

翼列性能試験に対する開放型風洞の利用法について

花岡達郎・松下兼次
(受理 昭和55年5月29日)

ON THE APPLICATION OF AN OPEN-TYPE WIND TUNNEL TO TWO-DIMENSIONAL CASCADE TESTS

Tatsuro HANAOKA, Kenji MATSUSITA

The flow field of a wing in an open-type wind tunnel is analogous to a vertical cascade. Therefore, in the frame of the linearized theory both the theories are the same except for the condition in far upstream.

In this paper, the application of the theory and a discussion of test data are presented.

まえがき

開放型の風洞で翼列性能試験を行うと、風洞境界の影響が大き過ぎて、有用な資料が得られないことがある。これは、境界影響によって、負の鏡像が形成され、吹下しが増大するためである。この鏡像の配列は食違い角が零の翼列と同等であるから、逆に、大きな翼弦長の模型を使い、境界影響を利用するようにして実験すると、翼列の試験をしたのと同じ効果が得られる筈である。本報告は、そのことを理論と実験により調査したものである。実験、理論共に流場は2次元流とし、理論的手法には線型特異点法を採用した。

1. 開放型風洞の境界条件

風洞境界上においては圧力は大気圧に等しく、一定である。したがって、境界面上、翼よりはるか上流と下流の任意点について Bernoulli の式を比較すると

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho \{ (U+u)^2 + v^2 \} \quad (1.1)$$

である。ただし、 U は風洞内の一様流の流速、 u, v は翼による攪乱流速の x, y 成分とする。

u, v は U に比べて小さいものとして、2次以上の量を省略すると、(1.1)より

$$Uu = 0, \quad y = t/2 \quad \dots\dots(1.2)$$

が得られる。ただし、 t は風洞境界の幅、 x 軸は、その中心を通り、下流方向に一様流に平行にとるものと

する。流れを渦無しとし、その速度ポテンシャルを ϕ と書くと、(1.2)より

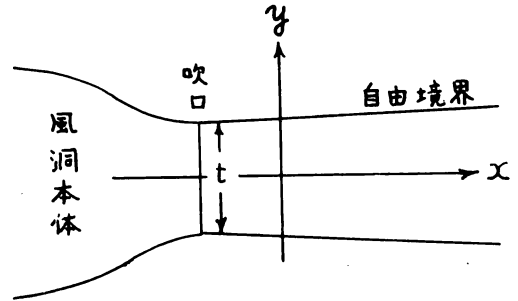


図1

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{または} \quad \phi = \text{const.}, \quad y = t/2 \quad \dots\dots(1.3)$$

が得られる。即ち、開放型風洞の境界は流場の等ポテンシャル面である。

2. 翼列流場の速度ポテンシャル

速度 U の x 軸方向一様流の中に、一つの薄翼が x 軸上に置かれているときの攪乱流の速度ポテンシャル ϕ_1 は

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \tan^{-1} \frac{x-x'}{y} dx' \quad \dots\dots(2.1)$$

と与えられる。ただし、 l は翼弦長、 γ は翼を表す渦層の循環密度とする。

いま、薄翼が、 y 軸上に t の距離で等間隔に置かれ

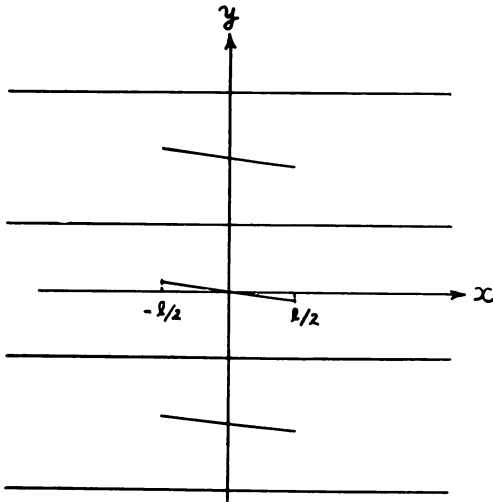


図2

ている場合を考えることにすると(垂直翼列), その速度ポテンシャル ϕ は, (2.1) を翼列の分だけ積み重ねたもので表わされるから,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \tan^{-1} \frac{x-x'}{y-nt} dx' \quad \dots\dots(2.2)$$

となる. この式から $\partial\phi/\partial x$ を求めると

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \frac{y-nt}{(x-x')^2 + (y-nt)^2} dx' \quad \dots\dots(2.3)$$

である. ここで, $y=l/2$ と置くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{y=l/2} &= -\frac{l}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(x-x')^2 + l^2(2n-1)^2/4} dx' \quad \dots\dots(2.4) \end{aligned}$$

である. (2.4) の中の級数

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n-1}{(x-x')^2 + l^2(2n-1)^2/4} \quad \dots\dots(2.5)$$

では, 総和が $n=-\infty$ より $n=\infty$ までであるから, n の代りに $n+1$ と置いても, また n の代りに $-n$ と置いても, その値は変りない筈である. したがって

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n+1}{(x-x')^2 + l^2(2n+1)^2/4} \quad \dots\dots(2.6)$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-(2n+1)}{(x-x')^2 + l^2(2n+1)^2/4} \quad \dots\dots(2.7)$$

となる. この二つの式は, 全く同形で, 符号だけが逆であるから, $f=0$ である. よって

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{y=l/2} = 0 \quad \dots\dots(2.8)$$

となる. $y=-l/2$ の場合は, 総和の項が, (2.7) と同形になるので, (2.8) と同様の結果となる. よって, $y=\pm l/2$ は等ポテンシャル面, つまり開放型風洞の境界に対応する. したがって, (2.2) は垂直翼列の流場を表わすと同時に, 開放型風洞内の翼の流場にも対応する.

