

一般相対論に於ける宇宙項を含む 重力場方程式の軸対称解について

野 添 俊 雄・野 元 俊 雄

On Axially Symmetric Solution of Gravitational Field Equation with Cosmic-Term in the General Theory of Relativity.

Toshio Nozoe, Toshio Nomoto

緒 言

一般相対論の場方程式の解については、今まで数多くの研究がなされているが、其大部分は球対称解でそのもつとも代表的なものが Schwarzschild の厳密解であつた。

Schwarzschild の解は球対称で無限遠に於て平坦な計量となるような真空内に於ける場方程式の唯一の静的解である。この Schwarzschild 時空内に於ける質量零の質点の運動方程式を正確に解くことは Einstein, Schwarzschild, Droste, de Sitter 等によつてなされ、古典力学に於ける水星の近日点の問題等美事に説明し得たのであるが、宇宙の構成単位である星雲等を仔細に検討すると、どうしても球対称では不都合のように思われるし、太陽系自体も厳密には軸対称分布と考えるのが妥当であろう。このような軸対称性をもつ解については、古くは Weyl, Levi-Civita の研究に見られ、近くは Silberstein^{1,2)}及び Rosen³⁾の研究がある。

殊に興味深いのは Silberstein の研究である。彼は $G_{ij}=0$ の他の解として、静的軸対称解を求めて、二つの質量が互に静止しながら然も互に落下せず存在し得るとする二中心解 (Two center Solution) を求めて、重力法則変更の必然性をも暗示している。(これはいろいろの問題もあるとされている)

筆者等は軸対称分布をなすと思われる巨大な星雲内部の時空と電荷をもつ物質のまわりの解*については既に検討したが、今この小論文に於ては更に Einstein の宇宙項を含む場方程式を用いてこの解を求め、 Λ のもつ物理的意味について研究した。

本 論

軸対称時空を表わす線素としては、Weyl の用いた式 (1) を用い ν 及び λ は ρ, z のみの函数として求めた。

$$ds^2 = -e^{2\lambda-2\nu}(d\rho^2 + dz^2) - \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2 + e^{2\nu} dt^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\nu = \nu(\rho, z) : \lambda = \lambda(\rho, z)$$

即ち軸対称で静的 (Static) という仮定を置いて Einstein の基礎方程式

* T. NOZOE. 鹿児島大学教育学部紀要 1953

$$-8\pi T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} \dots \dots \dots (2)$$

Λg_{ij} : Cosmic-Term

の解を求めよう。

(1) より

$$\left. \begin{aligned} g_{11} = g_{22} = -e^{2\lambda-2\nu}, \quad g_{33} = -\rho^2 e^{-2\nu}, \quad g_{44} = e^{2\nu}, \\ g_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

従つて

$$g = \det |g_{ij}| = -\rho^2 e^{4\lambda-4\nu} \dots \dots \dots (4)$$

$g^{ij} = \frac{1}{g} (g_{ij} \text{ の余因子})$ であるから

$$g^{11} = g^{22} = -e^{-2\lambda+2\nu}, \quad g^{33} = -\rho^2 e^{2\nu}, \quad g^{44} = e^{-2\nu}, \quad g^{ij} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$(i \neq j)$

従つて Christoffel Symbol は

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{hk} [ij, k]$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \lambda' - \nu' & \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\rho e^{-2\lambda} + \rho^2 \nu' e^{-2\lambda} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = -(\bar{\lambda} - \bar{\nu}) & \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \rho^{-1} - \nu' \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \bar{\lambda} - \bar{\nu} & \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -(\lambda' - \nu') \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \lambda' - \nu' & \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \bar{\lambda} - \bar{\nu} \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 44 \end{matrix} \right\} = \nu' e^{-2\lambda+4\nu} & \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = -\bar{\nu} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 44 \end{matrix} \right\} = \bar{\nu} e^{-2\lambda+4\nu} & \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 24 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 42 \end{matrix} \right\} = \bar{\nu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

(') は ρ による微分を表わす。

(-) は z による微分を表わす。

之よりして

$$R_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \log \sqrt{-g} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ mj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ih \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^m} \log \sqrt{-g}$$

