

## 算数・数学教材考（1）

### —分数除について—

植村 哲郎〔鹿児島大学教育学部（数学教育）〕

## A Study on Mathematics Materials (1)

### —Dividing Fractions by Fractions—

UEMURA Tetsuro

キーワード：算数教科書、国定教科書算術、分数除問題、分数除指導

#### 0 はじめに

分数の計算方法とその意味理解の指導については、いろいろな問題点が指摘され議論も尽きないところである。とりわけ分数で割る計算（本稿では分数除と記す）については、議論が大きく分かれる。

やや旧聞になるが2001年12月の朝日新聞に、分数の割り算に関する対立する見解の2つの投稿記事が掲載された（資料1-1）。「分数で割る割り算は、除数の逆数を掛ければよい」ことについて、「その意味理解は小学生には困難である」、「分数のわり算を小学校で扱うのは時期尚早である」、また、「最初はその意味はわからなくても、結果を利用しているうちにわかってくる」、「現行の教科書はその意味理解にこだわりすぎ」などの意見が述べられている。

両者の見解にはそれぞれ理解できる面も多い。筆者は、このことを講義や研修会の話題にしたり、アンケート調査を行ったり、分数除指導に関する様々な資料を収集してきている。

本稿では、まず、前述した2つの見解を紹介する。そして、現在小学校で算数の学習指導に当たっている小学校教師と、小学校でどのような指導を受けたか記憶に新しく、また、近い将来小学校の教師として算数を指導する（ことを志望している）ことになる教育学部学生との、両者の見解に対する考え方を紹介する。

次に、これらの議論の背景にある分数除に関する学習指導の実態について、教科書の分析を通して考察する。

さらに、分数除に関する小学校児童の理解度の

実態とその原因の分析を行い、最後に、これらの資料に基づく考察と指導法改善のための提案を行う。

#### 1. 分数除指導に関する2つの見解

アニメ映画「おもひでぼろぼろ」（資料1-2）の中に、次のようなシーンがある。主人公の少女が、「 $\frac{3}{2}$ の $\frac{2}{4}$ 割る $\frac{1}{4}$ はいくらか？」という問題の意味がどうしてもわからない。優等生の姉がいて、「分数の割り算はひっくり返して掛ければいい。九九さえできれば分数の割り算は簡単だ。」という。主人公はどうしてもその意味にこだわってしまい「 $\frac{3}{2}$ を $\frac{2}{4}$ で割るということはどういうことか」と姉にきくのであるが、優等生の姉もこの問いには答えることができない。疑問を持ち続けているうちに次第に算数が嫌いになっていくのである。

このアニメ映画のなかの姉妹の会話を引き合いに出し、福沢氏（2001）は、次のような考えを述べている

- ① 姉は方法を覚えているだけだが、やえ子は、その意味を考えようとしており、本当の数学をしている。
- ② 何故、逆数をかければよいのか という疑問を持ちながら、算数を嫌いになる子いるのではないか？
- ③ 逆数を掛ける方法に疑問も持たず、そのまま使ってきて挫折感を味わわなくてすんだ。
- ④ 天下り式暗記させる受験式教育は、数学嫌いを助長している。
- ⑤ 現実と遊離した難問奇問は学習しても何の

益にもならない。

- ⑥ 小学校で教えるのは時期尚早である。

また、福沢氏の見解に対し、戸瀬氏 (2001) は、次のような意見を述べている。

- ① 最近の教科書は、その意味理解にスペースをとりすぎである。
- ② その結果、数学の応用力、理解力とも落ちている。
- ③ 計算練習を繰り返すことは、詰め込み教育として否定することではない。
- ④ これを使って、数学的経験を積むことにより、理解が深まる。
- ⑤ 現実と遊離した難問奇問として、回避するのは短絡的である。
- ⑥ 算数嫌いの原因は、面白さ、有用性を伝えられない教師の責任である。
- ⑦ 学ばないことの損出は大きい。

また、アニメ「おもひでぼろぼろ」の中では、主人公は「 $2/3 \div 1/4$ 」の具体的な場面として、「 $2/3$ 個のリングを4人で分けること」だからと、乗法の問題と勘違いをしていたり、結果が「割るのに小さくなるの？」というシーンもある。

子どもの実態をよく調査して作成されたアニメ映画で、算数教育への警鐘を鳴らした作品でもある。

詳しくは後述するが、学生に対する調査でも、割り算の問題として乗法の問題を示すケースが非常に多かった。また、「 $2/3$ 個のリングを $1/4$ で分けること」という、分数を分離量で考えるパターンが多く見られ、ここらに分数除は現実離れしているといわれる原因があると思われる。

## 2. 分数除に関する現職教師と学生の意識

### (1) 現職教師の反応 (H. 18. 8 調査)

夏休み中の算数教育の研修会に参加した現職の先生方 (算数科に関心の強い教師と思われる) に、上述した両氏のそれぞれの見解に対して、(そう思う、そうは思わない) の2者択一式のアンケート調査を行った。その結果を以下の表に示

した。

#### 福沢氏の見解に対する反応

(数値は、「そう思う」と応えた %)

質問	①	②	③	④	⑤	⑥
反応	91.6	68.7	70.8	33.3	4.1	6.2

#### 戸瀬氏の見解に対する反応

(数値は、「そう思う」と応えた %)

質問	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
反応	12.5	22.9	83.3	89.6	87.5	85.4	87.5

特に、「そう思う」の回答が多かったものは、福沢氏の①、戸瀬氏の③④⑤⑥⑦、少なかったのは、戸瀬氏の⑤⑥戸瀬氏の①の意見である。

反応をまとめると、分数除の÷分数が×分数になることを指導することは数学的には重要である、経験を積むことで理解が深まる、分数除を現実と遊離した問題として避けるべきではない、有益である、と大多数の教師が考えていることを示している。また、「算数嫌いの原因は、面白さ、有用性を伝えられない教師の責任である」と、考える教師が85%いることも重要な結果として受け止めたい。

