bar{D}_{12}, \bar{D}_s) = (D_{12}, D_s) / D \\ \bar{D} &= \frac{12(1-\nu_1^2)D}{E_1 h^3}, \quad \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \bar{\rho}_k = \rho_k / \rho \end{aligned} \right\} (2)$$

のように無次元化する。ここで B_{12} は伸びと曲げの連成剛性である。また、以下のことを仮定する。

① はく離部分の各層のたわみは等しい。

この仮定①の下で運動方程式を導き、それらの解に境界条件と連続条件を適用して解析する。

円環部分の運動方程式は、微分演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3)$$

を用いると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left(\nabla^2 \bar{u}^0 - \frac{\bar{u}^0}{\xi^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w} &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

と表される。

次にはく離部分において、振動中上下の板が接触すると、はく離界面に相互接触力 $q_k(r, \theta, t)$ が作用すると仮定する。

はく離部分の各層の半径方向の運動方程式は

$$\bar{\rho}_k \bar{h}_k \frac{\partial^2 \bar{u}_k^0}{\partial \tau^2} - \bar{C}_k \left(\nabla^2 \bar{u}_k^0 - \frac{\bar{u}_k^0}{\xi^2} \right) = 0, \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

となり、また鉛直方向の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \nabla^4 \bar{w}_1 + \bar{q}_1 &= 0 \\ \bar{\rho}_k \bar{h}_k \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial \tau^2} + \bar{D}_k \nabla^4 \bar{w}_k + (\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}) &= 0 \\ &(k=2, \dots, N-1) \\ \bar{\rho}_N \bar{h}_N \frac{\partial^2 \bar{w}_N}{\partial \tau^2} + \bar{D}_N \nabla^4 \bar{w}_N - \bar{q}_{N-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし

$$(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{N-1}) = (q_1, q_2, \dots, q_{N-1})R^4/Dh \quad (7)$$

である。ここで、 $\bar{w}_k = \bar{w}_1$ の仮定①を適用し、式(6)を加え合わせると運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 = 0 \quad (8)$$

のように非常に簡単となる。円環部分とはく離部分のたわみ $\bar{w}(\xi, \tau)$ 、 $\bar{w}_1(\xi, \tau)$ と、円環部分の基準面の半径方向変位 $\bar{u}^0(\xi, \tau)$ 、はく離部分の各層の中央面の半径方向変位 $\bar{u}_k^0(\xi, \tau)$ を

$$\left. \begin{aligned} [\bar{w}(\xi, \tau), \bar{w}_1(\xi, \tau)] &= [X(\xi), X_1(\xi)] \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ [\bar{u}^0(\xi, \tau), \bar{u}_k^0(\xi, \tau)] &= [U(\xi), U_k(\xi)] \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とおくと、各運動方程式より固有関数 X, X_1, U, U_k は

$$\left. \begin{aligned} X(\xi) &= A_1 J_0(\lambda \xi) + A_2 Y_0(\lambda \xi) + A_3 I_0(\lambda \xi) + A_4 K_0(\lambda \xi) \\ X_1(\xi) &= A_{11} J_0(\lambda_1 \xi) + A_{13} I_0(\lambda_1 \xi) \\ U(\xi) &= B_1 J_1(\beta^2 \xi) + B_2 Y_1(\beta^2 \xi) \\ U_k(\xi) &= B_{k1} J_1(\beta_k^2 \xi) + B_{k2} Y_1(\beta_k^2 \xi), (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のように求められる。ここで、

$$\lambda_1^2 = \frac{\bar{p}}{\sqrt{D_s}}, \lambda^2 = \bar{p}, \beta^2 = \frac{\bar{p}}{\sqrt{C}}, \beta_k^2 = \bar{p} \sqrt{\frac{\bar{\rho}_k h_k}{C_k}} \quad (11)$$