3. 無限遠の流れ, 翼面境界条件と積分方程式

i) 無限遠の流れの条件

(2.3) より

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = 0 \quad \dots\dots(3.1)$$

となることは明らかである. したがって, 無限前および後方では, x 軸方向の攪乱流速は存在しない.

次に, (2.2) を y で微分すると

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-nt)^2} dx' \quad \dots\dots(3.2) \end{aligned}$$

である. この式から無限遠方の v を求めてみる. $x-x' \rightarrow \pm\infty$ では, $x-x'$ の代りに x と書いても変りはないし, また上式から明らかのように, そこでは v は y に無関係に一定となるから, $y=0$ としても同じことになる.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{\pi}{|x|} \coth \pi|x| \quad \dots\dots(3.3)$$

の公式を用いると, (3.2) より

$$v_{\mp\infty} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} v = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} -\frac{\Gamma}{2l} \operatorname{sgn} x \coth \pi|x| = \pm \frac{\Gamma}{2l} \quad \dots\dots(3.4)$$

が得られる. ただし, Γ は一つの翼の全循環で

$$\Gamma = \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') dx' \quad \dots\dots(3.5)$$

である. 即ち, y 軸方向の攪乱流速は無限前および後方では有限で, その絶対値は等しく, 符号は前後で逆になる.

上の二つの結果を総合すると, x 軸の正の方向に向う一様流 U の中に垂直翼列が置かれているとき,

$$\delta = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2lU} \quad \dots\dots(3.6)$$

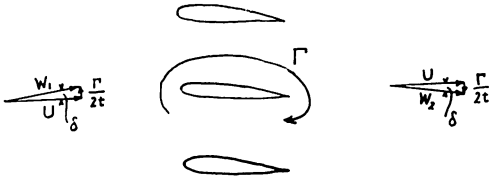


図3

と書くと、無限前方の流れは、 U より上方へ（揚力の働く方向）へ δ だけ曲げられ、無限後方では下方へ δ だけ曲げられることになる。

無限遠方の流れを指定することは、解の確定に必要な条件である。翼列理論にしろ、風洞境界理論にしろ、これまで行われた多くは、等角写像法を用いる非線型理論であるが、両理論それぞれが採用した無限遠の条件は少し違っている。それを本理論の場に移して云うと、風洞境界理論では、図3の W_1 を風洞内の一樣流とみなし、これを無限前の流れとして予じめ与えている¹⁾。翼列理論でも、かつては同じ様にしたこともあるが²⁾、最近では、無限前および後方の平均流 U を与える理論に統一されている。

以下の翼列理論でも平均流 U を与える方法をとる。そして、 U の方向を x 軸とし、翼を表わす特異点分布を x 軸に平行な線上に分布させたもので流場を表わすことにする。線型理論が適用できる流れの範囲では、 U と W_1 とでは、流れの方向が異なるだけ、絶対値は等しいとみなしてよい。したがって、基準流れとして、 U をとるか、 W_1 をとるかの違いは、次に述べる翼面境界条件のところ、表現上迎角 α に δ だけの違いが出るだけのことである。このことは7節の終りで再び取上げる。

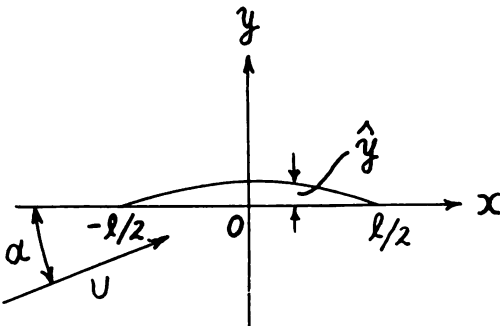


図4

ii) 翼面境界条件

等角写像による方法では、翼面上で法線方向流速が

零になるように解が求められている。これに相当する翼面境界条件は、翼の前後縁を結ぶ線を x 軸にとり、翼の平均矢高線の y 座標を \hat{y} とすると

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \frac{U \sin \alpha + v}{U \cos \alpha + u} \quad \dots\dots (3.7)$$

である。翼のそりも迎角も小さい場合は、それらの2次以上の項は省略しても大差ない、そのとき(3.7)は

$$U \left(\frac{d\hat{y}}{dx} - \alpha \right) = v(x, 0) \quad \dots\dots (3.8)$$