### (2) 学生の反応 (H. 16. 10 調査)

算数科教育法の講義の受講生に、2つの投稿記事とアニメ映画を紹介した後、私見をレポートさせた。レポートを集約したものを以下に紹介する。

#### ○ 両者の意見へ賛否

- ・どちらかという戸瀬氏に賛成する者が多い
- ・「どちらも理解できる どちらとも結論できない」とする反応も多い。

#### ○ ÷分数を小学校で指導する必要があるか

- ・日常使われないし、実用性がなく非現実的である。
- ・だが、やらない理由にはならない。理由として、算数や数学は、考え方、論理的に考えることをさせる教科、学問だから
- ・小学生の理解能力、レディネスができていないのではないか。

#### ○ 「小学校ではわからなくても、あとでわかるようになる」とする見解について

- ・賛成者は少ない。自分たちも未だにわかっていないではないか
- ・賛成もいる。中学校、高等学校で比例や反比例など学習している間に理解が深まる。
- 「÷分数が、×逆数」になることの説明について
  - ・不思議に思って、親や教師に聞いたが未だに納得できる説明は聞いたことがない
  - ・大人の大部分がその意味を理解していないし、子ども達に説明することはできない。
  - ・逆数を掛けることの意味について、疑問に思ったことがなかった。
  - ・わからずに悩んだ人も数多くいる
- 「日常的に有用性がない」とする見解について
  - ・反対意見は少ない
  - ・だから、学習させる必要はないと言うことにはならない。
  - ・算数は、考えさせる、論理を教える教科であるから。考えることが本当の真の学力になる
- 「算数・数学をおもしろく感じることに」について
  - ・わからなかったことがわかった時、
  - ・問題が解けたとき（公式の導き方は知らなくても、公式を使って）
  - ・教師として、算数のおもしろさや有用性をわからせる責任がある
  - ・なぜそうなるかを、きちんと説明できることが教師の役目しいちず教師の腕の見せ所である。
  - ・疑問をもつような児童には教えがいがあ
- 現在の算数教育について
  - ・詰め込み教育になっていないか
  - ・問題解法のパターンを覚えることになっていないか
- 計算の反復練習、ドリルの量について、100マス計算などは、やりすぎではないか。計算力がないのは練習不足による算数嫌いが増えるかも知れないが、計算だけでもできることにより、自信を持つ子も増える

○その他

- ・分数の計算では、和、差より 積や商が簡単だった。和や差だけを扱っては、四則計算の一部（積と商）を省くことはできない

(3) 分数除が適用される問題場面

前述の福沢、戸瀬(2001)は、「分数除は、無用の難問・奇問が多い」「無用なものとして学ばないことによる損出は大きい」と述べている。

日常的に分数除が使われる場面としてどのようなことがあるのか、問題の例を学生に考えて貰った。また、小学校の教科書ではどのような問題が想定され指導されているのか調査した。

① 学生が想起した分数除の問題例

対象：鹿児島大学養育学部学生（算数科教育法受講生53名）

質問：「異質と思われる分数の割り算の問題を2問あげよ」

受講生の専修は教育学部全体にわたっており、芸術・実技系、理系、文系学生のバランスのとれた構成になっている。従って、分数除の問題も一般社会人の平均的なが考えになっていると考えられる。

回答例を集計したものが資料2である。

まず、回答の分数除の問題を表2のように分類した。

表2 作成された問題の分類

回答数	人数	等分除	包含除	等分除と包含除
0	10	0	0	0
1	22	11	9	0
2	21	11	5	8
合計	53	22	14	8

53人中、無答者数10人（18.8%）、1題 作成者数22人（41.5%） 合計32人（60.3%）、実に6割の学生が問題例2問を示すことができなかった。

作成された問題を、等分除と包含除、連続量と分離量の観点から分類すると、等分除の問題22題、包含除の問題14題、連続量43題、分離量21題であった。割り算の問題としては、等分除を考える傾向が強いことを示し、2問作成した者のうち

等分除と包含除をそれぞれ1問ずつあげた者が8名あった。これは、問題の異質性の視点として、等分除、包含除の問題の違いで判断したと思われる。連続量と分離量に関しては、今回の調査では連続量の例題が分離量のほぼ2倍にあたり、我が国では、分数が連続量の大きさを表す数として導入することが多いことから当然の傾向であるが、一方、分離量の分数等分の例も非常に多くなっている。

分数除の問題例を、問題の内容から分類すると、割合の問題が最も多く、なかでも同種の量の割合を扱った問題がほとんどで、異種の量の割合(単位あたりの量の大きさ)としてあげられた例は少なく、早さの問題だけであった。

誤答、難問、奇問と思われる問題もかなり見られた。

誤答の例として最も多かったものが、分数除になってない問題で、かけ算の問題になっているもの9問、引き算の問題になっているものも3問あった。

また、難問、奇問と指摘されそうな問題も多い。例として、「 $3/4$ 等分する」、「 $3/4$ 人で分ける」のような分数で等分する問題、 $2/5 < 3/4$ にも拘わらず、 $2/5$ のなかに $3/4$ がどれだけ含まれるか、を問うような問題が見られた。

