

安定半径を考慮したワーキングヘッドの切り替え制御

著者	下山 泰治, 佐野 英樹, 中島 正治
雑誌名	鹿児島大学理学部紀要=Reports of the Faculty of Science, Kagoshima University
巻	32
ページ	21-25
別言語のタイトル	Switching Control of Working Heads considering Stability Radius
URL	http://hdl.handle.net/10232/00006979

安定半径を考慮したワーキングヘッドの切り替え制御

下山泰治*・佐野英樹†・中島正治†
(1999年9月10日受理)

Switching Control of Working Heads considering Stability Radius

Yasuharu SHIMOYAMA*, Hideki SANO† and Masaharu NAKASHIMA†

Abstract

In this paper, we treat switching control of working heads whose dynamics are described by ordinary differential equations. We formulate the ordinary differential equations as system equations, and construct switching controllers for the system equations. Based on stability radius, we derive a sufficient condition for the closed loop system to be exponentially stable. A simulation result is included to complement the theoretical discussion.

Keywords : stability radius, switching control, optimal control

1 はじめに

本稿では、ワーキングヘッドの制振制御を取り上げる。ワーキングヘッドは常微分方程式で記述されるが、重心の変位によってダイナミクスが変化するという特性をもつ。変位がある値以上のときにはある常微分方程式で記述され、変位がその値より小さいときには別の常微分方程式で表される。このようなシステムを制御するために、それぞれの場合に対してコントローラを構成して、コントローラを変位の値に応じて切り替える。ところがこの場合には、切り替えの影響まで考慮した閉ループ系全体が安定になるという保証はない。そこで本稿では、閉ループ系に対し、安定半径を用いて閉ループ系全体の安定性を議論する。さらに、数値実験を通して切り替え制御の有効性を検証する。

2 ワーキングヘッドの記述と定式化

入力を $u(t)$ とするワーキングヘッドは、つぎの常微分方程式で記述される。

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) \quad (1)$$

$$+ \begin{cases} k_1 x(t), & \text{if } x(t) \geq -a \\ (k_1 + k_2)x(t) + k_2 a, & \text{if } x(t) < -a \end{cases} = u(t)$$

ただし、 m, b, k_1, k_2 および a は正の定数で、 $x(t)$ は時刻 t におけるワーキングヘッドの重心の変位、記号 $\dot{x}(t)$ は t に関する微分 $dx(t)/dt$ を表す。通常、作業中にはワーキングヘッドに、入力として $u(t) = P \sin(\omega t + \varphi)$ の形の外力が加えられる [1]。

ここで、ワーキングヘッドを速やかに静止させ、作業を停止させる状況を考えよう。この場合、入力を $u(t) = 0$ とするだけでなく、 $u(t)$ を適当に調節しなければならない。このとき、ワーキングヘッドに関する何らかの情報を基にして制御することになる。本稿では、ワーキングヘッドの重心の変位 $x(t)$ は測定可能であるとして、これを積極的に用いる。したがって、(1) 式に付随した観測方程式はつぎのようになる。

$$y(t) = x(t) \quad (2)$$

まず、システム (1), (2) を1階の微分方程式で記述されるシステムに定式化しよう。

(i) $y(t) = x(t) \geq -a$ のとき

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + k_1 x(t) = u(t)$$

であるから、状態変数を

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

* 鹿児島大学大学院理工学研究科数理情報科学専攻 〒890-0065 鹿児島市郡元1丁目21-35

Lower Division of Mathematics and Computer Science, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University, 21-35, Korimoto 1-chome, Kagoshima 890-0065, Japan.

† 鹿児島大学理学部数理情報科学科 〒890-0065 鹿児島市郡元1丁目21-35

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Kagoshima University, Korimoto 1-chome, Kagoshima 890-0065, Japan.

と定義すると、つぎのように書くことができる。

$$\dot{\xi}(t) = A_1 \xi(t) + B_1 u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = C_1 \xi(t) \quad (4)$$

ここで

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1/m & -b/m \end{bmatrix}, \quad B_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$C_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $y(t) = x(t) < -a$ のとき

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + (k_1 + k_2)x(t) + k_2 a = u(t)$$