を計算すると

$$\left. \begin{aligned} R_{11} = \lambda'' - \nu'' + \bar{\lambda} - \bar{\nu} + 2\nu'^2 - \frac{\lambda'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho} \\ R_{22} = \lambda'' - \nu'' + \bar{\lambda} - \bar{\nu} + 2\nu'^2 + \frac{\lambda'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho} \\ R_{33} = -\rho^2 e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \bar{\nu} + \frac{\nu'}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{44} &= -e^{-2\lambda+2\nu} \left(\nu'' + \bar{\nu} + \frac{\nu'}{\rho} \right) \\ R_{12} = R_{21} &= 2\bar{\nu}' - \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \end{aligned} \right\}$$

これ以外の $R_{ij} = 0$

次にエネルギーテンソル T^{ij} を計算してみよう、特に今、圧力は流体の圧力として完全流体を考えているから

$$T^{ij} = (\rho_0 + P_0) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - g^{ij} P_0 \dots \dots \dots (8)$$

ここに ρ_0 及 P_0 は物質に対し静止して測つた固有の密度と固有の圧力である。今物質が座標系に対して静止している場合

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{dz}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\nu} \dots \dots \dots (9)$$

となる。之よりして

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P_0 \quad T_4^4 = \rho_0$$

$R_j^i = g^{ik} R_{kj}$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} R &= -2e^{-2\lambda+2\nu} \left(\lambda'' - \nu'' + \bar{\lambda} - \bar{\nu} + \nu'^2 + \bar{\nu}^2 - \frac{\nu'}{\rho} \right) \\ R_1^1 &= -e^{-2\lambda+2\nu} \left(\lambda'' - \nu'' + \bar{\lambda} - \bar{\nu} + 2\nu'^2 - \frac{\lambda'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho} \right) \\ R_2^2 &= -e^{-2\lambda+2\nu} \left(\lambda'' - \nu'' + \bar{\lambda} - \bar{\nu} + 2\bar{\nu}^2 + \frac{\lambda'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho} \right) \\ R_3^3 &= e^{-2\lambda+2\nu} \left(\nu'' + \bar{\nu} + \frac{\nu'}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

故に

$$G_1^1 = 8\pi P_0 = -e^{2\nu-2\lambda} \left(\nu'^2 - \bar{\nu}^2 - \frac{\lambda'}{\rho} \right) + \Lambda \quad (11.1)$$

$$G_2^2 = 8\pi P_0 = -e^{2\nu-2\lambda} \left(-\nu'^2 + \bar{\nu}^2 + \frac{\lambda'}{\rho} \right) + \Lambda \quad (11.2)$$

$$G_3^3 = 8\pi P_0 = e^{2\nu-2\lambda} \left(\lambda'' + \bar{\lambda} + \nu'^2 + \bar{\nu}^2 \right) + \Lambda \quad (11.3) \dots \dots \dots (11)$$

$$G_4^4 = -8\pi \rho_0 = e^{2\nu-2\lambda} \left\{ \lambda'' + \bar{\lambda} + \nu'^2 + \bar{\nu}^2 - 2 \left(\nu'' + \bar{\nu} + \frac{\nu'}{\rho} \right) \right\} + \Lambda \quad (11.4)$$

$$G_2^1 = G_1^2 = 0 = e^{2\nu-2\lambda} \left(2\nu' \bar{\nu} - \frac{\nu'}{\rho} \right) \quad (11.5)$$

従つて (11) 式より $P_0, \rho_0, \lambda, \nu$ を決定すればよい即ち

$$\lambda' = \rho (\nu'^2 - \bar{\nu}^2) \dots \dots \dots (12)$$

(11.5) 式より

$$\bar{\lambda} = 2\rho \nu' \bar{\nu} \dots \dots \dots (13)$$

従つて積分可能条件を求めると

(12) 式及び (13) 式よりして,

$$\bar{\lambda}' = 2\rho(\nu' \bar{\nu} - \bar{\nu} \nu')$$

$$\bar{\lambda}' = 2(\nu' \bar{\nu} + \rho \nu'' \bar{\nu} + \rho \nu' \bar{\nu}')$$