以上の結果を分析すると、

- 分数除の問題場面は、実際的な場面としては少ない。
- 割算の問題を、等分除、包含除に大別した場合、等分除の問題が多い。質的な違いを、等分除、包含除と捉えることは少ない。
- 分数は、連続量の大きさを表す数として導入されるが、分数除の問題としては、分離量を分割する分数を考えることが非常に多い。
- 分数除の問題が、小学生にとって奇問と考えられる原因は、1個のケーキを「 $1/4$ 人で分ける」、「 $2/3$ 等分する」など、分離量を分数で等分するような場面が想定されていることにあるのではないかと推測される。また、難問と映る理由は、応用場面が速度の問題や、比の用法、特に比の第3用法など、分数でなくても本来難しいとされる割合の問題になっている

ことが多いからではないかと推測される。

以前行った調査では、圧倒的に分離量を用いた操作分数の例、例えば、「2個のリングを3等分したものを $1/4$ 人で分けると」のような問題も多かった。さらに、追調査が必要と思われる。

- 分数除の問題が現実離れしているように見られることについて

一般に数学で扱う例題は、実際的な問題場面を単純化したり、理想化したりして抽象化し、数学的に本質的なもののみを抽出するために、現実離れしているように見えることもある。

例えば、小数の割り算の問題「40%の鉄分を含む鉄鉱石がある。750gの鉄を得るためには、何gの鉄鉱石が必要か」は、現実離れした奇問とかの指摘は当たらない。

これをもっとリアルなものにするには、鉄鉱石や製鉄の方法などの知識も必要であろうが、これは数学的な処理に必須ではないので省略されることになる。「割合の40%を $2/5$ に、750gを $3/4$ kg」と変えることで分数除 $3/4 \div 2/5$ の問題となり、この方が小数の計算より簡単に求められることになる。小学生に提示される例題はこのような意図のもとに、現行のようなものになっているのである。

### 3. 教科書に見られる分数除の扱い

- (1) 我が国の教科書における「分数÷分数」指導方法の現状と歴史的変遷

現行の日本の教科書では、導入で使われる課題例としては、単位量あたりの大きさ(1あたり量)を求める等分除の問題がほとんどである。

また、分数の割算が逆数の乗法で計算できることの説明は、面積図や線分図に図示したり、割り算では「被除数、除数に同じ数を掛けても商は変わらない」という性質を使って行われることが多い。(資料3-1)

しかし、面積を扱った問題では、図-2のような面積図による説明が逆数を掛けることの意味をよく表現している。しかし、図が複雑に混み入っ

ていて分かり難い、意図的に仕組まれた図で自然に出てくるような考え方ではない、また、面積以外の問題へ転換できない、一般性がないなどの指摘もある。

（資料3-1）の図-3、5のような線分図は、整数、小数の四則計算や、分数の乗法の計算などでも良く用いられ、他への援用の利く一般性のある図で、除法においてもその構造を的確に図表現できる良さがある。しかし、分数除の立式の困難を解除するためには効果的とは言えないようである。

図-6の計算による説明は、簡単で、論理的でもある。具体的な問題場面や、分数の意味とは乖離したものになっており、分数除の小学生への説明としては、疑問に思っている。理由について、詳しくは後述する。

現行の教科書にあるこれらの説明は、福沢氏によれば、意味はわからないまま公式を覚えるような結果になっておりは、受験式勉強で無意味であるとされ、戸瀬氏によれば、説明が詳しすぎるとする見方もある。

次に、我が国の算数教育ではどのような指導がなされてきたのか、教科書分析を通して歴史的に考察してみる。大正から昭和初期の第3期国定教科書では、その意味は全く行われぬまま計算手順のみが紹介されている。それが応用される問題としては「 $1/6$ が $3/4$ に当たる数を求める」問題、「比の第3用法」がいきなり扱われているのも奇妙である。

昭和10年編集された第4期国定教科書、能力開発主義の教科書として評価の高かったと言われている緑表紙教科書では、2つの分数を共通の単位分数で表し整数の除法で計算できることを示し、それらの結果の規則から帰納的に導く方法がとられている。

ここで特筆すべきこととして、分数除は小学校5年生（上）の指導内容になっていることである。

戦後、昭和26年改訂版の小学校学習指導要領算数科（試案）では、分数の割り算に関する指導内容は「分数÷整数」に限定され除数が分数の計算は中学校1年の指導に委ねられている。

実際にこの当時は、分数除の計算は中学校1年

数学の教科書で扱われている。（資料3-3、図-1）

#### (2) 外国の教科書における分数除の扱い

外国ではどうであろうか。ハワイ州の小学校算数の教科書（資料3-4）では、「6カップのソースは $2/3$ カップの何杯分か」、包含除の問題による分割分数の考え方で説明されている。

イギリスでは、中学校の教科書に「パンケーキ1個を作るのに $1/4$ パックの材料が必要である。 $7/4$ パックの材料から、何個のパンケーキが必要か」と言う包含除の問題で、数直線を用いて説明がされている。

2002年のイギリスの国家カリキュラムでは、キーステージ4（14-16歳）の指導内容に、「乗法の逆数として単位分数を用いること。・・・分数に整数を掛けたり整数で割ったり、また分数に単位分数を掛けたりすること」と記されている程度で、一般的な分数の除法は指導されなくても良いことになっている。植村(2002)

以上まとめると、分数除は、我が国でも歴史的には学校5年生の指導内容であったり、中学校1年の指導内容であった時期もあった。また、外国でも中学校の内容とされたり、高校で扱おうとする国もあるのである。また、小学生には理解困難であるから中学校の指導内容にすべきとの意見も多く聞かれる。

我が国では現在、「分数の四則計算までは小学校の指導内容とする」という暗黙の共通理解になっているようであるが、これまでの考察から、分数除を小学校の指導内容とする確かな根拠はないものと判断される。

## 4. 分数除の理解困難の実態と原因の分析

文部科学省（当時は文部省）が過去に行った調査のなかに、小数と分数の乗法と除法の立式に関する報告がある。

### (1) 小数と分数の乗法の立式に関する調査

平成5年文部省教育課程実施状況調査問題

#### ① 小数の乗法（第5学年-B3）

1ℓが650円のペンキがあります。このペンキ0.7ℓ買ったときの代金はいくらですか。答

えを求める式を□の中に書きましょう。

(□は省略)

