Plücker 座標の判定について

一　柳　宣　男

A Criterion for Plücker Coordinates

Nobuo HITOTSUYANAGI
The Faculty of Education, Kagoshima University

Plücker 座標の判定条件としてつぎの関係式はよく知られている。

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^l P_{i_0\cdots\hat{i}_l\cdots i_k} P_{i_l j_1\cdots j_{k-1}}=0. \tag{1}$$

この証明には種々の方法[3)5)6)]があり，異なる立場からの判定条件の考察[1)]もある。著者は Grassmann 多様体の研究[2)]に関連して (1) の条件を精密化する必要を感じ，やや一般化した形での判定条件を得た。証明のアイディヤは B. L. van der Waerden[7)]による。

判　定　定　理

本報においては添数は常に 1, …, n の範囲を動くものとし，$P_{i_1\cdots i_k}$ は常に添数に関して歪対称であるとする。

$\varepsilon\binom{l_0\cdots l_k}{t_0\cdots t_k}$ を置換 $\binom{l_0\cdots l_k}{t_0\cdots t_k}$ の符号とし，

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[l_0\cdots l_k]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(P)\equiv\sum\varepsilon\binom{l_0\cdots l_k}{t_0\cdots t_k}P_{i_1\cdots i_{\lambda-1}t_0\cdots t_{k-\lambda}}P_{t_{k-\lambda+1}\cdots t_k j_{\lambda+1}\cdots j_k} \tag{2}$$

と定義する。ただし和は $(l_0\cdots l_k)$ のすべての置換 $(t_0\cdots t_k)$ にわたるものとする。

命題 1. $\{P_{i_1\cdots i_k}\}$ が Plücker 座標ならばすべての添数に対して (2) 式は 0 となる。[4)]

証明. Laplace の展開定理による。

Plücker 座標の判定条件として (2) の関係式が最小限いくら必要であろうか。この問に対して著者はつぎの結果を得た。

定理. $\{P_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ を添数に関して歪対称なすべては 0 でない，$P_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\neq 0$ とする，${}_nC_k$ 個の実数の組とする。任意の添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ $(\beta_1<\cdots<\beta_k)$ に対して λ を任意に一つずつ定めて方程式

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(P)=0 \tag{3}$$

を考える。ここに $(i_1\cdots i_k)$ は $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ のある順列 $(j_1\cdots i_k)$ は $(\beta_1\cdots\beta_k)$ のある順列で，(3) が恒等式とならないように選べる場合にはそのように選ばれているものとする。（命題 2 参照）

I. $\{P_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ が Plücker 座標なるための必要十分条件は(3)がすべての添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ $(\beta_1<$

$\cdots<\beta_k$）に対して成立することである。

Ⅱ．(3) から恒等式でない式を1個以上除いた条件（F）はもはや Plücker 座標の十分条件となり得ない。〔注〕

特に，

$$H_{i_0\cdots i_k, j_1\cdots j_{k-1}}(P) \equiv \sum_{l=0}^{k}(-1)^l P_{i_0\cdots i_l\cdots i_k} P_{i_l j_1\cdots j_{k-1}}$$

と定義すれば定理の特別な場合としてつぎの結果を得る。

系1．定理の条件 (3) は

$$H_{i_1\cdots i_k j_1, j_2\cdots j_k}(P)=0$$

としてよい。ここに（$i_1\cdots i_k$），（$j_1\cdots j_k$）は（$i_1\cdots i_k j_1$）がすべて異なる添数となるような（$\alpha_1\cdots\alpha_k$），（$\beta_1\cdots\beta_k$）のある順列である。

系2．定理の条件 (3) は

$$H_{j_1\cdots j_k i_1, i_2\cdots i_k}(P)=0$$

としてよい。ここに($i_1\cdots i_k$)，（$j_1\cdots j_k$）は（$j_1\cdots j_k i_1$）がすべて異なる添数となるような（$\alpha_1\cdots\alpha_k$），（$\beta_1\cdots\beta_k$）のある順列である。

命題1より条件 (3) 及び条件 (F) が必要であることは明らかである。次節でこれらの十分性を考察する。

判 定 定 理 の 証 明

つぎの性質は H の定義より明らかである。

補題． $i_{\lambda-1}=l_k$ ならば

$$(-1)^k(k-\lambda+2)\ H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[l_0\cdots l_k]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(P) \equiv \lambda H_{i_1\cdots i_{\lambda-2}[i_{\lambda-1}l_0\cdots l_{k-1}]l_k j_{\lambda+1}\cdots j_k}(P).$$

I の証明．

$$x_i^\gamma = P_{\alpha_1\cdots\alpha_{\gamma-1} i \alpha_{\gamma+1}\cdots\alpha_k} \qquad (i=1,\cdots,\ n;\ \gamma=1,\cdots,k)$$