のように簡略化される。これは単独翼の薄翼理論の境界条件と同じであるが、翼列の場合にも適用できると考えてよい。たとえば、(2.3)を見ると、 $y=0$ の場合には、基準翼に対し、上側と下側のそれぞれの翼列による誘導速度の x 成分は消し合い、基準翼による u だけが残り、単独翼と同じになるからである。(3.8)の U として、翼列無限前方と無限後方の流れの平均をとるものとする、(3.7)、(3.8)の迎角 α はそれに対する迎角であるから、普通に用いられる記号 α_m に変える必要がある。

iii) 積分方程式

(3.8)の $v(x, 0)$ は(3.2)で $y=0$ としたものであるから、

$$\begin{aligned} \frac{v(x, 0)}{U} &= -g(x) = -\frac{1}{2\pi U} \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x') \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + n^2 t^2} dx' \end{aligned}$$

である。ただし、 \oint はCauchyの主値を意味する。(3.3)の公式を用い、また $\xi=2x/l$ 、 $h=l/t$ の無次元量を導入して書き改めると

$$g(\xi) = \frac{h}{4U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi') \coth \frac{\pi h(\xi - \xi')}{2} d\xi' \quad \dots\dots (3.9)$$

となる。翼形状および迎角が与えられれば、 $g(\xi)$ の値がわかるので、それを与えて循環密度 $\gamma(\xi)$ を求めたいときは、(3.9)を $\gamma(\xi)$ に関する積分方程式として、解かねばならない。

4. 積分方程式の解析解

数値計算の繁雑さをいとわなければ、積分方程式(3.9)を数値的に解くのはむづかしいことではない。しかし、理論の結果を実際問題に適用する際には、その数値計算の結果をいちいち実験結果と対比する繁雑は避けられない。解析解が得られれば、その点が簡潔

にすまされるばかりでなく、理論の適合性について、更に広範の洞察を可能にする。そこに解析解を得る意義の重要さがある。幸い、解析解を導くことに成功したので、以下にそれを示す。

(3.9)の変数を

$$X = e^{\pi h \xi}, \quad X' = e^{\pi h \xi'} \quad \dots (4.1)$$

によって、 X, X' に変えると

$$\coth \frac{\pi h (\xi - \xi')}{2} = \frac{\sqrt{X/X'} + \sqrt{X'/X}}{\sqrt{X/X'} - \sqrt{X'/X}} = 1 + \frac{2X'}{X - X'}$$

$$dX' = \pi h X' d\xi' \quad \dots (4.2)$$

であるから、(3.9)は

$$g(\xi) = \frac{h}{4U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi') d\xi' + \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 e^{\pi h \xi'} \frac{\gamma}{X - X'} dx' \quad \dots (4.3)$$

と書かれる。再び、変数 X' を

$$E' = \frac{X' - \cosh \pi h}{\sinh \pi h}, \quad E = \frac{X - \cosh \pi h}{\sinh \pi h} \quad \dots (4.4)$$

によって E' に変えると、(4.3)は

$$g(E) = \frac{h}{4U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi') d\xi' + \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E - E'} dE' \quad \dots (4.5)$$

と書かれる。右辺の第1項も E の積分に変えておく。

$$E' = \frac{e^{\pi h \xi'} - \cosh \pi h}{\sinh \pi h} \text{ 即ち } e^{\pi h \xi'} = E' \sinh \pi h + \cosh \pi h$$

$$d\xi' = \frac{1}{\pi h} \cdot \frac{1}{E' + \coth \pi h} dE' \quad \dots (4.6)$$

であるから、

$$g(E) = \frac{1}{4\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E' + k} dE' + \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E - E'} dE' \quad \dots (4.7)$$

と書かれる。ただし

$$k = \coth \pi h > 1 \quad \dots (4.8)$$

である。(4.7)の右辺第1項は常数であるから、これを A の記号で表わし

$$A = \frac{1}{4\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E' + k} dE' \quad \dots (4.9)$$

と置くと、(4.7)は

$$g(E) - A = \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(E')}{E - E'} dE' \quad (4.10)$$

のように表わされる。

(4.10)の左辺が既知であるとする、Kutta の流出条件を満たす、この積分方程式の解は

$$\frac{\gamma(E)}{U} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+E'}{1-E'}} \frac{g(E') - A}{E - E'} dE' \quad \dots (4.11)$$

であることが知られている⁹⁾。

$$E' = \cos \varphi', \quad E = \cos \varphi \quad \dots (4.12)$$

と置き

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi' = -\frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi},$$

$$(n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots (4.13)$$

の公式を利用すると

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+E'}}{\sqrt{1-E'}} \frac{1}{E - E'} dE' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi'$$

$$= -1 \quad \dots (4.14)$$

となるから、(4.11)より

$$\frac{\gamma(E)}{U} = -2A \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+E'}{1-E'}}$$

$$\times \frac{g(E')}{E - E'} dE' \quad \dots (4.15)$$

が得られる。

(4.15)の右辺を(4.9)の γ/U に代入すると

$$A = -\frac{A}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \frac{1}{E+k} dE - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E}{1+E}}$$

$$\times \frac{1}{E+k} \cdot \frac{1}{E-E'} dE' \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+E'}{1-E'}} g(E') dE'$$

$$\dots (4.16)$$

となる。右辺第1項の積分を行うため、(4.12)の変数変換を行い、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \varphi + k} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}, \quad k > 1 \quad \dots (4.17)$$

