

## 枠組モデルによる弾性波伝播の数値実験

著者	佐藤 泰夫, 仁田原 正道
雑誌名	鹿児島大学理学部紀要. 地学・生物学
巻	13
ページ	105-120
別言語のタイトル	Numerical Experiment of Elastic Wave Propagation by a Framework Model
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10232/00006933">http://hdl.handle.net/10232/00006933</a>

## 枠組モデルによる弾性波伝播の数値実験

佐藤 泰夫\*・仁田原正道\*\*

(1980年9月17日受理)

### Numerical Experiment of Elastic Wave Propagation by a Framework Model

Yasuo SATÔ and Masamichi NITABARU

#### Abstract

Elastic wave propagation in a medium with complicated boundary surface is studied numerically employing a framework mass system. The advantage of such a model exists in avoiding the difficulty of satisfying the boundary conditions, which can hardly be solved either by an analytical method or by numerical calculation based on a finite difference scheme. By the application of present method wave profiles on the free surfaces are calculated for 1) Half space, 2) A quarter space, 3) Half space with a step discontinuity, and 4) Half space with a crack on the surface. And using these data, travel times of various phases of waves, reflection and transmission coefficients, and the energy loss of surface waves by the incidence to a corner, step or crack is studied. According to the result thus obtained the framework model seems to be a useful tool for this kind of study.

#### 1. 緒 言

半無限体もしくは層構造を持つ弾性体内における波動伝播の問題については、古くから解析的な方法による多くの研究がなされ、厳密解の得られているものもある。しかし鉛直方向の不連続があり、あるいは段差があるような問題では、解析的な方法で解を求めることは、至難のこととなって来る。1/4無限体については、2, 3の解析的研究もあるが (LAPWOOD 1961, HUDSON and KNOPOFF 1964), さらに複雑な場合については、モデル実験がしばしば行なわれて来た (KATO and TAKAGI 1956, HENZI and DALLY 1971, MARTEL et al. 1977)。

一方、最近の数値計算の発達に伴って、波動伝播の状態を数値的に求めることが活発に行なわれており、1/4無限体を伝わる波動については、いくつもの解が示されている。(ALTERMAN 1968a, b; 1970, SATÔ 1972) それらは波動方程式を差分式に変形し、その上で数値解法を行なっているが、差分法による場合、角の点での境界条件については不明確さを除き得ない。

ここに用いたのは、その後開発された方法で、連続体に適用される偏微分方程式を扱うことを断念し、格子点に集中質量を持つ純粹の質点系を考え、質点系の力学を取扱うものである。この方法によれば、個々の質点の運動方程式を解けば、正確な解が得られ、境界条件についての不明確さは存在しない利点がある (松沢 1976, SATÔ 1978a, b)。

\* 鹿児島大学理学部地学教室 Institute of Earth Sciences, Faculty of Science, Kagoshima University, Japan.

\*\* 大興電子通信株式会社 Daiko Electronic Communication Co. Ltd., Japan.

この方法を応用して、段差のある半無限体、割目の入った半無限体等を伝わる波動の問題を解いたのが本篇である。こうした問題は単に弾性波伝播の理論的興味のみならず、地震工学方面への応用という点から見ても、意義あるものと思われる (ALSOP and GOODMAN 1972)。

## 2. 運動方程式と境界条件

### 2.1 質点系

どのような質点系を考えるかは全く自由であるが、本来の目的が弾性体内の波動伝播の研究であるから、弾性体 (連続体) の状態をよく表現するものでなくてはならない。そこで、ここで考えたのは Fig. 1 に示す、次のごときモデルである。

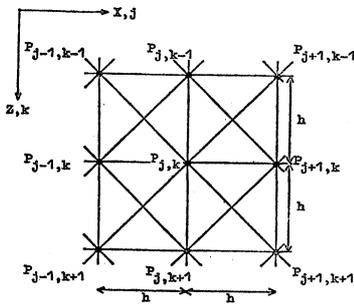


Fig. 1 Illustration of a framework mass model.

点  $P_{j,k}$  には質点  $m_{j,k}$  があり、これは隣接する点  $P_{j+\delta, k+\varepsilon}$  ( $\delta, \varepsilon = -1, 0, 1; |\delta| + |\varepsilon| \neq 0$ ) とバネで連結され、そのバネ定数は縦および横方向は  $c_1$ 、ななめ方向は  $c_2$  とする、また格子間隔は  $x$  方向  $\Delta x$ 、 $z$  方向  $\Delta z$  とするが、

$$\Delta x = \Delta z (= h) \quad (1)$$

を仮定する。またここでは一応 2 次元問題を考える。このモデルを以下枠組モデルと名付ける。

### 2.2 運動方程式

上記のモデルを採用する時、運動方程式は次のように得られる (佐藤 1978b)

$$\begin{aligned} m_{j,k} \frac{d^2}{dt^2} u_{j,k} &= c_1 (u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}) \\ &+ \frac{c_2}{2} \{u_{j+1,k+1} + u_{j-1,k+1} + u_{j+1,k-1} + u_{j-1,k-1} - 4u_{j,k}\} \\ &+ \frac{c_2}{2} \{w_{j+1,k+1} - w_{j-1,k+1} - w_{j+1,k-1} + w_{j-1,k-1}\} \\ m_{j,k} \frac{d^2}{dt^2} w_{j,k} &= c_1 (w_{j,k+1} - 2w_{j,k} + 2w_{j,k-1}) \\ &+ \frac{c_2}{2} \{w_{j+1,k+1} + w_{j-1,k+1} + w_{j+1,k-1} + w_{j-1,k-1} - 4w_{j,k}\} \\ &+ \frac{c_2}{2} \{u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1} - u_{j+1,k-1} + u_{j-1,k-1}\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで連続体との比較のために

$$\begin{aligned} m_{j,k} &= \rho h^2 \\ c_1 &= \lambda + \mu \\ c_2 &= \mu \end{aligned} \quad (3)$$

とおき、 $\lambda = \mu$  を仮定し、さらに  $h \rightarrow 0$  の極限を考えれば、(2) 式の右辺の差分式を微分でおきかえて

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

が得られ、これは連続の弾性体に対する式と一致している。つまり上のモデルは、波長の十分に長い動きに対して連続体を近似するものである。

### 2.3 境界条件

質点系の場合、境界条件というものはない。境界にある点に対する運動方程式を立てればよく、図にあるような、いろいろな点に対する式を立てることになる。但しここで考えることは、境界にある点の質量、これに働く力（バネ定数）等を一般のものと同じにとって、よいか否かの問題である。これを定めるのは、どちらが弾性体により近いかであり、後に述べる理由 (§4.1) により、ここでは自由面にそって、質点もバネも2分したモデルを考える。この時、自由面上の質点の式は次のようになる。