である。

次に X, X_1, U, U_k に境界条件

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1 \text{ で } X = 0, \frac{dX}{d\xi} = 0, U = 0 \\ \xi = 0 \text{ で } U_k = \text{有限より } B_{k2} = 0, (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

および連続条件

$$\left. \begin{aligned} \xi = \bar{c} \text{ で } X_1 = X, \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{dX}{d\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{s12}}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \sum_{k=1}^N \frac{h}{R} \bar{d}_k \left(\bar{C}_k \frac{dU_k}{d\xi} + \bar{C}_{k12} \frac{U_k}{\xi} \right) \\ = \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{12}}{\xi} \frac{dX}{d\xi} - \bar{B}_{12} \frac{U}{\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_1) = \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X) \\ U_k = U - \frac{h}{R} \bar{d}_k \frac{dX}{d\xi}, (k=1, 2, \dots, N) \\ \sum_{k=1}^N \left(\bar{C}_k \frac{dU_k}{d\xi} + \bar{C}_{k12} \frac{U_k}{\xi} \right) = \bar{C} \frac{dU}{d\xi} + \bar{C}_{12} \frac{U}{\xi} - \bar{B}_{12} \frac{1}{\xi} \frac{dX}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を適用すると

$$[K][B] = \{0\} \quad (14)$$

の関係式が求められ、これより

$$|K| = 0 \quad (15)$$

の振動数方程式が得られる。ただし、

$$\nabla_d^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \quad (16)$$

である。

3. 実験と考察

大きさの等しい三重の層間はく離を有する四層の積層円板を製作した。試験片の外見寸法は一辺が200mmの正方形で、全板厚 h は0.9mmである。試験片は、表1の板をシアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。式(15)から求められる理論固有振動数と実験値を比較した。図2は縦軸に固有振動数 f [Hz]、横軸に無次元はく離半径 \bar{c} をとって示したものであり、理論振動数に対する実験値の最大誤差は7%程度で、理論曲線は実験値とよく一致している。したがって、本報告の解析モデルは、積層円板の自由振動特性に及ぼすはく離の影響を調査する場合には有効な方法といえる。

Table 1 Test-Piece

k	Plate 1	Plate 2	h_k [mm]
1	Copper	Steel	0.2
2	Aluminum	Aluminum	0.4
3	Steel	Copper	0.1
4	Copper	Steel	0.2

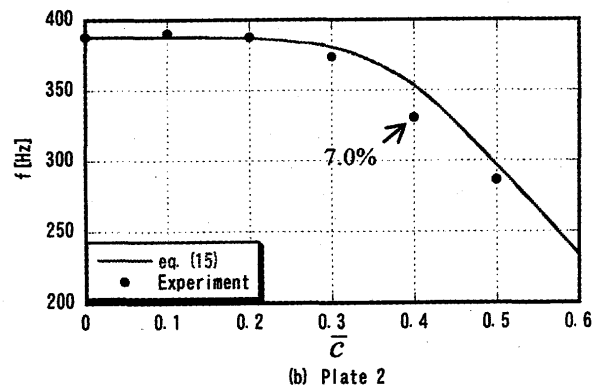
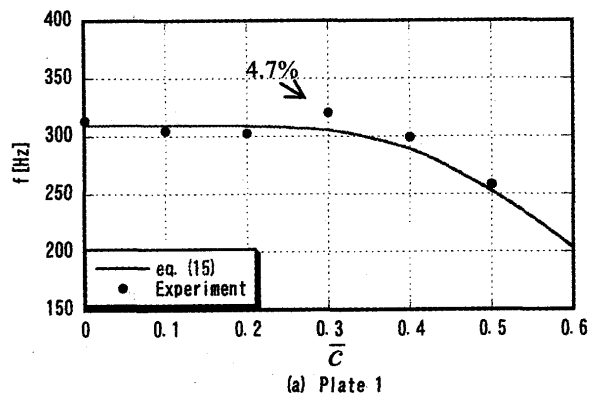


Fig.2 Comparison between experimental and theoretical fundamental frequencies