②分数の乗法 (第6学年-A2)

じろうさんは、かべをペンキでぬろうとしています。1ℓのペンキで9㎡のかべをぬることができます。3/4ℓのペンキでは、何㎡のかべをぬることができますか。答えを求める式を□の中に書きましょう。(□は省略)

表1 「×小数」及び「×分数」に関する調査結果 (単位：%)

	正答	誤答 (除法)	小計
×小数	66.0	19.7	85.7
×分数	64.8	17.3	82.1

(2) 小数と分数の除法の立式に関する調査

1997年文部省教育課程実施状況調査問題

③小数の除法 (第5学年-A4)

次の図のようなパイプがあります。長さは3.5mで、重さは4.2kgです。パイプ1mの重さは何kgですか。答えを求める式を□の中に書きましょう。(パイプの図、□は省略)

④分数の除法 (第6学年-B2)

水そうに水を入れてあります。2/3分間に5/6ℓの水が入ります。同じ割合で水を入れていくと、1分間では何ℓの水が入りますか。答えを求める式を□の中に書きましょう。

(□は省略)

表2 「÷小数」及び「÷分数」に関する調査結果 (単位：%)

	正答	誤 答		小計
		除数と被除数が逆	乗法	
÷小数	65.9	9.2	10.1	85.2
÷分数	27.2	20.1	18.1	65.4

小数、分数に関する乗法及び除法の問題4問の中で、正答率は27.2%、除法を意識しながら除数と被除数が逆になる誤答例 (20.1%) である、分数除は他とは明らかに異質であることを示している。

岩崎・山口 (1983) は、この原因を4つの構成

要素 ①問題場面 ②除数の大きさ ③図の併記

④数値の形態 の差異によって分析している。

結論として、調査結果の差は、④数値の形態の要因、つまり、数値が小数でなく分数であることの違いが大きいと思われる。しかし、乗法の場合は大差はないのであるが、除法の場合に歴然とした差異が生じるのはなぜであろうか、教授学的に見て興味のつきない課題であるとしている。

考えられる理由の1つに、÷小数は割り算であるが、÷分数は逆数を掛ける乗法になっていること、つまり計算の形式がその意味と結びつかないところにあるとしている。岩崎・山口 (2007, p. 12)

### 5. 分数除の学習指導改善の試案

(1) 岩崎・山口 (2007) は、現行の教科書に見られる分数除の指導例 (資料3-1)、割合の第3用法の問題を線分図や面積図を用いた方法は、分数除指導には必ずしも機能していないとして、次のような対案を提案している。

わが国でとられる指導法は、比例のスキーマにもとづいている。しかし、立式の指導では、比例のスキーマに基づく指導より、倍概念を用いた比較のスキーマの場面の方が、除法の立式につながりやすい。

また、×逆数の指導は、比例のスキーマより、分数や除法の性質に基づく演繹的推論に基づく指導が良い。

具体的には、「はなちゃんはリボンを3/4mもっています。ゆきちゃんは2/5mもっています。はなちゃんのリボンの長さゆきちゃんのリボンの長さを比べましょう」のような問題提起を行うと、比較のスキーマに基づく指導になり、

$3/4 - 2/5$ ,  $3/4 \div 2/5$ ,  $3/4 : 2/5$  が考えられ立式が考えやすくなるという。

しかし、ここには÷分数が×逆数になることを説明する論理がないので、そこでは、

$$\begin{aligned} 3/4 \div 2/5 &= (3/4 \times 20) \div (2/5 \times 20) \\ &= (3 \times 5) \div (2 \times 4) = (3 \times 5) \div (4 \times 2) \\ &= 3/4 \times 2/5 \end{aligned}$$

のような、演繹的推論によって導くと日常の経験や量に関係しないため、その意味に惑わされず、

論理的にしかも比例による説明よりはるかに明瞭に「×逆数」が説明できるとしている。

岩崎・山口（2007）の論文の主旨は、算数と数学の接続である。接続を2つの一般化（外延的一般化、内包的一般化）捉える立場からは、上述した演繹的推論は外延的一般化として算数と数学の接続の原理に叶ったものであると言うこともできる。

しかし一方、この方法は文字を使って、

$$\begin{aligned} a/b \div c/d &= (a/b \times b/d) \div (c/d \times b/d) \\ &= a/b \times d/c \end{aligned}$$

を証明する方法と考え方は全く同じである。分数の意味に立ち返ることなく計算のアルゴリズムのみが説明されることになる。小学校の教師からは、分数の具体的な場面を通して計算のアルゴリズムを説明する方が良いのではないかとこの声も聞かれる。

また、比較のスキーマで分数除を考える場合、広い意味の包含除であり、比例のスキーマは等分除である。立式は、比較のスキーマの問題で考える方が分かり易いといわれる。

竹内（2001）は、 $2/3 \div 1/4$  の具体例として、「 $2/3$  kgの砂糖があります。これを $1/4$  kgずつ袋に小分けするとき、何袋分できますか」という問題を考えると、分数除の問題としての意味が分かり易いとしている。そして解決の仕方として2つの分数を通分して、 $8/12$ 、 $3/12$  と考えると2袋と $2/12 = 1/6$  余ることは児童も理解できるであろう。しかし、ここには、以下のような大きな問題点が潜んでいる。児童は、この結果を $2\frac{1}{6}$ と考えるであろう。正しくは $2\frac{2}{3}$ である。