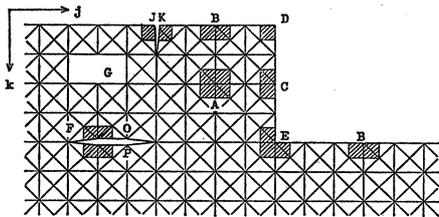


Fig. 2 Framework model. Mass of the hatched area is assumed to belong to the grid point.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_{j,k} \frac{d^2}{dt^2} u_{j,k} &= \frac{1}{2} c_1 (u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + 2u_{j-1,k}) \\ &\quad + c_2 \{u_{j+1,k+1} + u_{j-1,k+1} - 2u_{j,k} + w_{j+1,k+1} - w_{j-1,k+1}\} \\ \frac{1}{2} m_{j,k} \frac{d^2}{dt^2} w_{j,k} &= c_1 (w_{j,k+1} - w_{j,k}) \\ &\quad + \frac{c_2}{2} \{w_{j+1,k+1} + w_{j-1,k+1} - 2w_{j,k} + u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1}\} \end{aligned} \quad (5)$$

外力が加わる場合には、上の式に外力に相当する項をつけ加えればよい。角の点その他に対する式も同様に得られる。

## 3. モデル、外力、数値計算の諸式

### 3.1 媒質モデル

計算に際して用いられた四つの媒質モデルを Fig. 3 に示す。ここで  $z$  軸は対称軸になっており、 $H$  は崖の高さまた割目の深さを表わす。

### 3.2 外力

外力は原点を中心として  $x$  軸に垂直に働らく  $F(x, t)$  によって与えられるが、ここに  $F(x, t)$  は次の形を仮定する (Fig. 4 参照)。

$$F(x, t) = f(t) \cdot g(x)$$

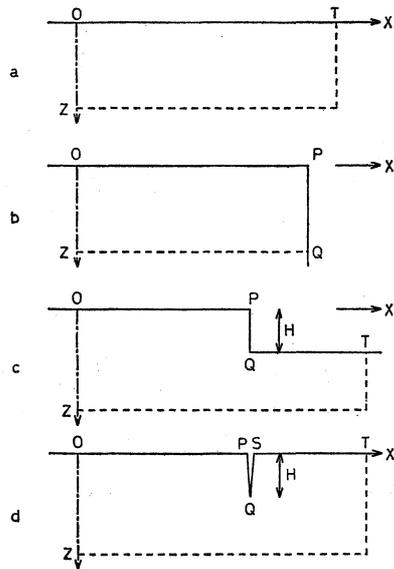


Fig. 3 Two dimensional models studied in this paper. a. Half space. b. A quarter space. c. Half space with a step discontinuity. d. Half space with a crack on the free surface.

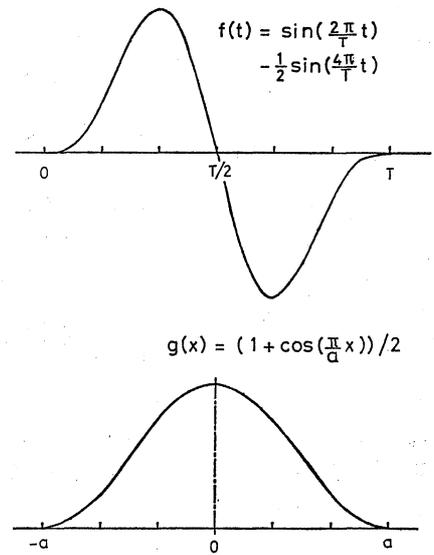


Fig. 4 External force function  $F(x, t) = f(t) \cdot g(x)$ .

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, t > T \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) & 0 < t < T \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]/2 & |x| < a \end{cases} \quad (6)$$

実際の計算は  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  のきざみで行なう。

### 3.3 計算式

(2), (5) はすべて

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = L(u, w) \quad (7)$$

の形をとるから,  $d^2 u/dt^2$  を差分式で書いた

$$d^2 u/dt^2 = [u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)]/(\Delta t)^2 \quad (7a)$$

を変形して得られる。

$$n(t+\Delta t) = 2u(t) - u(t-\Delta t) + \frac{1}{m} \Delta t^2 \cdot L(u(t), w(t)) \quad (8)$$

を用いて時間  $t$  のステップを  $\Delta t$  だけ進め,  $u(t)$ ,  $u(t-\Delta t)$ ;  $w(t)$ ,  $w(t-\Delta t)$  から  $u(t+\Delta t)$ ,  $w(t+\Delta t)$  を計算する。右辺の導関数もまた (7a) と同じ形の差分式でおきかえる。

### 3.4 初期条件

このようにして,  $t=\Delta t$  から出発して, 任意の時刻における変位を計算することができる。

たゞし計算を始めるに当っては、 $t=0$ 、 $t=\Delta t$ における  $u$  および  $w$  を知らなくてはならない。 $t=0$  に対しては、すべての点で

$$\begin{aligned} u(0) &= w(0) = 0 \\ du/dt &= dw/dt = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

を仮定する。 $t=\Delta t$  に対する  $u$ 、 $w$  を知るためには、 $t=0$  におけるべき級数展開による。

$$\begin{aligned} u(\Delta t) &= u(0) + \Delta t \cdot du/dt \\ &+ (1/2) \cdot \Delta t^2 \cdot d^2u/dt^2 + (1/6) \cdot \Delta t^3 \cdot d^3u/dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

右辺第1行は (9) によって 0、また第2行の  $d^2u/dt^2$  は (5) 式から、 $d^3u/dt^3$  は (5) 式を微分して求められる。 $w$  についても同様である。

### 3.5 パラメター

バネ係数  $c_1$ 、 $c_2$  のうち、前者は媒質の伸縮に関する係数であるから、縦波 ( $P$  波) と関係する。一方  $c_2$  は媒質のずれに関係して表われた係数であり、横波 ( $S$  波) と密接に結びついてゐる。(3) の条件もあるので、ここでは次のようにとる。

$$c_1 = 2c_2 \quad (11)$$

時間間隔  $\Delta t$  はある値 (安定条件) を越すと数値計算が不安定になるので、あまり大きくはとれない。小さすぎると、計算のステップ数がぼう大となる不利がある。両方を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{c_1 + c_2}{m/h^2} &= 0.7 \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \\ \Delta x = \Delta z = h &= 0.1, \quad \Delta t = 0.1 \end{aligned} \quad (12)$$

を採用した。このようにとることは、 $P$  波の速さを  $0.8367 (= \sqrt{0.7})$  をとることに当る。

## 4. 計算結果

以下 Fig. 3 の四つのモデルについて行なった計算結果について、一つ一つ順を追って述べる。

### 4.1 半無限体

先ず、半無限体であるが、これについては解析解もあり、解を求めることに問題はない。あるとすれば枠組モデルから得られたものが、連続体の解をいかによく近似するか、である。この点から見て、前節 (5) 式にも示したように、自由面では質量、バネ共に2分するのがよいと思われる。それは、自由表面にそっての波の伝播を求め (Fig. 5)、その波について、上下動  $w$ 、水平動  $u$  をフーリエ解析して調べると、スペクトルは Fig. 6 のように

i) 表面の質量、バネを他と等しくとった場合

$$|w|/|u| = 2.03 \quad (13a)$$

ii) 表面の質量、バネを他の 1/2 とした場合

$$|w|/|u| = 1.74 \quad (13b)$$

となり、

iii) 連続体に対する値

$$|w|/|u| = 1.47 \quad (13c)$$

にくらべ、i) は著るしく大きいことによる。

Fig. 5 は自由面上の波形をいろいろな  $t$  の値に対して求めたもので、この図から一目で、 $P$  波は振幅をやや減少しつつ、レーリー波は波形も振幅も変ることなく、伝播することがわか

