n 個の標本に於て，top から μ 番目の値 x と，bottom から ν 番目の値 y の同時分布について

On the joint distribution of the μth value x from the top and the νth value y from the bottom in a sample of n.

木　下　卓　馬
Takuma Kinoshita

1. n 個の sample の中で top から μ 番目の値の分

母集団が distribution function F と frequency function $f=F'$ を持つ連続な型の分布であるとき，この母集団から n 個の sample をとり，top から μ 番目の値を x で表す。x の sampling distribution に於ける probability element $g_\mu(x)\,dx$ は n 個の sample の値の中で，$n-\mu<x$, $\mu-1>x+dx$, 残りは x と $x+dx$ との間に落ちる確率に等しいから

$$(1.1)\qquad g_\mu(x)\,bx=\frac{n!}{(n-\mu)!\,(\mu-1)!}(F(x))^{n-\mu}(1-F(x))^{\mu-1}f(x)\,dx$$

$$=n\binom{n-1}{\mu-1}(F(x))^{n-\mu}(1-F(x))^{\mu-1}f(x)\,dx$$

$$(1.2)\qquad \xi=n(1-F(x))$$

とおけば，$0\leqq\xi\leqq n$ で，ξ の fr. f. $h_\mu(\xi)$ は

$$(1.3)\qquad h_\mu(\xi)=\binom{n-1}{\mu-1}\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-\mu}\qquad 0\leqq\xi\leqq n$$

$$=0\qquad \text{outside } (0,n)$$

次に $\lim\limits_{n\to\infty}h_\mu(\xi)$ を求める。

$$h_\mu(\xi)=\binom{n-1}{\mu-1}\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-\mu}$$

$$=\binom{n-1}{\mu-1}\frac{\xi^{\mu-1}}{n^{\mu-1}}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{-\mu}$$

然るに

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n}=e^{-\xi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n-1}{\mu-1}\frac{\left(1-\dfrac{\xi}{n}\right)^{-\mu}}{n^{\mu-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\,(n-2)\cdots(n-\mu+1)\left(1-\dfrac{\xi}{n}\right)^{-\mu}}{\Gamma(\mu)\,n_{\mu-1}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu)}$$

故に

(1.4)　$$\lim_{n\to\infty} h_\mu(\xi) = \frac{\xi^{\mu-1}\, e^{-\xi}}{\Gamma(\mu)}$$

$h_\mu(\xi)$ は有界な ξ—interval で一様有界であるから，ξ は $n\to\infty$ のとき，fr. f. $\frac{\xi^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} e^{-\xi}$ に従つて分布する。

2．n 個の sample の中で，bottom から ν 番目の値の分布

y が sample の bottom から ν 番目の値のときは probability element $g_\nu(y)dy$ は

(2.1)　$$g_\nu(y)\,dy = n\binom{n-1}{\nu-1}(F(y))^{\nu-1}(1-F(y))^{n-\nu} f(y)\,dy$$

(2.2)　$$\eta = nF(y)$$

とおけば η の fr. f. は

(2.3)　$$h_\nu(\eta) = \binom{n-1}{\nu-1}\left(\frac{\eta}{n}\right)^{\nu-}\left(1-\frac{\eta}{n}\right)^{n-\nu} \qquad 0 \leqq \eta \leqq n$$

$$= 0 \qquad \text{outside } (o,n)$$

極限に於ては

(2.4)　$$\lim_{n\to\infty} h_\nu(\eta) = \frac{\eta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\eta}$$

3．top から μ 番目の x の値と bottom から ν 番目の y の値の joint distribution

n 個の sample に於て，top から μ 番目の x の値と，bottom から ν番 目の y の値の joint fr. f. は

(3.1)　$$J_{\mu,\nu}(x,y)\,\frac{n!}{(\mu-1)!\,(\nu-1)!\,(n-\mu-\nu)!}(F(y))^{\nu-1}\{1-F(x)\}^{\mu-1}$$

$$\{F(x)-F(y)\}^{n-\mu-\nu} f(x)\,f(y)$$

今，

(3.2)　$$\xi = n(1-F(x)), \qquad \eta = nF(y)$$

の置換をすれば，ξ, η の joint fr. f. $k_{\mu,\nu}(\xi,\eta)$ は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{n^2 f(x)\,f(y)}$$

であるから

(3.3)　$$k_{\mu,\nu}(\xi,\eta) = \frac{n!}{n^2(\mu-1)!\,(\nu-1)!\,(n-\mu-\nu)!}\left(\frac{\eta}{n}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{\xi}{n}-\frac{\eta}{n}\right)^{n-\mu-\nu}$$

こゝに $\xi>0,\ \eta>0,\ \xi+\eta<n,\ \mu+\nu<n$

然るに $$\left(1-\frac{\eta}{n}-\frac{\xi}{n}\right)^{n-\mu-\nu} = \left(1-\frac{\eta}{n}-\frac{\xi}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\eta}{n}-\frac{\xi}{n}\right)^{-\mu-\nu}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-(\eta+\xi)} = e^{-\eta}\cdot e^{-\xi}$$

$$\frac{n!}{n^{n+\nu}(n-\mu-\nu)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

であるから

$$\text{(3.4)}\qquad \lim_{n\to\infty} k_{\mu,\nu}(\xi,\eta) = \frac{\xi^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e^{-\xi}\cdot\frac{\eta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-1}$$

故に極限に於て ξ と η とは独立である。

$\mu=\nu$ とおけば (3.3), (3.4) は夫々

$$\text{(3.5)}\qquad k_{\nu,\nu}(\xi,\eta) = \frac{n!}{n^2[(\nu-1)!]^2(n-2\nu)!}$$

$$\text{(3.6)}\qquad \lim_{n\to\infty} k_{\nu,\nu}(\xi,\eta) = \frac{\xi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\xi}\cdot\frac{\eta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\eta}$$

となる。

文　献

Harald CRAMER: Mathematical Methods of Statistics (1946)