この方法では、 $1/6 \div 1/4 = 2/3$  となること、つまり「÷分数が、×逆数となる」ことが既知でなければならない。「÷分数が×逆数となる」ことの説明には結びつかないのである。

教科書で包含除を用いた説明が少ないのは、このあたりにも原因があるように思われる。

## (2) 分数除指導のための数学的表現の改善

分数除の問題で、問題場面を文章のみで提示した場合と絵を併記する場合には関心の持ち方が異なるし、分数除の構造も線分図などの図に表すと分かり易くなる。中原（1999）も、算数や数学の

学習では、絵や図、式、学習具などの表現を有効に活用することによって算数的知識の構成を促進することを指摘し、ブルーナーのE I S原理を改良して、数学的表現の特質を5つに分類し、体系化を行っている。

(E1) 現実的表現：実世界の状況、実物、具体物などによる表現

(E2) 操作的表現：学習具などに動的操作を施すことによる表現

(I) 図的表現：絵、図、グラフなどによる表現

(S1) 言語的表現：日本語、英語など日常言語を用いた表現

(S2) 記号的表現：数字、記号など数学的記号を用いた表現

資料3-1の図1、図4が現実的表現、÷分数が×分数で計算できることを示すには、図2のような面積図を用いた操作的表現がその方法を表現している。また、図3や図5の線分図が図的表現とすることができる。図6が記号的表現と言えるであろう。実際の指導では、教師の言葉による説明、言語的表現が用いられることになる。

教師から「計算はできるのだが、文章題になるとさっぱり」ということを聞く。そして原因を国語力の問題とされることもある。2でも述べたが算数・数学の問題では、数学的に必要不可欠な事柄以外は省略されるので、文章構造としては単純で、つまずきの原因も、国語力と言うより算数的な構造が理解できないことにあることが多い。

学習指導では、可能な限り多様な表現を用いて問題の構造を表現するよう心がけ、児童自身がそのような表現ができるようになることが肝心である。

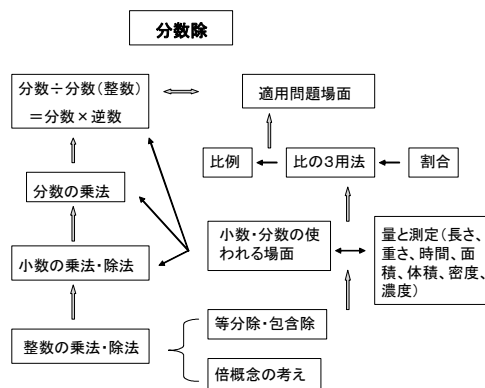
## (3) 分数除指導の系統性と体系化

本稿では、学生が想起した分数除の問題や教科書等に取り上げられた問題（資料2-1, 2）や指導法について分析してきた。

その結果分数除には、乗法、除法、分数、割合、比例の考えなどが複雑に関連していることがわかる。指導にあたっては、まず教師が、分数除を「数と計算」領域の指導系統の頂点にあたる内容としてみるだけでなく、数量関係、量と測定、図形のすべての領域との横断的な関連も見ながら

体系的総合的に捉えておく必要がある。

図1 分数除の系統、体系



分数除に連なるこれらの内容は、いずれも理解困難な児童が多いと言われる。

分数除の指導にあたっては、これらの内容が、児童にはどのように指導されてきているか、理解の程度はどのような状態かを把握しておく必要がある。例えば、次のようなことが考えられる。

- ① まず、乗法を、倍概念として見ることができること。
- ② 除法には等分除と包含除があり、乗法の逆として考えることができること。
- ③ 分数の種類には、操作分数（分割分数）、量分数、割合分数、商分数などの考え方があり、場面によって使い分けられること。
- ④ 割合の考え方を理解していること。割合の考え方には、同種の量の割合、異種の量の割合（単位量あたりの大きさ）が考えられること。
- ⑤ 割合の問題に分数除を摘要し処理できること
- ⑥ 比例の考え方ができること。分数除を比例の考えで捉えることができること。

[引用・参考文献]

- 1) 福沢伸一(2001)、朝日新聞2001.12.1
- 2) 戸瀬信之(2001)、朝日新聞2001.12.8
- 3) 文部省発行 国定教科書
  - 第三期 尋常小学算術書六学年児童用, p. 21
  - 第四期 尋常小学算術書五学年(上) p. 22, 23
  - 第六期 「算数 第六学年用 下」, p. 99

- 4) 河口商次他 (1958)、「標準中学数学1」、教育出版, p. 51
- 5) 文部省小学校学習指導要領算数科編 (試案) 昭和26年改訂版、文部省
- 6) 一松信他、小学校算数6年下、平成17年版
- 7) 杉山吉茂他、新しい算数6年上、平成14年版
- 8) 岩崎秀樹・山口武志(2007)、一般化分岐モデルに基づく分数除の教授・学習に関する研究、算数と数学の接続における2つの一般化に関する開発研究, pp. 1-23、
- 9) KEY MATHS 7, nelson thones, 2000, p. 354
- 10) MATH, Scott Foresman-Addison Wesley, 2002, p. 376
- 11) 植村哲郎・藤田太郎・増山聡 (2002)、ナショナルカリキュラムにおける数学(1)「数と代数」領域の学習計画、鹿児島大学教育学部教育実践研究紀要第12巻、2002. 11
- 12) View The National Curriculum. ... ks2 ks2 ks3 ks4 foundation ks4 higher. . . , (<http://www.nc.uk.net/servlets/Subject?Subject=Ma>)
- 13) 竹内英人 (2001)、なぜ数学を学ぶのか、岩ジュニア新書, pp. 14-18
- 14) 中原忠男 (1999)、構成的アプローチによる算数の新しい学習作り、東洋館出版社, pp. 27-29