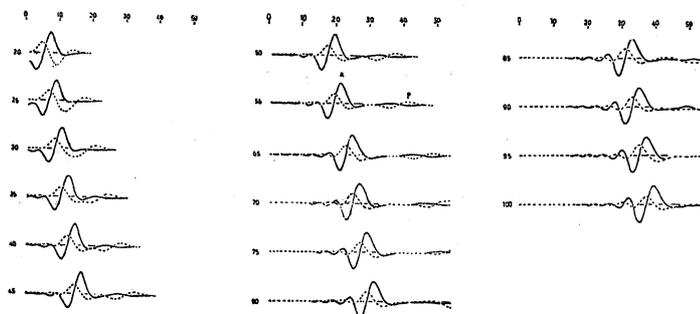


Fig. 5 Wave profiles observed at various time steps on the free surface of a half space. Numerals at the left of the curves are time steps, and those above are distance.

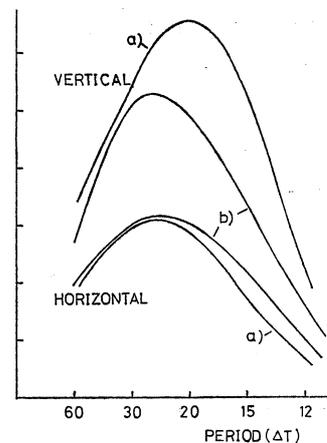


Fig. 6 Spectra of the motion of a particle on the free surface. a) Particles on the free surface have the same mass and the same spring constant. b) Particles on the free surface have half of the other masses and a half spring constant.

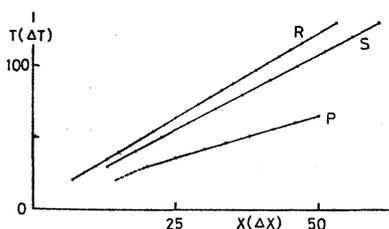


Fig. 7 Travel time of the waves propagated in the framework mass system.

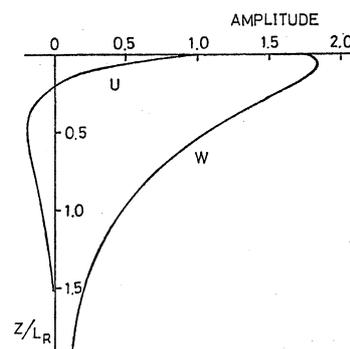


Fig. 8 Amplitude distribution of the Rayleigh wave propagating on the free surface of a framework.

り、速度を求めることができる。同様にして媒質内部の動きを計算することによって、実体波の走時曲線 (Fig. 7) も得られる。次の図 Fig. 8 には、レーリー波の深さ方向の振幅の分布が示されているが、連続体の理論から得られるものとよく一致している。

枠組モデルから得られた伝播速度は、Table 1 に示す通りであり、これは格子間隔を小さくとると、一そう連続体の値に近づくようである。

Table 1 Propagation velocity of waves

	Framework model	Continuous medium (Theoretical value)
S wave velocity	$0.990 V_s (=V_s')$	$1.0 (=V_s)$
P wave velocity	$1.723 V_s = 1.741 V_s'$	$1.732 V_s$
Rayleigh wave v.	$0.890 V_s = 0.906 V_s'$	$0.919 V_s$

4.2 1/4 無限体

次に 1/4 無限体を考える。半無限体の時になかった問題として、i) 垂直面での実体波およびレーリー波の反射、ii) さらに、角を廻った（透過）レーリー波と、iii) 角の点の変位等がある。

反射波については走時曲線を Fig. 9 に示す。P 波とレーリー (R) 波の入射、いずれの場合にも、P と R 両方の反射が理論通り見られる。速度はすでに上に示した。S 波は媒質内部では明らかに現われ、Fig. 7 の走時曲線には示したが、自由表面では見られない。

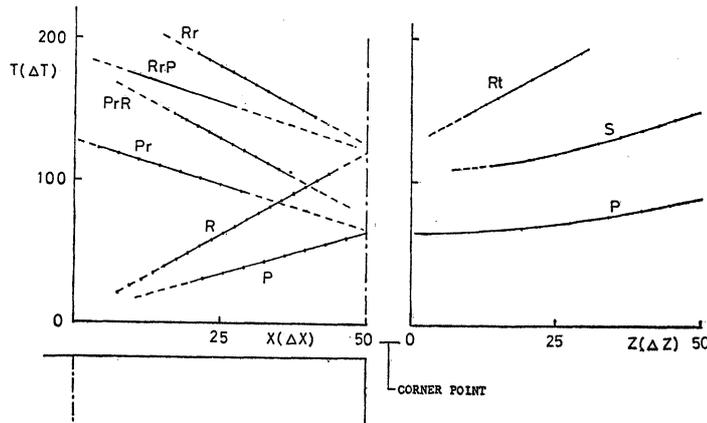


Fig. 9 Travel time of the waves propagated on the free surface of a framework occupying a quarter space.

角の点の変位およびこの点を廻った波による変位を、反射波による変位と共に、Fig. 10 に示す。この図を見る時、反射レーリー波の方が、透過（角を廻った）レーリー波よりも、波形に乱れがあり、軌道の軸も傾いていて、安定でない事が観察されるが、差分法によって同じ問題を扱った MUNASINGHE and FARNELL (1973) もまた同様のことを述べている。角の点が著るしく大きくゆれることは、この図からも、また次の Fig. 11 から知られる。振幅は  $w$  が 2.3 倍となっており、この値は Munasinghe らの値とも一致する。Fig. 11 はレーリー波の崖への

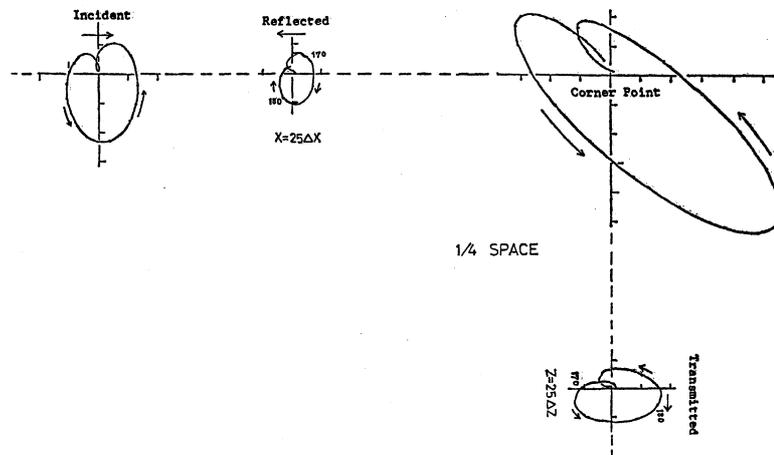


Fig. 10 Orbital motion of particles during the passage of Rayleigh phase. (1/4 space)