であるから、(i)と同様にしてつぎのように書き表すことができる。

$$\dot{\xi}(t) = A_2 \xi(t) + B_2 u(t) + d_2 \quad (5)$$

$$y(t) = C_2 \xi(t) \quad (6)$$

ただし

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m & -b/m \end{bmatrix}$$

$$B_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \quad d_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 a/m \end{bmatrix}$$

$$C_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

つぎの補題は、切り替え制御を施したときの閉ループ系の安定性を議論するときに重要な役割を果たす。

補題 1 (参考文献 [2]). A は安定な正方行列であり $E(sI - A)^{-1}D \neq 0$ とする。ここで E, D は適当なサイズの行列であり、 I は単位行列を表す。 $r(A; D, E)$ を

$$r(A; D, E) := \min_{\Delta} \left\{ \|\Delta\|; A + D\Delta E \text{ が不安定} \right\}$$

によって定義する。ただし、 $\|\Delta\|$ は Δ の最大特異値である。このとき

$$r(A; D, E) = \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|E(j\omega I - A)^{-1}D\| \right\}^{-1}$$

が成り立つ。ここで、 j は虚数単位を表す。

注意. $r(A; D, E)$ は A, D, E から一意に決まる。これを摂動 $D\Delta E$ に対する安定行列 A の安定半径という。

3 切り替え制御器の構成

本稿では (i), (ii) の各々の場合に対してオブザーバを基にしたコントローラ [3] を構成し、それらを変位の値に応じて切り替えて用いる。このとき、切り替えの影響まで考慮した閉ループ系全体が必ずしも安定になっているとは限らない。そこで、安定な閉ループ系が得られるための十分条件を、安定半径を用いて導出する。まずはじめに、それぞれの場合 (i), (ii) に対してコントローラを構成しよう。

(i) $y(t) = x(t) \geq -a$ のとき

$$\dot{w}(t) = A_1 w(t) + B_1 u(t) + K_1 (y(t) - C_1 w(t)) \quad (7)$$

$$u(t) = -F_1 w(t) \quad (8)$$

を考える。このとき、システム (3), (4) とコントローラ (7), (8) からなる閉ループ系は、変数

$$e(t) := \xi(t) - w(t)$$

を導入するとつぎのように書ける。

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで

$$A_1 := \begin{bmatrix} A_1 - B_1 F_1 & B_1 F_1 \\ 0 & A_1 - K_1 C_1 \end{bmatrix}$$

この行列の固有値 $\sigma(A_1)$ は

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_1 - B_1 F_1) \cup \sigma(A_1 - K_1 C_1)$$

である。ここで、 (A_1, B_1) は可制御、 (C_1, A_1) は可観測であるから、行列 $A_1 - B_1 F_1$, $A_1 - K_1 C_1$ が安定になるように、実行列 F_1 および K_1 を選ぶことが可能である。このとき行列 A_1 は、その形から安定行列となることがわかる。

(ii) $y(t) = x(t) < -a$ のとき

$$\dot{w}(t) = A_2 w(t) + B_2 u(t) + d_2 + K_2 (y(t) - C_2 w(t)) \quad (10)$$

$$u(t) = -F_2 w(t) + f_2 \quad (11)$$

を考える。ただし、 $f_2 := k_2 a$ 。

このとき、システム (5), (6) とコントローラ (10), (11) からなる閉ループ系はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし

$$A_2 := \begin{bmatrix} A_2 - B_2 F_2 & B_2 F_2 \\ O & A_2 - K_2 C_2 \end{bmatrix}$$

ここで, 行列 F_2 および K_2 を $F_2 = F_1, K_2 = K_1$ となるように選び

$$\Delta_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_2/m & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと, $B_2 = B_1, C_2 = C_1$ より A_2 はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} A_1 + \Delta_1 - B_1 F_1 & B_1 F_1 \\ O & A_1 + \Delta_1 - K_1 C_1 \end{bmatrix} \\ &= A_1 + \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 & O \\ O & \Delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに, I_2 は 2 次単位行列である.

このように, それぞれの場合 (i), (ii) に対してコントローラを構成する. 実際にはシステム (1), (2) (等価的に (3) ~ (6)) を制御する場合には, 出力 $y(t)$ の値によって 2 つのコントローラ (7), (8) と (10), (11) を切り替えることになる. そのために, 閉ループ系全体が安定になるための条件を導出する必要がある.