資料2-1 学生が考えた分数除の問題

<  $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$  の具体的な問題 >

- 包含除
  - ・ 連続量：  $\frac{2}{5}$  mの紐を  $\frac{3}{4}$  mずつ分けると、何人に分けられますか？ (9人)
  - ・ 分離量：  $\frac{2}{5}$  個のリンゴを  $\frac{3}{4}$  個ずつ分けると、いくつできますか？ (6人)
- 等分除
  - ・ 連続量：  $\frac{3}{4}$  lで  $\frac{2}{5}$  m<sup>2</sup>塗れるペンキがある。1 lでは何m<sup>2</sup>塗れるか？ (11人)
- 割合
  - ・ Aさんは  $\frac{2}{5}$  ccの水を持っています。AさんはBさんの  $\frac{3}{4}$  倍の水を持っています。Bさんは何ccの水を持っていますか？ (1人)
  - ・  $\frac{2}{5}$  mのリボンは  $\frac{3}{4}$  mのリボンの何倍か？ (7人)
  - ・ リボンを4等分して、その3個分をつなげると、 $\frac{2}{5}$  mになる。もとはいくらでしょう？ (1人)
- 距離と時間、距離と速さ
  - ・  $\frac{2}{5}$  kmの距離を歩くと  $\frac{3}{4}$  時間かかった。そのときの速さは？ (4人)
  - ・  $\frac{2}{5}$  kmの距離を時速  $\frac{3}{4}$  kmで歩いた。その時の時間はどれくらいかかったか？ (7人)

【誤答例】

- $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$  (乘法になっている問題例)
  - ・ ケーキを5等分しました。そのうちの2つをさらに4等分し、その4等分したうちの3切れをべつのお皿に取り分けました。その3切れ分は全体の何個分ですか？ (4人)
  - ・ Aさんは5mの紐を持っていて、そのうちの2mをBさんにあげました。Bさんはその2mの紐を4等分し、その4等分のうちの3つ分を使いました。Bさんは何m使ったのでしょうか？ (2人)
  - ・ 2mのひもを5等分します。分けられた紐1本分をさらに4等分したうちの3つは、紐全体のどれほどの長さになりますか？ (1人)
  - ・ 丸いケーキが  $\frac{2}{5}$  残っていました。残りの  $\frac{3}{4}$  を食べようと思います。残っているケーキのどれくらいを食べることになりますか？ (1人)
  - ・ 太郎君は1メートルの紐を花子さんと2人で分けて、その  $\frac{2}{5}$  をもらいました。そしてその紐を次郎君と分けて、そのうちの  $\frac{3}{4}$  をもらいました。太郎君は何mもらいましたか？ (1人)
- 引き算になっている問題例
  - ・ ロープを  $\frac{2}{5}$  mもらいました。このうちの  $\frac{3}{4}$  mを友達にあげました。自分の手元に残るロープは何mでしょうか？ (1人)
  - ・  $\frac{2}{5}$  m<sup>2</sup>の花壇があります。その  $\frac{3}{4}$  にチュ

ーリップを植えると残りの面積はどれくらいになりますか？（2人）

資料2-2 現行の日本教科書の分数除の問題例

（学校図書、東京書籍6年生用）

【難問・奇問】

- $\frac{3}{4}$  等分
- ・ 2つのケーキを5等分し、それを $\frac{3}{4}$ 等分したら、ケーキの何等分か？（1人）
  - ・ 1個のリンゴを5つにわけました。そのうちの2つを $\frac{3}{4}$ 人で分けるとすると、1人分は何個ですか？（3人）
  - ・  $\frac{2}{5}$ を $\frac{3}{4}$ 等分したら、どうなるか？（1人）
  - ・  $\frac{2}{5}$ ㎡の壁を $\frac{3}{4}$ 人でぬると、1人分は何㎡になりますか？（2人）
  - ・ ケーキが $\frac{2}{5}$ 個ある。 $\frac{3}{4}$ 人で分けると1人分はどれくらい？（1人）
  - ・  $\frac{2}{5}$ mの紐を $\frac{3}{4}$ 等分すると1つは何mか？（1人）

- $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$ （包含関係が考えにくい場合）

- ・  $\frac{2}{5}$ ℓのジュースを $\frac{3}{4}$ ℓずつ分けるといくつできるか？（13人）
- ・  $\frac{2}{5}$ のピザがある。 $\frac{3}{4}$ ずつ分けると、 $\frac{3}{4}$ が何個できるか？（1人）

- ①  $2\frac{1}{5}$ m<sup>2</sup>のへいをぬるのに、青いペンキを $\frac{3}{4}$ dl使いました。このペンキ1dlでは、何m<sup>2</sup>ぬれるでしょうか。

（等分除、1あたり量）

- ② 長さが $\frac{3}{4}$ mで、重さが $\frac{9}{5}$ kgの鉄の棒があります。同じ鉄の棒1mの重さは何kgでしょうか。（等分除、1あたり量）

- ③ 牛肉を $\frac{8}{5}$ kg買ったなら、代金は2400円でした。この牛肉1kgのねだんは何円ですか。（等分除、1あたり量）

- ④ 油 $\frac{4}{3}$ ℓの重さは $\frac{6}{5}$ kgあります。こ油1ℓの重さは何kgですか。

（等分除、1あたり量）

- ⑤ 自動車で60kmの道のりを走るのに、 $\frac{4}{3}$ 時間かかりました。この自動車の時速を求めましょう。

（等分除、早さ、単位あたり量）

- ⑥ 面積が $7\frac{1}{8}$ m<sup>2</sup>で、たての長さが $\frac{3}{4}$ mの長方形の花壇があります。この花だんの横の長さは何mでしょうか。