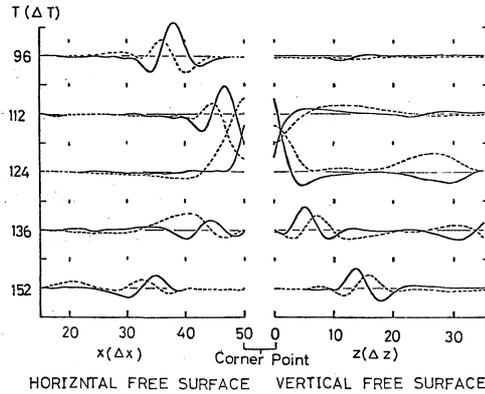


Fig. 11 Wave profiles at various time steps before, during and after the incidence of Rayleigh waves at the corner of a quarter space. Incidence, reflection and transmission of Rayleigh waves are observed. The corner point moves much larger than the incident wave.

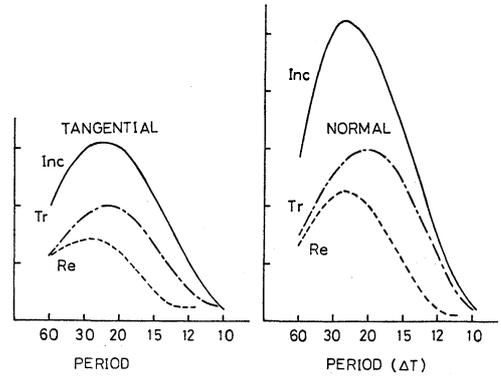


Fig. 12 Spectra of the motion of the incident (Inc), reflected (Re) and transmitted (Tr) Rayleigh waves.

入射の前後の波形を示すもので、崖に近づくにつれて大きくなった入射波が、反射波と透過波に分れて伝わる様子を見ることが出来る。入射レーリー波に対するそれぞれの振幅の割合は、多くの学者の研究の対象となったが、入射・反射・透過それぞれのレーリー波の波形をフーリエ分析した結果は Fig. 12 のようになる。これから反射係数  $C_r$ 、透過係数  $C_t$  を求め、他の研究による値と共に表にまとめたものが Table 2 である。枠組モデルの値は  $C_r$  が多少大きいくらいはあるが、妥当なものと言えよう。レーリー波のエネルギーが振幅の 2 乗に比例するとすれば、

$$\Delta E = 1 - (C_r^2 + C_t^2) \quad (14)$$

はレーリー波のなるエネルギーの減少分にあたり、これは角の付近で発生する実体波のエネルギーに変換されるものであろう。この値も表の中にあるが、De BREMAECKER (1958), KNOPOFF and GANGI (1960), PILANT et al. (1964) はモデル実験、ALSOP and GOODMAN (1972) は有限要素法によるものである。40% ほどのエネルギーが実体波に変換されることは確実と見られる。

Table 2 Transmission and reflection coefficients of Rayleigh waves propagated in a quarter space

Source	$\sigma$	$C_t$	$C_r$	$\Delta E$ (%)
Framework model	0.25	0.63	0.43	42
De Bremaecker (1958)	0.17	0.63 ± 0.06	0.38 ± 0.04	46
Knopoff and Gangi (1960)	0.226	0.73	0.27	41
Piland et al. (1964)	0.25	0.67 ± 0.05	0.25 ± 0.03	48
Alsop and Goodman (1972)	0.25	0.645		
Munasinghe et al. (1973)	0.245	0.64 ± 0.02	0.36 ± 0.02	45

$\sigma$ : Poisson's ratio       $C_t$ : transmission coefficient  
 $C_r$ : reflection coefficient       $\Delta E$ : energy loss of incident Rayleigh wave

#### 4.3 段差のある半無限体

現象全般にわたっての見通しを得るため、まずさまざまな  $t$  に対する波形を、Fig. 13 に示す。

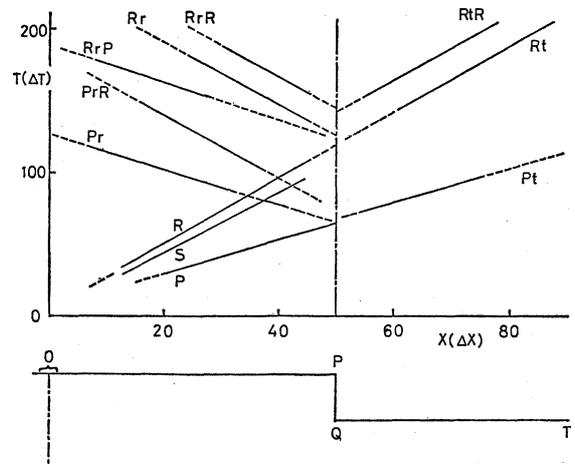
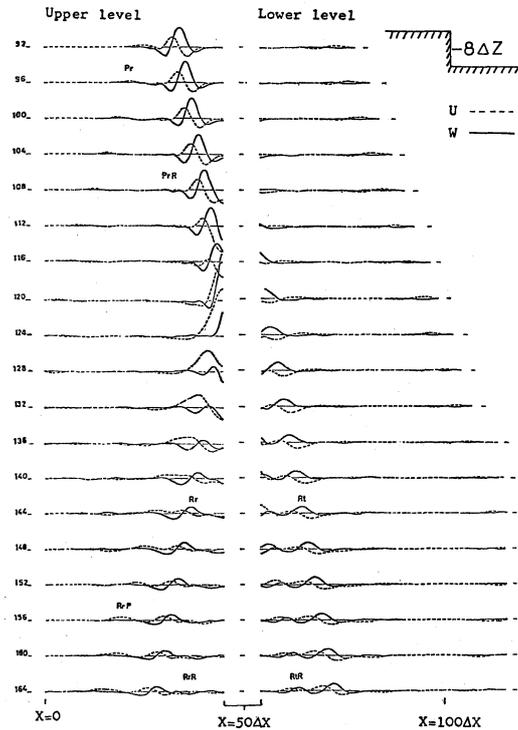


Fig. 14 Travel time of the waves propagated on the free surface of a half space with a step discontinuity. (r: reflected, t: transmitted)

Fig. 13 Wave profiles observed on the free surface of a half space with a step discontinuity.