命題 1. 行列 F_2 および K_2 を $F_2 = F_1, K_2 = K_1$ となるように選ぶ. このとき, 不等式

$$\frac{k_2}{m} < r_c \quad (13)$$

を満たすように F_1 および K_1 が選ばれていれば, 閉ループ系全体は指数位安定になる. ただし,

$$r_c := \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|(j\omega I - A_1)^{-1}\| \right\}^{-1}$$

証明. 行列 $\Delta(t)$ を

$$\Delta(t) := \begin{cases} O, & t \in \{\tau \geq 0; x(\tau) \geq -a\} \\ \Delta, & t \in \{\tau \geq 0; x(\tau) < -a\} \end{cases}$$

$$\Delta := \begin{bmatrix} \Delta_1 & O \\ O & \Delta_1 \end{bmatrix}$$

と定義する. 閉ループ系 (9) および (12) は $\Delta(t)$ を用いて, つぎのように書ける.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = (A_1 + D\Delta(t)\mathcal{E}) \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし

$$D := \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} := \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}$$

補題 1 より

$$\begin{aligned} r(A; D, \mathcal{E}) &= \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathcal{E}(j\omega I - A_1)^{-1} D\| \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|(j\omega I - A_1)^{-1}\| \right\}^{-1} = r_c \end{aligned}$$

ここで

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta(t)\| < r_c \quad (15)$$

であるとき, (14) 式は指数位安定になる. (15) 式の左辺において

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta(t)\| = \|\Delta\| = \frac{k_2}{m}$$

したがって (13) 式が満たされるとき, 閉ループ系全体は指数位安定になる. \square

補足. 行列 F_1 の選び方にはかなりの自由度がある. そこで, 最適制御論 [3] に基づいて決めることにする.

行列 F_1 についてはつぎのように決定する. Q_f を準正定行列とし, R_f を正定行列とする. $y(t) = x(t) \geq -a$ のときのシステム (3), (4) において, (A_1, B_1) は可制御であるから可安定である. (Q_f, A_1) が可検出であるときには, リカッチ方程式

$$A_1^T P_f + P_f A_1 - P_f B_1 R_f^{-1} B_1^T P_f + C_1^T Q_f C_1 = O$$

を満たす唯一の準正定解 P_f が存在する. この行列 P_f を用いて F_1 をつぎのように定める.

$$F_1 := R_f^{-1} B_1^T P_f$$

行列 K_1 についても同様に双対の関係 [4] を用いて決定する. Q_k を準正定行列とし, R_k を正定行列とする. (C_1, A_1) は可観測であるから可検出である. これより, (A_1^T, C_1^T) は可安定となる. ここで (A_1, Q_f) が可安定であるときには (Q_f, A_1^T) が可検出となるので, K_1 をつぎのように定めることができる.

$$K_1 := P_k C_1^T R_k^{-1}$$

ただし, 行列 P_k はつぎのリカッチ方程式

$$A_1 P_k + P_k A_1^T - P_k C_1^T R_k^{-1} C_1 P_k + B_1 Q_k B_1^T = O$$

の唯一の準正定解である.

4 数値実験

定数, 重み行列および初期値を

$$m = 3, \quad b = 1.5, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1.5, \quad a = 0.5$$

$$Q_f = Q_k = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R_f = R_k = 1$$

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく. コントローラの具体的な形は (7), (8) 式および (10), (11) 式よりつぎのようになる.

(i) $y(t) = x(t) \geq -0.5$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3333 & -0.5 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3333 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2.0066 \\ 2.0133 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \right) \\ u(t) &= - \begin{bmatrix} 9.0499 & 6.0199 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned}$$

(ii) $y(t) = x(t) < -0.5$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8333 & -0.5 \end{bmatrix} w(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3333 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2.0066 \\ 2.0133 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \right) \\ u(t) &= - \begin{bmatrix} 9.0499 & 6.0199 \end{bmatrix} w(t) + 0.75 \end{aligned}$$

また, 閉ループ系について,

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta(t)\| = \frac{k_2}{m} = 0.5, \quad r_c = 0.5638$$

となり, 命題 1 の (13) 式を満たすので, システムは指数位安定になる.

図 1 ~ 図 4 は, 区間 $0 \leq t \leq 30$ を 3000 等分して, 4 次のルンゲ・クッタ法を用いたときの数値実験結果である. なお, 本数値実験では, Matlab (参考文献 [5] ~ [7]) を用いている.