故に両式を等しいとおいて

$$\nu'' + \bar{\nu} + \frac{\nu'}{\rho} = 0$$

$$\nabla^2 \nu = 0 \dots\dots\dots (14)$$

(11.1) 式より

$$8\pi P_0 = \Lambda$$

$$P_0 = \frac{\Lambda}{8\pi} \dots\dots\dots (15)$$

(11.3) 式に (15) 式を代入すると

$$\lambda'' + \bar{\lambda} + \nu'^2 + \bar{\nu}^2 = 0$$

(11.4) 式より

$$-8\pi \rho_0 = \Lambda$$

$$\rho_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi} \dots\dots\dots (16)$$

以上の結果からして

$$P_0 = \frac{\Lambda}{8\pi} \quad (17.1)$$

$$\rho_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (17.2)$$

$$\nabla^2 \nu = 0 \quad (17.3)$$

$$\lambda' = \rho(\nu'^2 - \bar{\nu}^2) \quad (17.4)$$

$$\bar{\lambda} = 2\rho \nu' \bar{\nu} \quad (17.5)$$

$$\dots\dots\dots (17)$$

17 式を検討すると (17.3) の

$$\nabla^2 \nu = 0$$

の解は常に存在するので之を (17.4) 及び (17.5) 式に代入することにより λ の形はきまり従つて空間の計量は決定される。

○ 解の物理的考察

(17) 式について今少しく検討しよう。

$$\rho_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

に於て、 Λ は Einstein によれば、 2.74×10^{56} (重力単位) という正の値であるので ρ_0 は負の形をとることになる。即ち軸対称分布をなす物質の内部の固有密度は負の値をとることになる。しかも

$$\rho_0 = -P_0$$

となる。之等の物理的意味をどのように考えたらよいであろうか。

1. 密度が負となるということは不自然だとする考えである。何故というに我々は経験的に密度負というものを具体的には知らないからである。この考えを肯定するならば我々は計算に用いた二つの仮定、即ち Static という事と、完全流体ということである。Silberstein は $G_{ij}=0$ の Non Static な解はないことを証明しているが実在する巨大なる多くの渦状星雲は明かに Non Static である。ここにも検討すべき要素があるように思われる。次に完全流体と考える仮定にも問題がある。事実完全なる流体として考えるべきではなからう。然し Λ の値は非常に小さいので今、

$$\Lambda \doteq 0$$

とすると

$$\rho_0 = P_0 = 0$$

となり、前に発表した論文の (1) の解と同じくなる即ち

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 0 \\ \rho_0 &= 0 \\ \nabla^2 \nu &= 0 \\ \lambda' &= \rho (\nu'^2 - \bar{\nu}^2) \\ \bar{\lambda} &= 2\rho \nu' \bar{\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。

2 次に今一つの解釈はこの解 ρ_0 の負を認めて之に何とか意味づけ出来ないかということである。それは ρ_0 が負ということは、そこに物質創成を考えられるように思う。即ち軸対称分布をなす物質の内部に於ては恰も泉点の如く物質を徐々に作り出して行く作用が行われると考えるのである。この考えが認められることになると甚だ興味深い問題を提供することになる。この考え方についてはいろいろと問題もあろうが物質の創成が理論的に解明されない現在、一考する価値があるように思う。

即ち巨大な軸対称分布をなす大星雲内部では固有の密度と固有の圧力は本質的に、同等なもので唯符号を異にしているに過ぎない。

参 考 文 献

1. L. Silberstein : Phys Rev. 49 (1936), 268.
2. L. Silberstein : Phys. 49 1936 404.
3. N. Resen : Rev. Mod. Phy. 21 (1949), 503.
4. For example, See R. Tolman: Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford. (1934)

Summary

The field equations of the general theory of Relativity are nonlinear equations.

There is no general method of finding rigorous solution of the field equations.

However, the equation have been solved in a few cases in which the number of variables is reduced by symmetry conditions. This solution was found by Schwarzschild. Schwarzschild's solution is significant because it is the only solution of the field equation in empty space which is static, which has spherical symmetry, and which goes over into the flat metric at infinity.

Weyl and Levi-Civita succeeded in finding those static solutions which have only rotational, but not spherical, symmetry. The main purpose of this paper is to seek axially symmetric solution of gravitational field with cosmic-term in the general theory of relativity and to investigate about their physical meanings.