崖の左側では、1/4 無限体との一致が長く見られる (Fig. 11), 又崖に入射した波は、 $P$  波、 $R$  波とも反射される一方、一部のエネルギーは崖より先にも伝わる事がわかる。従ってここで問題になるのは、i) 反射波と透過波 (崖の下の面を伝わる波) の走時、ii) およびその振幅、スペクトル、iii) 崖の高さと波長の比が ii) におよぼす影響などであろう。

Fig. 13 を含む計算から得られる波の走時曲線は Fig. 14 の通りで、よく理論と一致し、考えられる波はすべて見出されている。(S 波を見るために、多少深さを持った点において計算を行った) すなわち、直接波のほかに、上の段では  $Pr$ ,  $PrR$ ,  $RrP$ ,  $RrR$  (通常の走時の記号と異なり、 $r$  を以て反射波を、また  $t$  をもって透過波を表わす) が見られ、1/4 無限体の場合と変わらない。Fig. 9 との違いは、先ず段差より先の下段に伝わる  $Pt$  と  $Rt$  である。このうち  $Rt$  はほとんど  $R$  の延長上に、 $Pt$  は  $P$  の延長からわずかの遅れをもって現われており、こうした事は波の経路からも予想される所である。ところが、ここで  $Rr$ ,  $Rt$  に続いて、これに平行にあらわれる相  $RrR$  と  $RtR$  とのあることが注目される。1/4 無限体ではなかったもので、段差のあるために生じたことは明らかである。これはおそらく次のような過程を通して生ずるものであろう。入射  $R$  波は自由表面  $OP$  に垂直な波面を以て崖の面  $PQ$  に達する。この時  $Q$  点を新たな振動源として  $QT$  面を伝わるのが  $Rt$  である。一方  $RtR$  は入射  $R$  波が  $P$  から  $Q$  まで自由な崖の面を伝わり、さらに  $Q$  から下の自由面にそって進むものと考えれば、走時のおくれももっともな値となる。KATO and TAKAJI (1956) は、超音波を用いて、段のある同じ問題のモデル実験を行ない、段の下面でのパルスの観測から走時表を得、この時の到達波の速度から、(a) 直接  $P$  パルス  $Pt$ , (b)  $P$  波が下の角に入射して生じたレーリー波、(c)  $P$  波が上の角に入射し、下の角へと伝わり、下部自由表面を伝わるレーリー波、(d) 直接レーリー波、(e) レーリー波が上の角から下の角へ、さらに下の自由表面を沿った伝播 ( $RtR$ ) が観測され

ることを示し、(c) は入射  $P$  波のエネルギーが小さい時には観測されないことがあると述べている。枠組モデルにおいても、(c) を除いてすべて同様に認めることができる。

$OP$  にそって伝わったレーリー波は  $PQ$  面に到達し、 $P$  点付近を新たな振動源として、レーリー波を発生する。 $P$  から  $O$  へ向けて伝わるのが  $Rr$ 、 $P$  から  $Q$  に伝わり、 $Q$  点を振動源とし、ここで発生したレーリー波が  $QT$  面を伝わるのが  $RtR$ 、逆に  $O$  方向に進むのが  $RrR$  と考えられる。観測された  $RtR$ 、 $RrR$  はいずれもレーリー波の速度を持ち、それぞれ  $Rt$ 、 $Rr$  と一定の間隔をおいて後を追う、しかもこの間隔は段の高さに比例するようである。

上のことは、次の Fig. 15 に於ても見ることができる。図には相異なる段差 ( $H=4\Delta z$ ,  $8\Delta z$ ,  $12\Delta z$ ) を持つ3つの場合につき、崖の上と下の2点  $P$ 、 $Q$  の変位が描かれている。参考のために加えた  $1/4$  無限体を含め、角の点  $P$  の変位はよく似ており、極大も同時刻に起っている。それに反して崖下の  $Q$  点では、 $RrR$ 、 $RtR$  を引起す相が第1の極大からおくれて現われており、そのおくれは  $H=12\Delta z$  の場合に大きく、 $H=8\Delta z$  では小さく、 $H=4\Delta z$  の場合には、第1の波から完全に分離するに至っていない。

上に示した各変位成分は、いずれもなめらかな曲線となっているが、これを合成して軌道の形にする時、点の動きはかなり複雑なのが見える。Fig. 16 がそれぞれであるが、上の面  $OP$  上の  $N$  では、最初は通常のレーリー波の軌道を描かず、むしろ逆で、レーリー波の生長に時間のかゝる事がわかる。一方下の面の  $T$  点では、波形も比較的簡単で振幅は崖が低い方が明らかに大きい。崖下の角の点  $Q$  については、時間的に見て前半は深い点でのレーリー波の軌道(回転方向は表面と逆)、後半は  $PQ$  面にそって伝わるレーリー波の軌道と考えられ、これらが重なって複雑な波形を作り出している。

しかし、このように時間変域でのみ現象を見るのでは十分でないと思われるので、反射およ

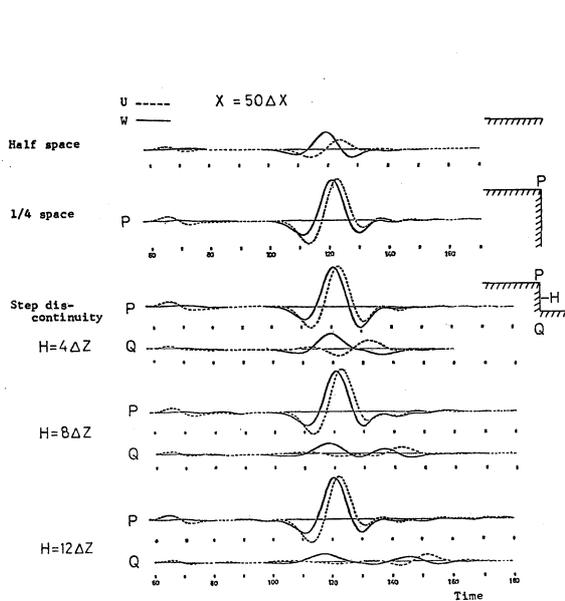


Fig. 15 Motion of the corner point (P) and nook point (Q). Point P is located at  $x=50\Delta X$  from the origin.

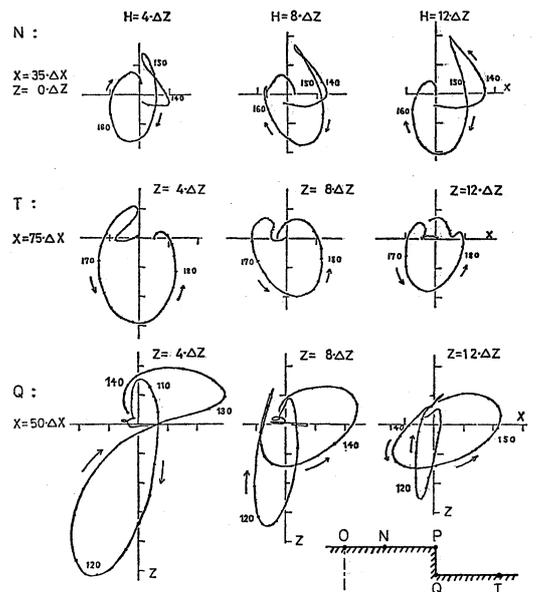


Fig. 16 Orbital motion of the point on the free surface  $N$  (upper level) and  $T$  (lower level), and the nook point  $Q$ . The discontinuity is at  $X=50\Delta X$ .