の公式を使うと

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \frac{1}{E+k} dE = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi + k} d\varphi$$

$$= -1 + \frac{1+k}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \varphi + k} d\varphi = -1 + \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

$$= -1 + e^{\pi h} \quad \dots (4.18)$$

となる。また、(4.14)、(4.18)の結果を使うと

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \frac{1}{E+k} \cdot \frac{1}{E-E'} dE = \frac{1}{\pi} \frac{1}{E'+k}$$

$$\times \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} \left(\frac{1}{E-E'} - \frac{1}{E+k} \right) dE = -\frac{e^{\pi h}}{E'+k}$$

$$\dots (4.19)$$

が得られる。(4.18)、(4.19)を(4.16)に適用して、 A を求めると

$$A = \frac{e^{\pi h}}{\pi(1+e^{\pi h})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+E'}{1-E'}} \frac{g(E')}{E'+k} dE' \quad \dots (4.20)$$

のように、 A が既知関数 $g(E')$ の関数として表わされ

る。(4.20)を(4.15)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\mathcal{E})}{U} = & -\frac{2}{\pi} \frac{e^{\pi h}}{1+e^{\pi h}} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{g(\mathcal{E}')}{\mathcal{E}' + k} d\mathcal{E}' \\ & - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{g(\mathcal{E}')}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}'} d\mathcal{E}' \end{aligned} \quad \dots\dots(4.21)$$

が得られる。右辺は、 $g(\mathcal{E}')$ を含む既知関数だけで表わされている。これが積分方程式(3.9)の解析解である。

翼面上の圧力を p 、翼面に沿う流速を w とし、翼の上下面のそれらを、 u, l の脚符で区別して表わすこととして、Bernoulliの式を用いると

$$p_u + \frac{1}{2} \rho w_u^2 = p_l + \frac{1}{2} \rho w_l^2$$

である。よって、翼上下面の圧力差 Δp は

$$\Delta p = p_l - p_u = \frac{\rho}{2} (w_u + w_l)(w_u - w_l) \quad \dots\dots(4.22)$$

となる。

$$(w_u + w_l)/2 = U, \quad w_u - w_l = \gamma \quad \dots\dots(4.23)$$

とみなしてよいため、(4.22)より

$$\Delta p = \rho U \gamma$$

が得られる。圧力差を $(1/2)\rho U^2$ で割って、係数を作ると

$$\frac{\Delta p}{(1/2)\rho U^2} = \frac{2\gamma}{U} \quad \dots\dots(4.24)$$

である。したがって、(4.21)の右辺を2倍したものが翼面上の圧力差の係数である。

5. 翼列干渉係数

前節の解を利用して、翼列干渉係数の表示式を求めてみる。

i) 平板翼列

翼列の無限前方および無限後方の流れの平均 U に対する平板翼の迎角を α_m と書くと

$$g(\xi) = g(\mathcal{E}) = \alpha_m \quad \dots\dots(5.1)$$

である。これを(4.21)に代入して、それに対する γ/U を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\mathcal{E})}{U} = & -\frac{2\alpha_m}{\pi} \frac{e^{\pi h}}{1+e^{\pi h}} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{1}{\mathcal{E}' + k} d\mathcal{E}' \\ & - \frac{2\alpha_m}{\pi} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{1}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}'} d\mathcal{E}' \end{aligned} \quad \dots\dots(5.2)$$

である。上式の右辺第1項の積分は、 \mathcal{E}' を $-\mathcal{E}'$ で置

き変え、(4.18)を利用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{1}{\mathcal{E}' + k} d\mathcal{E}' = & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}'}{1+\mathcal{E}'}} \\ & \times \frac{1}{\mathcal{E}' - k} d\mathcal{E}' = 1 - e^{-\pi h} \end{aligned} \quad \dots\dots(5.3)$$

のように積分される。これと(4.14)を使うと

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\mathcal{E})}{\alpha_m U} = & 2 \left\{ 1 - \frac{e^{\pi h}(1 - e^{-\pi h})}{1 + e^{\pi h}} \right\} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \\ = & \frac{4}{1 + e^{\pi h}} \sqrt{\frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}} \end{aligned} \quad \dots\dots(5.4)$$

が得られる。

翼列の一つの翼に働く揚力を L 、揚力係数を C_l とし

$$C_l = \frac{L}{(1/2)\rho U^2 l} \quad \dots\dots(5.5)$$

のように定義する。(4.24)より

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \Delta p dx = \rho U \int_{-l/2}^{l/2} \gamma dx$$

であるから、

$$C_l = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\gamma}{U} dx = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{U} d\xi \quad \dots\dots(5.6)$$

である。積分変数 ξ を(4.6)によって、 \mathcal{E} に変えると

$$C_l = \frac{1}{\pi h} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\mathcal{E})}{U} \frac{1}{\mathcal{E} + k} d\mathcal{E} \quad \dots\dots(5.7)$$

となる。この式の γ に(5.4)を代入し、(4.18)を使って、 \mathcal{E} の積分を行うと

$$\frac{C_l}{\alpha_m} = \frac{4}{h} \frac{e^{\pi h} - 1}{1 + e^{\pi h}} = \frac{4}{h} \tanh \frac{\pi h}{2} \quad \dots\dots(5.8)$$

