

数学教育における“理解”

大 山 正 信

Masanobu OYAMA

子供達が公式や法則を学ぶとき、計算のやり方を学ぶとき、すべて学習するという事は、単なる記憶ではなく理解をとものうものでなくてはならない。このことは、国語や社会科等と異つて特に数学の学習では重視されなくてはならない。憶えさせるのではなくて理解させること、これを重視しない数学の教師は殆んどいないと言つてよいであろう。しかし実際には、子供達は理解していないのにも拘らず、教師も生徒も理解したと誤つて思いこんでいる例が非常に多い。例えばテストの成績がよかつたからといつて、よく理解されたと言つてよいだろうか。私はここにいくつかの例をあげて見ようと思う。

- (1) 二十三を 23 と書ける子供でも (小学一年生) 二十三は、23, 203 のどちらかと問えば間違ふ。
- (2) 六年の子供で、 $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ の計算はできるが、その具体的な意味、例えばグラフで説明する等ができない。これは、恐らく教師の教え方が、機械的、暗記的であつた為かも知れない。(事実その方が、能率的であると主張する人が相当に多い。) これでは、“分数の計算”は出来ても、分数については何もわかつていないと言わざるを得ない。
- (3) $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ を“根号の中に入れる時は二乗して入れる”と形式的に記憶しているために、 $a + \sqrt{b} = \sqrt{a^2+b}$ と考えてしまう。これが間違いであることは、両辺を二乗してみることによつて、容易に確かめられるのであるが、それでも尙、前者は正しく、後者は誤りであることが本当に理解されない。計算してみると確かにそうだ。しかし何故そうなのか。これに類することが、代数の世界にはいつた子供達には極めて多い。数学の教師達は、大抵このような疑問の経験を持たないのではないか。教師にとつては、わかりきつたことでも、子供達にとつては、そうでないところに数学教育の一つの問題がある。
- (4) 子供達が野球に非常な興味をもつていたので、百分率を取扱うのに、職業野球の打撃率を教材にとりあげた。ところが、打撃率の百分率計算は殆んど完全に出来たのに、他の場合については、貧弱な結果しか示さなかつた。
- (5) Thorndike の報告によると、97 人の中学校卒業生に $x + y$ の二乗を課したところ、6 %の誤答を得た。更に同じグループに $a_1 + a_2$ の二乗を課したところ、28 %の誤答を示した。
- (6) 高等学校の卒業生について、入学試験の結果から判断すると、分数や無理数の計算、比例の意味、又方程式を解くこと、グラフを書くことの意味、証明とは何であるかが正しく理解されているとは思われない。

理解しないで形式的なものに終つてしまうことの危険はよく承知されながら、かくも真に理解させることは困難な仕事である。私はここで、理解するとは如何なることか。又それはどうして可能

であるかを考えて見たい。

理解するとは、具体的な体験を経て、それが一般化され抽象化されて始めて理解されたと言える。抽象化されることによつて、更に具体的なものへの適用が可能になるのであり、数学の論理性はこの意味において捉えられねばならない。具体から抽象への積重ねられたものが、学習でなければならぬ。

例えば、減法の意味を理解するとは、単に5から3をひけば2になるということを知り、その計算ができることではない。減法によつて解決される問題には、子供達の経験の面からみて、

- (1) 残りの数を求める。
- (2) なくなつた数を求める。
- (3) あといくら必要かを求める。
- (4) 差を求める。

等の型が考えられる。これらの異つた経験が、同じような方法で解決できることがわかつて始めて、減法の意味が理解されたと言える。したがつて、子供達は、これらの異つた種類の経験を偏ることなしに経験するように指導されねばならない。前の例であげた百分率における指導の失敗や、Thorndikeの例などは、具体的な経験の偏りや、形式的な記憶を一般化がなされたと誤つた結果であると思う。

それでは、子供達が具体的な経験を経て抽象化してゆく学習は、どのような点に注意しなければならないか。

第一に、子供達は経験することによつて学ぶようにしなければならない。書物によつて学ぶのではなく経験することによつて学ぶ。これが、ペリーやムーア以来の数学教育の進むべき道である。学習が成立するためには、その背景としての経験が必要であり、子供達の学校内外での経験や社会活動で学ばれるものを組織だてることは理解を容易にするものである。

第二に抽象化が重視されなくてはならない。数学は抽象的な思考の系統であつて抽象化によつて、学習は進歩してゆく。単に具体的な経験にとどまつている限り、新しい場面におつかつた時それは役に立たない。そのためには、子供達の断片的な経験は、系統的に組織だてられなくてはならない。

第三に、具体から抽象への発展を急いではならない。抽象的な記号を用いるようになっても、教師は理解を確実にするために、具体的なものとの連けいを保つてゆかねばならない。失敗の多くは抽象化を急ぎすぎる点にあるので、子供達は説明されることによつて学ぶのではなく、自分で発見することによつて学ぶのであるということを銘記すべきである。

第四に練習は理解された後に始めてなさるべきである。理解以前の練習は、形式的な記憶を理解したと誤つて信じこむ原因ともなる。

具体的な経験を経て、それを抽象化してゆくことよりも、結果を教える事が簡単でもあるし、教師の学力も少く能率的であるように思える。生徒も理解したと誤つて思いこむのが普通である。しかし形式的な結果を急がないで理解を確実にする方が、かえつて学習の経済になるのではなからう

か。整数の計算で10進法の意味が理解されると後で小数や分数を学ぶとき、その基礎的な大部分のものは、既に学習されたことになるのである。

形式的な記憶でなく本当に理解してゆくために、現在の教材の排列は適当であるかどうか。このことも我々は文部省にまかせておくことはできない。そこで私は最後に現場の先生方をお願いしたい。どんな教材を、どんな方法で指導したら、どんなテストで、どんな結果を得たか。ということできるだけ記録していただきたい。我々はそういうものをもとにして始めて、教材の学年排列の問題も検討するすことができるのである。

(そのような記録はどんな小さなものでも、私に送つていただければ、お互に発表する機会があると思うので、この機会をお願いしたいと思つている)