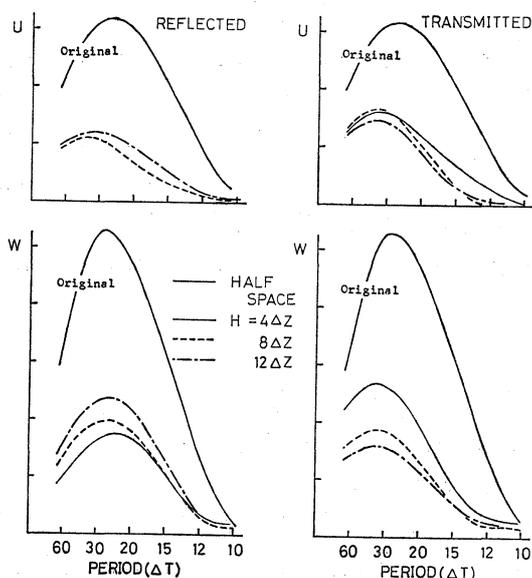


Fig. 17 Fourier spectra of the original, reflected and transmitted Rayleigh waves propagated on the free surface of a half space with a step discontinuity.

び透過波のスペクトルをとったものが、Fig. 17 である。崖が高くなるにつれて、反射波は大きく、透過波は小さくなるのが明らかである。これをもとにして次の二つの関係を導くことができる。一つはレーリー波の反射率  $C_r$  および透過率  $C_t$  を、崖の高さとレーリー波の波長との比 ( $H/L_R$ ) の関数として求めた Fig. 18 (a) であり、更にこれから入射レーリー波と、誘起されたレーリー波のエネルギーの差、つまり崖の存在によるエネルギー損失 (式 (14) 参照) を同じ変数の関数として表現したものが Fig. 18 (b) である。ここで MAL et al. (1965) は Green 関数を用いて得たものであり、MUNASINGHE et al. (1973) は差分法によるものである。今回の枠組モデルでは、反射・透過係数は  $H/L_R$  と共に、それぞれ単調に増加・減少を示すが、MUNASINGHE らによる値は  $H/L_R$  の 0.5, 0.8 付近に極値を持ち、Mal らによるものは 0.4, 0.7 の付近に極値が現われている。こうしたことは、スペクトル振幅の山が、反射波では短波長の方へ、透過波では長波長の方にずれるために生じたものと考えられる。枠組モデルにおいてもそのようなずれは認められるが、他の方法に比べてそのずれ方が小さい為に、単調な曲線になったものようである。透過係数については、図の中央部を除き、三つの曲線はかなりよく一致している。反射係数は、枠組モデルの値は多少大きめである。

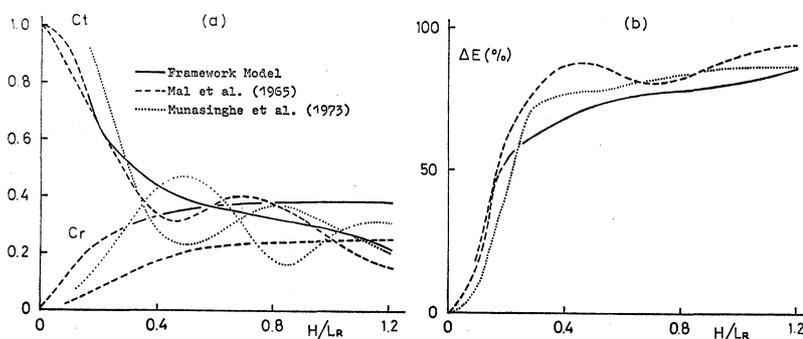


Fig. 18 (a) Reflection coefficient  $C_r$  and transmission coefficient  $C_t$  of Rayleigh waves propagating on the free surface with a step discontinuity.  $C_r$  and  $C_t$  are given as functions of ( $H/L_R$ ).  $H$ =height of the discontinuity.  $L_R$ =wavelength of the Rayleigh wave. (b) Energy loss of the incident Rayleigh wave by the existence of a step discontinuity.

エネルギー損失  $\Delta E$  をあらかず Fig. 18(b) では,  $H/L_R$  の増加と共に  $\Delta E$  は急激に増加し,  $H/L_R=0.2$  で 50% 以上, それから先も徐々に増加して,  $H/L_R=0.5$  では 70% 以上のエネルギーが, 反射・透過の表面波以外の波のエネルギーとして使われている。Malらによる  $\Delta E$  の値は,  $C_r$  が小さいため主として  $C_t$  によって決まっており,  $H/L_R$  が 0.4 以上では, 入射レーリ波の 80% 以上のエネルギー損失を受けることを示している。MUNASINGHE らでは  $H/L_R$  が 0.3 付近まで急速に増大して 70% 以上の値を示し, 0.3 よりさきではその変化量は小さい。粹組モデルによる  $\Delta E$  は, 他の方法によるものより多少小さく出ているが, これは反射係数  $C_r$  が他のよりも大きいためである。

#### 4.4 表面に割目のある半無限体

表面から中に向かって縦に割目が入っている場合 (Fig. 3d) についても, 前の段差のある時と, 全く同じ様な問題が考えられる。即ち, 割目の所での各種の波の発生, その走時, 波形・軌道・スペクトル, また透過率・反射率, エネルギー損失などである。

先ず最初に, さまざまな  $t$  に対する波形を Fig. 19 に示す。114  $\Delta t$  以降のものであるが, 割目より先では変位はまだ極めて小さく, 割目の手前の変位は, かなりの時間, 段差のある問題と見わけがつかないので, これ以前の波形は省略した。

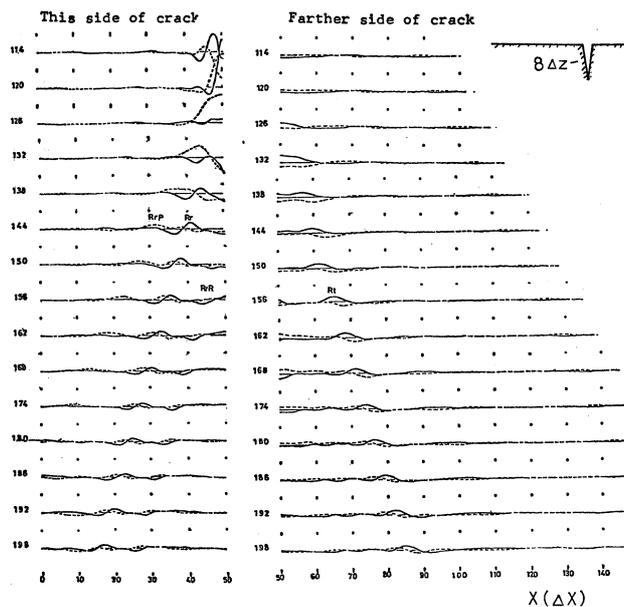


Fig. 19 Wave profiles observed on the free surface of a half space with a crack. Numerals at the left of curves are time steps.