が得られる。

$h \rightarrow 0$ 、つまり単独翼に対する揚力および揚力係数を L_0, C_{l0} で表わすと、 $C_{l0}/\alpha = 2\pi$ であるから、 $\alpha_m = \alpha$ とすると、翼列干渉係数 K は

$$K = \frac{L}{L_0} = \frac{C_l}{C_{l0}} = \frac{2}{\pi h} \tanh \frac{\pi h}{2} \quad \dots\dots(5.9)$$

となる。即ち、等角写像法で得られている式と一致する。(注)

ii) 任意翼型翼列

(5.7)の γ/U に(4.21)を代入し、(4.18)、(4.19)の結果を使って、 \mathcal{E} の積分を行うと

$$C_l = \frac{4}{\pi h} \frac{e^{\pi h}}{1 + e^{\pi h}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\mathcal{E}'}{1-\mathcal{E}'}} \frac{g(\mathcal{E}')}{\mathcal{E}' + k} d\mathcal{E}'$$

となる。(4.6)によって、 ξ' の積分に変えると

$$C_l = 4 \frac{e^{\pi h}}{1 + e^{\pi h}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')} - 1}} g(\xi') d\xi'$$

注) 文献4)のこの部分には誤植がある

.....(5.10)

となる。単独翼のときは、 $h \rightarrow 0$ とすればよいが、形式的に $h=0$ と置くと、被積分関数が不定となるので、極限值をとる。結局、

$$C_{l0} = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} g(\xi') d\xi' \quad \text{.....(5.11)}$$

となる。これは従来得られている結果である。

(5.10)と(5.11)の比をとったものが干渉係数ということになるが、それでは翼の形状、迎角の両方の関数となって、表現が複雑になる。そこで、 $g(\xi)$ を、(3.8)のように、矢高線形状と迎角に分けてしまう。

$$g_1 = \alpha, \quad g_2(\xi) = -d\hat{y}/dx, \quad g(\xi) = g_1 + g_2(\xi) \quad \text{.....(5.12)}$$

と書き、それぞれの $g(\xi)$ に対応する翼列と単独翼の揚力係数を C_{l1} , C_{l2} および C_{l01} , C_{l02} の記号で表わし

$$C_{l2} = 4 \frac{e^{\pi h}}{1+e^{\pi h}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')} - 1}} g_2(\xi') d\xi' \quad \text{.....(5.13)}$$

$$C_{l02} = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} g_2(\xi') d\xi' \quad \text{.....(5.14)}$$

と書くことにすると

$$C_{l1} = C_l - C_{l2}, \quad C_{l01} = C_{l0} - C_{l02} \quad \text{.....(5.15)}$$

である。 C_{l1}/C_{l01} は平板の場合に求めたもので、(5.9)に等しい。

C_{l2} をそのまま算出するより、単独翼薄翼理論にならって、この揚力を打消す迎角、つまり零揚力角を導入する方が、実験資料と比べるのに具合がよい。(5.8)が C_{l1} の表示式であるから、それを用いて、 $C_{l1} + C_{l2} = C_l = 0$ を満足する迎角 α_{m0} を求めると

$$\alpha_{m0} = -\frac{2}{\pi \cdot \lambda} \frac{1+e^{\pi h}}{e^{\pi h}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-e^{-\pi h(1+\xi')}}{e^{\pi h(1-\xi')} - 1}} g_2(\xi') d\xi' \quad \text{.....(5.16)}$$

となる。これが翼列の零揚力角の表示式である。ただし、 K は平板翼列の干渉係数である。

6. 模型実験⁵⁾

風洞内に設置された翼模型の圧力分布測定が、本実験の主題である。模型試験に使用した風洞は、角型吹出口(500×500mm)の噴流型(風速範囲10~30m/sec)である。

i) 装置および実験方法

流れを2次的にするため、測定部両側に平板を置き、その間の吹出口中心線を含む水平面上に、翼模型

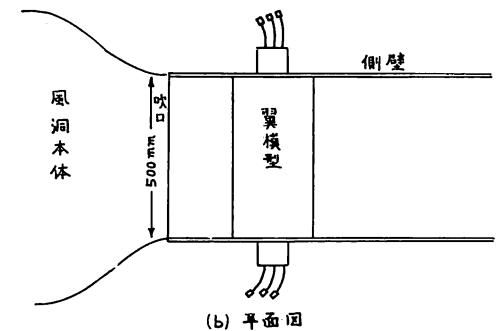
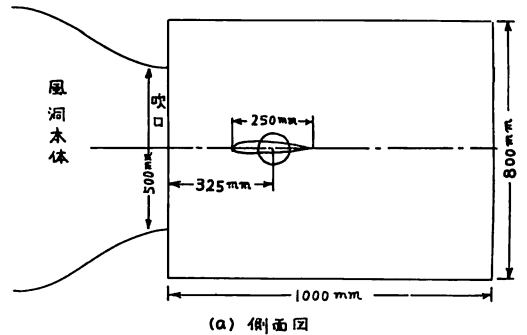


図 5

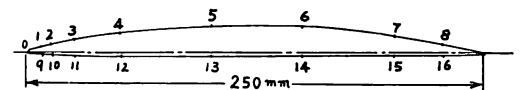


図 6 NACA-16(CAMBER RATIO 0.03 THICKNESS RATIO 0.07)断面形
(注: 数字の付いた処が圧力測定位置)