（かけ算の逆、 $\bigcirc \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{8}$ ）

- ⑦ 先生は、ソフトボール投げで、56m投げました。これは先生達の平均の $\frac{7}{6}$ 倍に当たります。このときの平均は何mだったでしょうか。

（比の第3用法、 $\bigcirc \times \frac{6}{7} = 56$ ）

資料3-1 日本の教科書(現行)

学校図書 6年生(下) H.17年版

東京書籍 6年生(上)

図-1

**2 分数÷分数の計算**

1)  $\frac{2}{5}m^2$ のへいをぬるのに、青いペンキを $\frac{3}{4}dl$ 使います。このペンキは、 $1dl$ 当たり何 $m^2$ ぬれるでしょうか。

① 式を書きましょう。

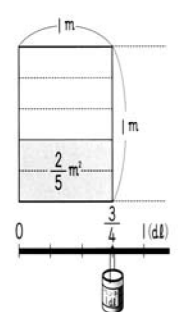

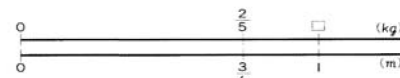


図-4

**3 分数のわり算**

1)  $\frac{3}{4}m$ の重さが $\frac{2}{5}kg$ のパイプがあります。このパイプ1mの重さは、何kgですか。

どんな式を書けばよいか考えよう。

$3m$ の重さが $\frac{2}{5}kg$ とすると、式は...

パイプの重さ + 長さ(m) = 1mの重さ

図-2

**ゆうたさんの考え▼**

$1m^2$ を横に5等分、たてに3等分すると、の面積は

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} m^2$$

$1dl$ でぬれる面積は、

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} m^2 \text{が}(2 \times 4)\text{個}$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{5 \times 3} \times (2 \times 4)$$

$$= \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$$

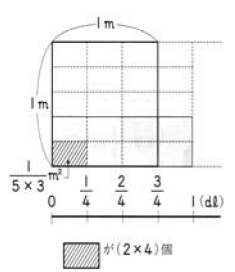
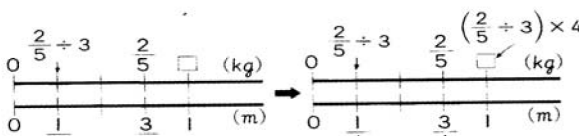
$$= \square$$


図-5

**ゆうじさんの考え**

$\frac{1}{4}m$ の重さを求める。  $\frac{1}{4}m$ の重さを4倍して、 $1m$ の重さを求める。



$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \left( \frac{2}{5} \div 3 \right) \times 4$$

図-3

**まゆみさんの考え▼**

$\frac{1}{4}dl$ でぬれる面積は、 $\frac{2}{5} \div 3 (m^2)$

$dl$ でぬれる面積は、 $\frac{2}{5} \div 3 \times 4 (m^2)$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \div 3 \times 4$$

$$= \frac{2}{5 \times 3} \times 4$$

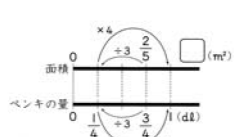
$$= \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$$


図-6

**なおこさんの考え**

わる数を整数になおせば計算できるから、わられる数とわる数に4をかける。

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \square$$

14倍 14倍

$$\left( \frac{2}{5} \times 4 \right) \div \left( \frac{3}{4} \times 4 \right) = \frac{2}{5} \times 4 \div 3$$

等しい

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \left( \frac{2}{5} \times 4 \right) \div \left( \frac{3}{4} \times 4 \right)$$

$$= \left( \frac{2}{5} \times 4 \right) \div 3$$

資料 3-2 日本の教科書（国定教科書）

第3期国定算術教科書6年用（大正7年）

〔除法、其ノ二〕

(1)  $\frac{5}{7}$ ヲ $\frac{2}{3}$ ニテ割レ。  
 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

(2) 次ノ割算ヲナセ。  
 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$     $\frac{5}{6} \div \frac{2}{9}$     $\frac{11}{28} \div \frac{4}{21}$     $12 \div \frac{9}{10}$


(3) 次ノ割算ヲナセ。  
 $3\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$     $1\frac{1}{8} \div \frac{3}{4}$     $7\frac{1}{7} \div 3\frac{1}{3}$     $2\frac{1}{6} \div 1\frac{3}{5}$   
 $\frac{3}{8} \div 2\frac{1}{4}$     $6 \div 1\frac{2}{3}$     $1\frac{2}{7} \div 2\frac{1}{6}$     $3\frac{3}{4} \div 1\frac{7}{8}$

(4) 次ノ數ヲ求メヨ。  
 4倍ガ $\frac{1}{3}$ ナル數    $\frac{1}{5}$ ガ16ナル數  
 $\frac{1}{6}$ ガ $\frac{3}{4}$ ニ當ル數    $\frac{5}{8}$ ガ $1\frac{3}{7}$ ナル數

(5) 次ノ式ヲ計算セヨ。  
 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \div \frac{1}{12}$     $(\frac{5}{7} - \frac{3}{14}) \times \frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$   
 $\frac{2}{7} \times 1\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$     $\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{8} \times \frac{19}{24}$     $6 \div \frac{3}{7} \div \frac{2}{9}$

第4期国定算術教科書5年用（昭和10年）

(7) 次ノ割算ヲセヨ。  
 $3 \div \frac{1}{2}$     $9 \div \frac{3}{4}$     $5 \div \frac{5}{6}$     $6 \div \frac{3}{4}$   
 $4 \div \frac{4}{3}$     $2 \div \frac{4}{5}$     $3 \div \frac{6}{7}$     $1 \div \frac{5}{8}$   
 $4 \div 1\frac{1}{3}$     $6 \div 2\frac{2}{3}$     $8 \div 1\frac{3}{4}$     $10 \div 3\frac{1}{5}$