走時曲線についても, 割目より手前は, 段差の問題と殆ど違わない。一方, 割目の後のかげの部分では, 回折波が入りこんで来ること, 以前なかったもう一つの角  $S$  (Fig. 3d) が存在すること, のために複雑な現象が起って来る。走時曲線を Fig. 20 に示す。図中  $Pt$  の走時はさきの段差の問題より多少おくれが大きくなっている。 $PtR$ ,  $RtP$  は, さきには振幅が小さく, 明瞭でなかったものであるが, 今回ははっきり現われている。このほか  $R$  の入射による  $Rt$  はさきと同じであるが, 反射波の  $RrR$  に対応して, 割目より先では少し様子の違った  $RtR1$ , およびかなり遅れて  $RtR2$  と二つの相が見られる。先ず  $RtR1$  であるが, 割目の点 ( $X=50\Delta X$ ) におけるインターセプト・タイムは  $RrR$  と変らないが, 実際の出現はかなりおくられている。 $RtR2$  は以前には見られなかった相で,  $Rt$  と  $RtR1$  の間のおくれとほぼ等しい遅れを以て

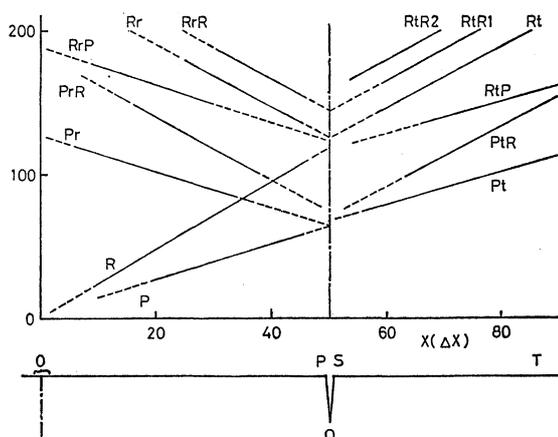


Fig. 20 Travel time of the waves propagated on the free surface of a half space with a crack.

$RtR1$  に続いている。こうしたことから見て、これらは、 $PQ$ ,  $QS$  等を波が伝わり、角に達する度に発生するレーリー波と見てよいと思われる。 $Rt$  と  $RtR1$ ,  $RtR1$  と  $RtR2$  の間の距離がいずれも割目の深さ  $H$  にほぼ等しいことも、上の考えを支持する。 $H$  が波長より大きければ、これらの波は分離するが振幅は小さくなり、 $H$  が小さければ、波の分離は完全でなくなる。

さきにも行ったと同様、自由表面上で観測された各種レーリー波のフーリエ解析を行った結果が Fig. 21 である。段のある問題と比較すると、反射・透過レーリー波のいずれに於ても、フーリエ振幅は小さくなっている。この図をもとにして、レーリー波の反射および透過の係数を割目の深さ  $H$  と波長  $L_R$  の比 ( $H/L_R$ ) の関数として表わしたものが Fig. 22 (a), またこれから、入射エネルギーの損失の形で求めた  $\Delta E = 1 - (C_r^2 + C_t^2)$  は同図 (b) として示した。反射係数は  $H/L_R$  と共にゆるやかに増加し、1/4 無限体の際の値に近づく。透過係数は  $H/L_R$  が 0.5 付近まで急速に減少し、0.5 を越すと、ゆるやかに 0 に近づく、エネルギー損失  $\Delta E$  は、レーリー波が割目に入射したときに発生した実体波および  $RrR$ ,  $RtR1$ ,  $RtR2$  等にエネルギーの転換が行なわれたためのものである。 $H/L_R$  が 0.5 以上では 80% 以上のエネルギー損

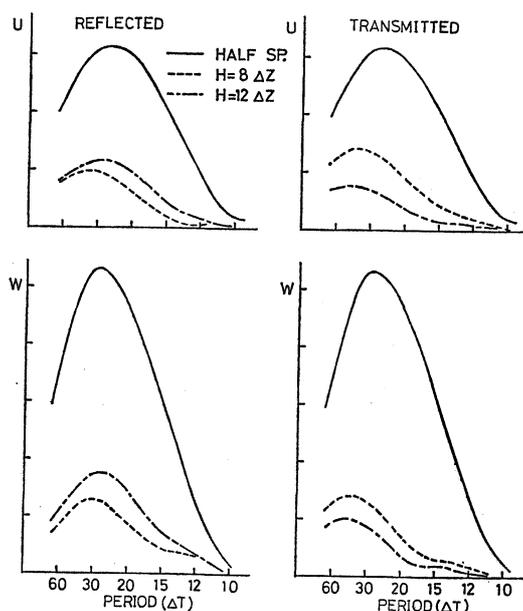


Fig. 21 Fourier spectra of the original, reflected and transmitted Rayleigh waves propagated on the free surface of a half space with a crack.

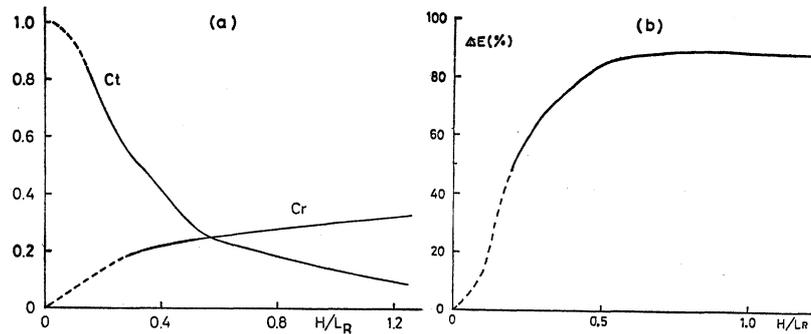


Fig. 22 (a) Reflection coefficient  $C_r$  and transmission coefficient  $C_t$  of Rayleigh waves propagated on the free surface with a crack.

(b) Energy loss of the incident Rayleigh wave by the existence of a crack. Compare with Fig. 18, which is for a step discontinuity.