を設置した(図5参照)。使用翼模型の平面形は250mm(弦長)×500mm(翼幅)の矩形翼である。翼型はNACA-16で、翼厚比7%、最大矢高比3%のものである。翼幅中央に、翼弦に沿って、径0.5mmの圧力測定孔が、上下面に各8個設けてある。翼型形状および圧力測定孔位置を図6に示す。風洞境界幅の影響を調べるため、吹口内に案内板を設け、吹口幅を400mm, 300mmにした場合の測定が行えるようにした。圧力測定にはゲッチングン型マンノメーターを使用し、風速は25~30m/secの範囲で風速の安定したところを選んだ。

ii) 実験結果

風洞は噴流型であるから、風洞境界は下流に向かって開く筈である。その性質を知っておくため、糸の動きで、風洞境界の概略の位置を測定した。その結果を図7に示す。また、風洞内の圧力勾配をみるため、中心線に沿って下流方向に圧力測定を行った。その結果が図8である。噴流境界の開きおよび圧力勾配がこの程

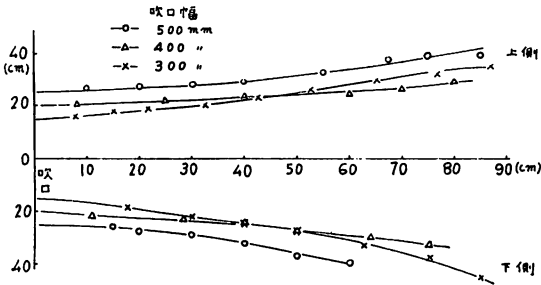


図7 風洞境界の広がり

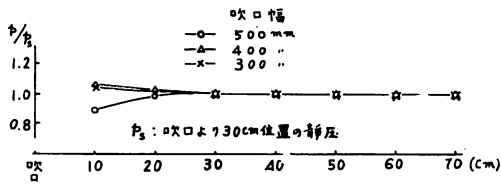


図8 風洞内圧力勾配

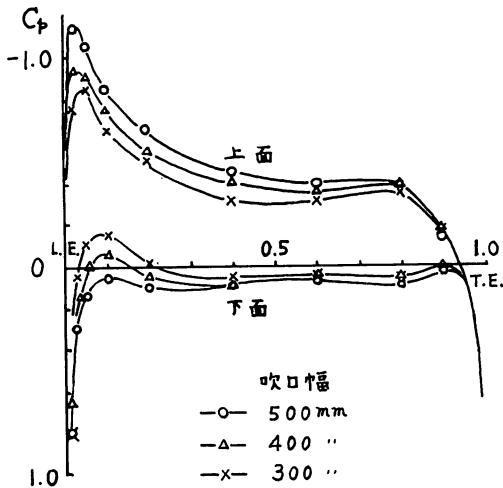


図9 圧力分布($\alpha=6^\circ$)

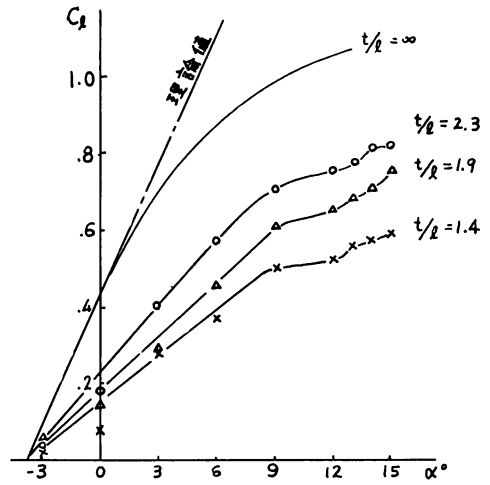


図10

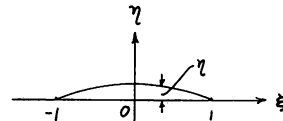


図11

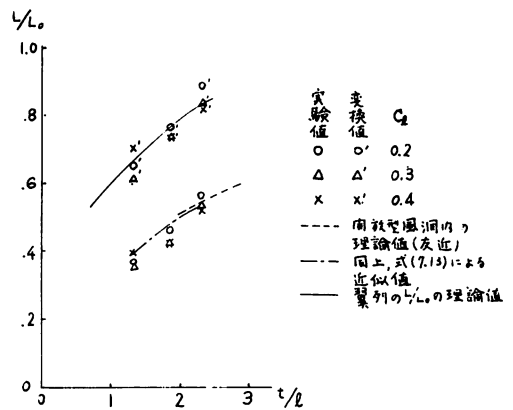


図12

度ならば、境界幅の変化の影響を調べる翼型試験としての精度に支障はないと思われる。

翼の迎角を $-3^\circ \sim 15^\circ$ の範囲に変えて、圧力分布を計測した。その一例を図9に示す。この圧力分布を積分して、揚力係数を求め、迎角に対して点置したのが図10である。揚力係数を求めるには、力の直接測定が精度よい筈であるが、ここでは前記の方法による。迎角 0° のところで、値が低く出ているのは、再試験の必要がある。