(8)   $\frac{3}{4}$ kg    $\frac{2}{3}$ kg

左ノ方ノ重サハ、右ノ方ノ重サノ何倍カ。右ノ方ノ重サハ、左ノ方ノ重サノ何倍カ。

(9) 米 $\frac{2}{3}$ lノ重サガ $\frac{5}{9}$ kgデアツタ。コノ米1lノ重サハ何kgカ。  
 $\frac{5}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{9 \times 2} = \frac{5 \times 3}{9 \times 2}$

第4期国定算術教科書5年用（昭和10年）

(5) 次ノ問題ヲ式ヲ立テテ解ケ。  
 水ガ60lハイル桶ニ、小サイ器ヲ使ツテ、水ヲ滿タサウト思フ。

(イ) 3l入ノ器何杯デ滿タセルカ。  
 (ロ)  $\frac{1}{3}$ l入ノ器何杯デ滿タセルカ。  
 (ハ)  $\frac{2}{3}$ l入ノ器何杯デ滿タセルカ。

(6) 次ノ問題ヲ式ヲ立テテ解ケ。  
 (イ) 絹布ヲ3m買ツテ二圓七十錢拂ツタ。コノ絹布1mノ價ハ幾ラカ。  
 (ロ) 絹布ヲ $\frac{1}{3}$ m買ツテ六十錢拂ツタ。コノ絹布1mノ價ハ幾ラカ。  
 (ハ) 絹布ヲ $\frac{2}{3}$ m買ツテ六十錢拂ツタ。コノ絹布1mノ價ハ幾ラカ。  
 $60 \div \frac{1}{3} = 60 \times 3$   
 $60 \div \frac{2}{3} = 60 \div 2 \times 3$   
 $= 60 \times \frac{3}{2}$

第6期国定教科書 算数6年用（昭和22年）

算数六

四 茂君と実君の共同研究  
 茂君と実君は、分数をかける計算ができるならば、分数で割る計算もできるはずだと考えて研究した。

割算では、単位をそろえてから計算すればよいことに考えついた。たとえば、次のような割算で、  
 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$   
 $\frac{2}{3}$ と $\frac{5}{4}$ を書き表わすのに、共通な単位分数を用いることを考えた。  
 $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$     $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$   
 そこで、 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$ を、次のように計算した。  
 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{8}{12} \div \frac{15}{12} = 8 \div 15 = \frac{8}{15}$

---

割算をしているうちに、割算についての規則をみつけた。  
 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$   
 二人は、割算の方法をどんな規則にまとめたのだろうか。また、整数で割る割算の方法も、その規則でまとめられていることがわかった。私たちが考えよう。

---

分数で割る計算は、その分数の分母、分子を入れかえてかければよい。

資料 3-3 新制中学校教科書

図-1 中学校数学1 (教育出版、S.33)

§2 分数の四則

エ 分数の除法

除法は、乗法の逆算である。

すなわち、 $\square \times 3 = 6 \rightarrow \square = 6 \div 3$  (15 ページ参照)  
この考え方をを用いて、分数の除法の計算方法を考えよう。

$5 \div \frac{2}{3} = \square$ は、 $\square \times \frac{2}{3} = 5$  の□を求める式である。

この解法は、 $\square \div 3 \times 2 = 5$   
逆の考えを用いて、 $\square = 5 \div 2 \times 3$   
これを分数になおせば、 $\square = \frac{5}{2} \times 3 = 5 \times \frac{3}{2}$

したがって、 $5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2}$  とすればよい。

被除数が分数の場合でも、同じように計算できる。

例  $\frac{3}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{14}$

分子 分子 分子 × 分子  
分母 分母 分母 × 分母

分数で割るときには、除数の分子と分母を入れかえて掛ければよい。

ある分数の分子と分母を入れかえた分数を、もとの分数の逆数という。

たとえば、3は、 $\frac{3}{1}$  と考えられるので、3の逆数は、 $\frac{1}{3}$  である。

- 51 -


資料 3-4 外国の教科書

図-1 イギリス中学校教科書

KEY MATHS 7 2000 (nelson thomas, 2000)

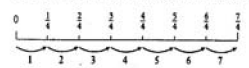
**Dividing fractions**

Adam is making pancakes for himself and his friends. He is using pancake mix. It takes  $\frac{1}{4}$  of a packet to make each pancake. Adam has  $1\frac{3}{4}$  packets of pancake mix. He wants to know how many pancakes he can make.



Adam needs to know how many quarters there are in  $1\frac{3}{4}$ .

He counts up in quarters and gets the answer 7



Asking how many quarters there are in  $1\frac{3}{4}$  is the same as doing  $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$

So  $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 7$

A quick way to divide fractions is to turn the second fraction over then multiply.

$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{4} = 7$

**Example** Work out  $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$


ハワイ州小学校算数教科書

MATH (Scott Foresman-Addison Wesley 2002)

**Dividing Whole Numbers by Fractions**


**Learn**

Danielle enjoys trying out new recipes and sharing what she makes with family and friends. Suppose Danielle has a recipe that makes 6 cups of pasta sauce, and she wants to know how many  $\frac{2}{3}$ -cup servings this recipe will make.



Danielle does most of her cooking from her home in West Nyack, New York.

To find the answer, think of dividing the 6 cups of sauce into equal groups of  $\frac{2}{3}$ , or  $6 \div \frac{2}{3}$ . The number of groups you have, 9, is the quotient.



To find the answer, you first found the number of thirds by multiplying the number of cups, 6, by the denominator, 3. Then you divided the number of thirds by the numerator, 2.

$6 \div \frac{2}{3} = 6 \times 3 \div 2 = 9$

Dividing by a fraction is the same as multiplying by its reciprocal. Reciprocals are numbers whose numerators and denominators have been switched. When two numbers are reciprocals, their product is 1.