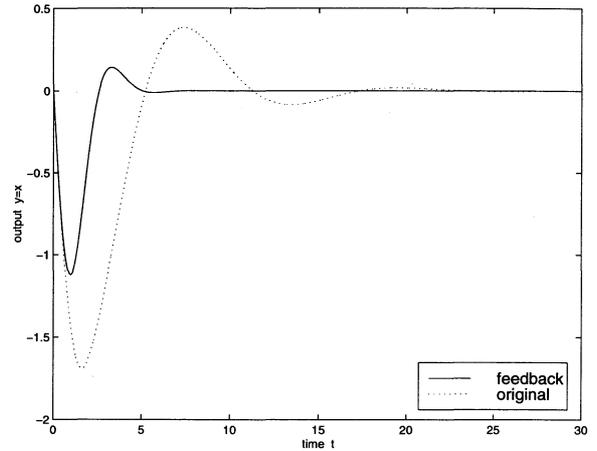


図 1: ワーキングヘッドの重心の変位 $y(t) = x(t)$

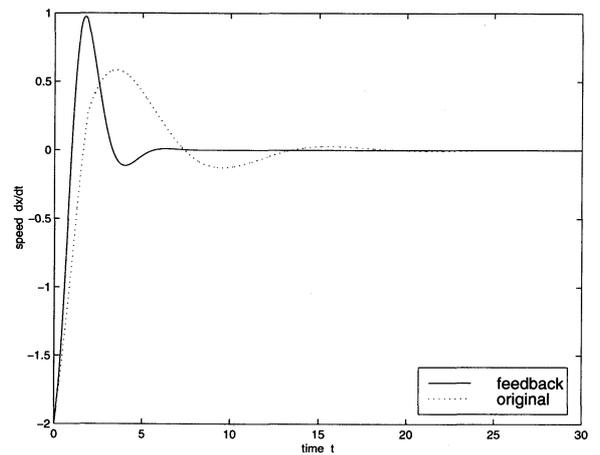


図 2: ワーキングヘッドの重心の速度 $dx(t)/dt$

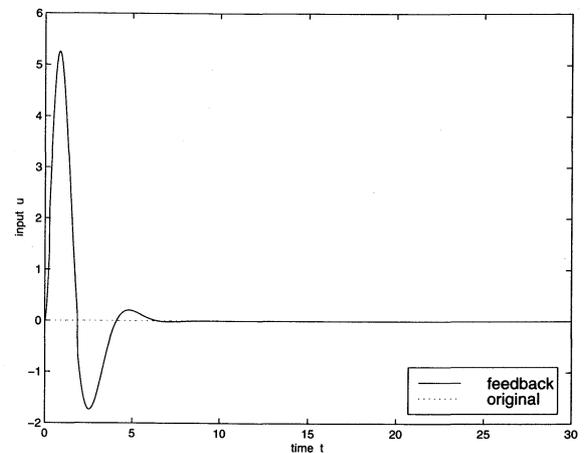


図 3: ワーキングヘッドへの入力 $u(t)$

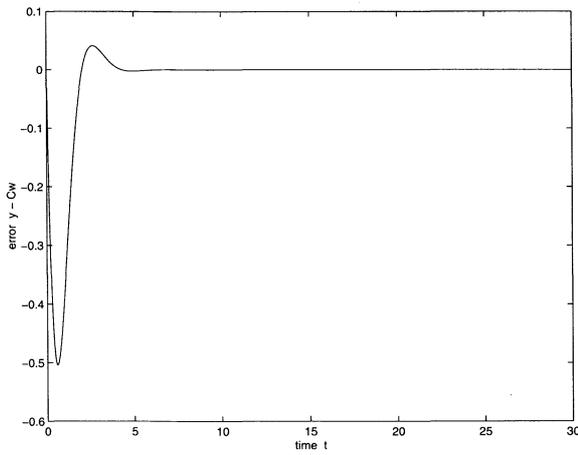


図 4: 出力と推定出力の誤差 $y(t) - Cw(t)$

参考文献

- [1] S. L. Tsyfansky, V. I. Beresnevich: The control of the operating condition of a subharmonic vibromachine, *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 203(3), pp.495-503, Academic Press
- [2] 木村英紀, 藤井隆雄, 森武宏: ロバスト制御, コロナ社, 1994
- [3] 吉川恒夫, 井村順一: 現代制御論, 昭晃堂, 1994
- [4] 野波健蔵, 西村秀和: MATLAB による 制御理論の基礎, 東京電機大学出版局, 1998
- [5] Using MATLAB Graphics, The MathWorks, Inc., 1997
- [6] MATLAB Control System Toolbox Tutorial, The MathWorks, Inc., 1997
- [7] MATLAB Control System Toolbox Reference, The MathWorks, Inc., 1997
- [8] 小野隆幸: 現代制御論のワーキングヘッドの制振制御への応用, 1998 年度鹿児島大学大学院理学研究科修士論文