失があり、また  $H/L_R$  が 0.3 以上では、割目のある場合の方が、段差の問題よりもエネルギー損失の大きいことがわかる。

## 5. 結 語

複雑な形状をもつ連続弾性体内の波動伝播を調べる近似的方法として、質点系枠組モデルの使用を提唱したい。この方法が連続体をよく近似し、かつ境界条件についての不明確さを除き得ることは、本編に述べた所によって認められるであろう。すなわち半無限体問題の解から (Fig. 5)

- 1)  $P$ ,  $S$  およびレーリー波は、連続体内の理論値と極めて近い値を持つ (Table 1, Fig. 7)。
- 2) ただし、レーリー波の自由表面での上下動、水平動の振幅比は多少大きめに出る (1.468 に対して 1.742, Fig. 6)。
- 3) レーリー波の振幅の深さ方向の分布は全体としてよくあっている (Fig. 8)。などの事が明らかにされた。また  $1/4$  無限体の計算からは、(Fig. 11)
- 4) レーリー波の反射、透過 (角を廻って伝わる) 波がみとめられ、その係数は  $C_r=0.43$ ,  $C_t=0.63$  で、エネルギー損失  $\Delta E$  (レーリー波以外の波となった) = 42% ほどとなる (Table 2, Fig. 10)。
- 5) 理論的に考えられる各種の波はそのほとんどが認められ、走時もよく理論と一致する。(Fig. 9) 理論的に存在し得て、計算に現われないのは、発震機構 (外力の加え方) の影響で振幅が小さいためと考えられる。

6) 角の点の変位で、 $u$  成分は入射レーリー波の  $w$  の約 2.3 倍、また  $u$  は  $w$  よりわずかに大きく、軌道は楕円で、長軸は入射波の進む方向とほぼ  $-45^\circ$  傾く。こうした結果は、従来得られている数値といずれもほぼ一致するものである。

表面に段差 (崖) のある問題は、次の割目のある問題と共に、本稿の計算の主要な課題となっているが、(Fig. 13)

7) 走時曲線については、上で 5) に述べたことがそのままあてはまる (Fig. 14)。ただし、崖の高さによって、走時の遅れが異なり、また発生する波の振幅にも違いが生ずる。

8) レーリー波の反射・透過率  $C_r$ ,  $C_t$  に関しては、それぞれの波のフーリエ・スペクトルの計算から得られることは前と変わらないが (Fig. 17)、今回は  $C_r$ ,  $C_t$  共に崖の高さとレーリー

波長との比 ( $H/L_R$ ) の関数として与えられる (Fig. 18)。その曲線の形は従来求められているものと多少の差があるが、これはもとになるスペクトル形から生じたものであろう。ことに反射率に大きな違いが見られるが、反射レーリー波は、他の波と分離しにくいこと、完全な形に生長するのに時間がかかる事、などの理由で、誤差が混入しがちなのであろう。このことは Fig. 16 の複雑さからも予想される。

9)  $C_r$ ,  $C_t$  からレーリー波についてエネルギー損失  $\Delta E$  が、これまた ( $H/L_R$ ) の関数として出てくるが、この関数は当然 0 から出発して急速に増加し、( $H/L_R$ ) が 0.3~0.4 で、70~80% に達し、その後徐々に増加を続ける。

最後に割目を持つ場合であるが、これは定性的にも定量的にもさきの段差の問題とよく似ている (Fig. 19)。すなわち

10) 走時曲線はよく一致しており、ことに崖や割目の震源側ではほとんど差がみとめられない。割目より遠い側に僅かの走時の差があり、新しい相も見出される。

11) フーリエ・スペクトルもかなり似ており、従って  $C_r$ ,  $C_t$  また  $\Delta E$  の曲線にも大きな違いはない。

以上より見て枠組モデルは、今回扱った種類の問題に於て、十分に使用し得るものと考えられる。

## 付 記

本稿は著者の一人 (仁田原) によって、専攻科論文および修士論文として昭和 52 年 2 月および昭和 54 年 2 月に提出されたものに、僅かな表現上の訂正を行ったものである。最近藤井らによって、溝を通過するレーリー波群に関する綿密な実験結果が発表されて、こうした問題に関する理解を深めている。本稿には、この論文については言及するいとまはないが、各種の方法が相俟って一層の進歩がなされることを期待するものである。

## References

- ALTERMAN, Z., Finite difference solution to geophysical problem, *J. Phys. Earth* **16** (Special Issue), 113-128, 1968.
- ALTERMAN, Z. and F.C. KARREL. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference method, *Bull. Seism. Soc. Amer.* **58**, 367-398, 1968.
- ALTERMAN, Z. and D. LOEWENTHAL, Seismic waves in a quarter and three quarter plane, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **20**, 101-126, 1970.
- ALSOP, L.E. and A.S. GOODMAN, Finite difference formulas for Neuman conditions on irregularly shaped boundaries, *IBM J. Res. Develop.*, **16**, 365-371, 1972.
- De BREMAECKER, J.C., Transmission and reflection of Rayleigh waves at corners, *Geophysics*, **23**, 253-266, 1958.
- HENZI, A.H. and J.W. DALLY, A photoelastic study of stress wave propagation in a quarter-plane, *Geophysics*, **36**, 296-310, 1971.
- HUDSON, J.A. and L. KNOPOFF, Transmission and reflection of surface waves at a corner, *J. Geophys Res.*, **69**, 281-289, 1964.
- KATO, Y. and A. TAKAGI, Model seismology (Part 3), Wave propagation in the step-shaped structure and on the cliff, *Sci. Rep. Tohoku Univ.*, ser. 5, 74-86, 1956.
- KNOPOFF, L. and A.F. GANGI, Transmission and reflection of Rayleigh waves by wedges, *Geophysics*, **25**, 1203-1214, 1960.
- LAPWOOD, E.R., The transmission of a Rayleigh pulse round a corner, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **4**, 174-196, 1961.
- MAL, A.K. and L. KNOPOFF, Transmission of Rayleigh waves at step change in elevation,

- Bull. Seism. Soc. Amer.*, **55**, 319-334, 1965.
- MAL. A.K and L. KNOPOFF, Transmission of Rayleigh waves at a corner, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **56**, 1966.
- 松沢武雄, 地震の理論とその応用, 7章, 東大出版会, 1976.
- MARTEL, L., M. MUNASINGHE and G.W. FARNELL, Transmission and reflection of Rayleigh wave through a step, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **67**, 1277-1290, 1977.
- MUNASINGHE, M. and G.W. FARNELL, Finite difference analysis of Rayleigh wave scattering at vertical discontinuities, *J. Geophys. Res.*, **78**, 2454-2466, 1973.
- PILANT, W.L., L. KNOPOFF and F. SCHWAB, Transmission and reflection of surface waves at a corner, *J. Geophys. Res.*, **69**, 291-297, 1964.
- SATÔ, Y. A numerical experiment on wave propagation in an elastic quarter space, *J. Phys. Earth*, **21**, 287-299, 1972.
- SATÔ, Y., Characteristic oscillation of a rectangular elastic body by the simulation using a framework model, *J. Phys. Earth*, **26**, 1-11, 1978.
- SATÔ, Y., Synthetic seismogram and the calculation of eigenfrequency by simulation, *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*, 519-531, 1978.
- 佐藤泰夫, 割目・角等における反射・回折, 非破壊検査, **27**, 180-185, 1978.
- 佐藤泰夫, 弾性波動論, 30章, 岩波, 1978.
- 藤井和成・中山善律・今井健二・中野正吉, 溝を通過するレーリー波群について (I) 地震, **2**, **33**, 1-10, 1980.
- 藤井和成・滝本孝哉・中山善律・中野正吉, 溝を通過するレーリー波群について (II) 地震, **2**, **33**, 11-22, 1980.