7. 実験と理論との比較

i) 零揚力角

実験値を見る前に、零揚力角の理論値を求めておく。先づ、単独翼の零揚力角を計算する。単独翼の薄翼の積分方程式は

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots(7.1)$$

である。NACA-16系の平均矢高線は前後対称の放物

線型であるから、矢高だけで揚力をもたせるときの循環密度 γ/U は $a_1\sqrt{1-\xi^2}$ である。これを(7.1)に代入し、 $\xi'=\cos\theta'$ によって変数を θ' に変えて積分を行うと

$$g(\xi) = \frac{a_1}{2} \cos\theta = \frac{a_1}{2} \xi \quad \dots\dots(7.2)$$

となる。

\hat{y} を、 $\eta=2\hat{y}/l$ によって無次元量に変えると

$$-g(\xi) = d\hat{y}/dx = d\eta/d\xi$$

である。したがって、(7.2)の場合、 $d\eta/d\xi = -a_1\xi/2$ となり、これを ξ で、 -1 より ξ まで積分すると

$$\eta(\xi) = -a_1(\xi^2-1)/4$$

となる。 $\xi=0$ に最大矢高位置があるので

$$\eta_{\max} = \eta(0) = a_1/4$$

となる。 ξ, η 座標では、翼弦長は2であるから、最大矢高比は

$$\eta_{\max}/2 = a_1/8 \quad \dots\dots(7.3)$$

で与えられる。

γ/U が $a_1\sqrt{1-\xi^2}$ のときの揚力係数は、これを(5.6)に代入して、積分を行えば求められる。即ち

$$C_l = a_1 \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi a_1}{2} \quad \dots\dots(7.4)$$

である。

一方、迎角変化に基づく揚力係数は、迎角を α とすると、 $2\pi\alpha$ である。したがって

$$\pi a_1/2 + 2\pi\alpha = 0$$

を満たす迎角が零揚力角になる。それを α_0 の記号で表わすと、上式と(7.3)とより

$$\alpha_0 = -a_1/4 = -2(\eta_{\max}/2) \quad \dots\dots(7.5)$$

が得られる。以上は周知の計算であるが、翼列の零揚力角の計算が同じ手順になるので、参考として記載した。最大矢高比3%は $\eta_{\max}/2=0.03$ であるから、そのときの α_0 は

$$\alpha_0 = -0.06 \doteq -3.5^\circ \quad \dots\dots(7.6)$$

である。

次に、翼列の零揚力角を求めるわけであるが、(5.16)の解析的積分がむづかしいので、次に示す近似法によって計算する。

翼列は流れを曲げる性質をもっているので、単独翼の矢高が変化したもの、というように考える。したがって、 γ/U の分布形は、単独翼の場合と同じに、

$a_1\sqrt{1-\xi^2}$ であるとする。

$\coth x$ は

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} \dots\dots, \quad x^2 < \pi^2$$

のようにべき級数に展開される。 $|\xi-\xi'| < 2$ であるから、 $h < 1$ ならば、この級数を(3.9)の $\coth(\pi h(\xi-\xi')/2)$ に使うことができる。したがって

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi U} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\xi')}{\xi-\xi'} d\xi' + \frac{\pi h^2}{24U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi')(\xi-\xi') d\xi' - \frac{\pi^3 h^4}{1440U} \int_{-1}^1 \gamma(\xi')(\xi-\xi')^3 d\xi' \quad \dots\dots(7.7)$$

となる。 $h < 1$ のとき、右辺第3項以下は省略しても大差ない。 $\gamma(\xi)/U = a_1\sqrt{1-\xi^2}$ とし、 $\xi'=\cos\theta'$ と置いて、積分を行うと

$$g(\xi) = \frac{a_1^*}{2} \xi + \frac{h^2 a_1^*}{48} \xi \quad \dots\dots(7.8)$$

となる。(7.3)を求めたのと同じように、これから最大矢高比 η_{\max} を求めると

$$\eta_{\max}/2 = a_1^*/8 + h^2 a_1^*/192 \quad \dots\dots(7.9)$$

となる。

一方、圧力分布 $a_1^*\sqrt{1-\xi^2}$ に対応する揚力係数は、(7.4)の a_1 の代りに a_1^* と書いたもので表わされる。迎角変化に基づく揚力係数は(5.8)で与えられるから、結局

$$C_{l1} + C_{l2} = 2\pi K \alpha_{m0} + \pi a_1^*/2 = 0$$

により、零揚力角は

$$\alpha_{m0} = -a_1^*/(4K) \quad \dots\dots(7.10)$$

で計算すればよいことがわかる。

(7.9)に $\eta_{\max}/2=0.03$ を代入して a_1^* を求め、その値を(7.10)に入れて計算すれば、翼列の零揚力角 α_{m0} が得られる。(7.9)の右辺第2項は、第1項に比べると、殆んど省略してもよい程度の量であるから、 a_1^* の代りに a_1 の値を使い、それを(7.10)に代入する。結局、翼列の零揚力角は、単独翼のその $1/K$ ということになる。以上の計算より、翼列の零揚力角の変化は、曲り流れによる有効矢高の変化によるものよりも、揚力傾斜の減少に由来するものの方が支配的であることがわかる。本実験の場合、 K の平均として、0.7を使うと $\alpha_{m0} \doteq -5^\circ$ となり、単独翼の $\alpha_0 = -3.5^\circ$ より小さくなる。船舶技術研究所の単独翼試験⁶⁾では、零揚力角が理論より約 0.3° 小さく、本実験では、それが約 1° 大きいということになる。両実験とも、風洞内における基準風向の測定が精密に行われていないので、この程度の実験誤差はやむを得ないだろう。

ii) 干渉係数

図10では、単独翼のものと翼列(ここでは差当り本実験を翼列の実験とよぶ)とで、零揚力角がほぼ同じところにあるので、零揚力角を差引く操作をしないで

も、この図から、直接干渉係数を求めることができる。風洞境界の下方への開きを考慮して、図7から、翼の前縁より1/4弦長に相当する位置の境界幅を読みとり、それを翼列間隔 t に採用する。

図10の吹口幅 ∞ の実験線に対し、理論値とあるのは、揚力傾斜の比較のため記入したもので、零揚力角は実験線のものに合せてある。これを見ると、単独翼では、失速がかなり早く始まっていて、このままでは干渉係数を精度よく算出するのがむづかしい。そこで、干渉係数を求めるのに、次の方法をとる。

(5.8)より、翼列および単独翼の揚力係数は、それぞれ

$$C_l = \frac{4\alpha_m \tanh \frac{\pi h}{2}}{h}, \quad C_{l0} = 2\pi\alpha \quad \dots\dots(7.11)$$

である。 C_l と C_{l0} が等しくなる場合は

$$\frac{4\alpha_m \tanh \frac{\pi h}{2}}{h} = 2\pi\alpha$$

であるから、これより α/α_m を求めると

$$\frac{\alpha}{\alpha_m} = \frac{2}{\pi h} \tanh \frac{\pi h}{2} = K \quad \dots\dots(7.12)$$

となり、干渉係数と同じ式になる。したがって、図10より、同じ C_l のときの α と α_m を読みとって、その比を作れば、干渉係数が得られることになる。ただし、 α 、 α_m は零揚力角を起点にして読むものとする。このようにして求めた干渉係数 K の値を t/l に対して点置したのが図12である。それを見ると、理論値と実験値にはかなりの開きがある。

iii) 翼列理論と開放型風洞内の翼理論

既に、2節および3節で、翼列と開放型風洞内の翼とは同じ理論で扱えること、およびそれぞれで一樣流のとり方が異なることを説明した。この違いは、干渉係数を算出するときの、単独翼の揚力係数 $C_l = 2\pi\alpha$ における α の選び方にひびいて来る。両理論の干渉係数を比較すると

$$\text{翼列理論} \dots\dots \alpha = \alpha_m, \quad K = L/L_0 = C_l / (2\pi\alpha_m)$$

$$\text{風洞境界理論} \dots \alpha = \alpha_m + \delta,$$

$$K_0 = L/L_0 = C_l / \{2\pi(\alpha_m + \delta)\}$$

である。ただし K_0 は開放型風洞境界干渉係数である。

C_l が両者で等しいと置くと

$$K \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \delta} = K_0 \quad \dots\dots(7.13)$$

の関係が得られる。 δ は(3.6)で与えられるから、簡単に、 $\delta = \Gamma / (2tU)$ と書き、 $2\Gamma / (lU) = C_l = 2\pi K\alpha_m$ を δ の

中の Γ に使うと

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_m + \delta} = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \pi h K \alpha_m / 2} = \frac{1}{1 + \pi h K / 2} = k_0 \quad \dots\dots(7.14)$$

となる。結局、 K と K_0 は、(7.13)によって、互に他のものに変換されることになる。

図12に、(7.13)、(7.14)を用いて算出した K_0 と、その厳密解¹⁾とを比較して記載したが、線型理論の精度のよさがよく理解できると思う。また、同図の実験値と理論との一致はほぼ満足すべきものである。実験値に $1/k_0$ を乗じたものが翼列の場合に対応する。当然のことであるが、これも理論と実験はほぼ同一線上にある。

結 論

狭い範囲の実験および計算であるが、おおよそ次のことが云える。

開放型風洞内で行った翼型性能試験において、風洞境界干渉係数の実験値と理論値はよく一致した。

線型理論の解が厳密解に近いことが理論的、また数値的に確かめられた。

上記2項目から、開放型風洞における翼型試験の結果を垂直翼列の特性として利用してもよいという推論が成立つ。

本研究では、理論と実験が、互に欠ける処を補って、予期を越える成果がもたらされたが、実験がその主役を果していることはまぎれもない。実験を担当された野村俊秀、島山千尋両氏、それに実験指導の実際に当られた山下正視氏に感謝の意を表するとともに、翼模型およびその実験結果を貸与された船舶技術研究所の関係各位に厚くお礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 友近晋、梅本一；航研報告14(1939)、185号
- 2) 佐々木達治郎；等角写像の応用、富山房、昭和14年、p. 107
- 3) 例えば、近藤次郎；積分方程式の応用、コロナ社、昭和34年、p. 212
- 4) 例えば、谷一郎；流体力学上巻、岩波書店、昭和19年、p. 44
- 5) 野村俊秀、島山千尋；鹿児島大学工学部、機械工学科、昭和54年度卒論
- 6) 菅井和夫；日本造船学会論文集、第128号、昭和45年