で定まるk個の一次独立なベクトル $X^\gamma=(x_i^\gamma)$（$\gamma=1,\cdots,k$）を考え，これらのベクトルで張られる部分空間の Plücker 座標を｛$Q_{\beta_1\cdots\beta_k}$｝とする。$Q_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\neq 0$ 及び (3) が同次式なることより

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_k}=Q_{\alpha_1\cdots\alpha_k}=1 \tag{4}$$

と仮定して一般性を失なわない。このとき

$$Q_{\alpha_1\cdots\alpha_{\gamma-1} i \alpha_{\gamma+1}\cdots\alpha_k}=x_i^\gamma=P_{\alpha_1\cdots\alpha_{\gamma-1} i \alpha_{\gamma+1}\cdots\alpha_k} \qquad (i=1,\cdots,n;\ \gamma=1,\cdots,k). \tag{5}$$

添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ の中で $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ のいずれとも異なる添数の数を m とし，m に関する数学的帰納法によって

$$Q_{\beta_1\cdots\beta_k}=P_{\beta_1\cdots\beta_k} \tag{6}$$

を証明する。

$m=0$, 1 のときは (4), (5) 式より明らかである。$m\leq m_0$ のとき (6) 式が成立すると仮定して $m=m_0+1$ の場合を考察する。(3) 式においてもし $(j_1\cdots j_\lambda)$ が $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ の添数を含めばその添数は $(i_1\cdots i_{\lambda-1})$ に含まれるから，補題を用いて変形した式を考察することによりこの場合はおこり得ないと考えてよい。即ち添数 $j_1,\cdots,j_\lambda$ はすべて $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ と異なるとしてよい。もし $\lambda\leq m_0$ ならば $(j_{\lambda+1}\cdots j_k)$ は少なくとも一つ $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ と異なる添数を含み，(3) 式において項 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_k}P_{\beta_1\cdots\beta_k}$ の係数は 0 でなく他の項はすべて $m\leq m_0$ なる m に対応する添数を持つ。この式を命題1より得られる式

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(Q)=0$$

と比較し，帰納法の仮定を用いて (6) 式を得る。

$\lambda=m_0+1$ のとき $(j_{\lambda+1}\cdots j_k)$ は $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ の一部となり $k-(\lambda-1)<\lambda$ ならば同様にして (6) 式を得る。$k-(\lambda-1)\geq\lambda$ のときもつぎの場合以外は明らかである。

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_{k-\lambda}\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda]i_1\cdots i_{k-\lambda}}(P)=0. \tag{7}$$

λ が奇数のとき (7) 式は恒等式となりこの場合はおこり得ない。(命題2参照) λ が偶数のとき (7) 式は

$$K\sum\varepsilon\begin{pmatrix} i_{k-\lambda+1}\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda \\ s_1\cdots s_\lambda t_1\cdots t_\lambda \end{pmatrix}P_{i_1\cdots i_{k-\lambda}s_1\cdots s_\lambda}P_{t_1\cdots t_\lambda i_1\cdots i_{k-\lambda}}=0$$

$$\text{但し}\ K\equiv(k-2\lambda+1)!\ {}_{k-\lambda+1}C_{k-2\lambda+1} \tag{8}$$

となり，項 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_k}P_{\beta_1\cdots\beta_k}$ の係数は 0 でなく他の項はすべて $m\leq m_0$ なる m に対応する添数を持つからこの場合も (6) 式は成立する。

II の証明.

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_k}=1,$$

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_{\gamma-1}i\alpha_{\gamma+1}\cdots\alpha_k}\quad(i=1,\cdots,n;\ \gamma=1,\cdots,k)$$

を任意に与えて条件式 (F) によって帰納的に $P_{\beta_1\cdots\beta_k}$ を定義する。この場合添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ に対応する関係式が条件 (F) に含まれない場合には $P_{\beta_1\cdots\beta_k}$ は任意に定め得るから，(3) 式が少なくとも一つは成立しないように ${}_nC_k$ 個の実数の組 $\{P_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ を定め得る。このようにして定められた $\{P_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ は命題1によって Plücker 座標とはなり得ない。

H が恒等的に 0 となる場合.

最後に，(2) 式が恒等的に 0 となる場合を考察する。H の定義が添数 i と j に関して対称的であ

ること及び補題によってつぎの場合を考えれば十分である。

i) $\lambda-1\leq k-\lambda$,

ii) $(i_1\cdots i_{\lambda-1})$ と $(l_0\cdots l_k)$ は同じ添数を含まない,

iii) $(l_0\cdots l_k)$ はすべて異なる添数,

iv) $(l_0\cdots l_k)$の任意の順列を $(i_\lambda\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda)$ と表わすとき適当な順列に対して $(i_1\cdots i_k)$, $(j_1\cdots j_k)$ はそれぞれ k 個の異なる添数からなる。

命題 2. i), ii), iii), iv) の仮定を満たす添数の組に対して H が恒等的に 0 となるのは奇数 λ に対して

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_{k-\lambda}\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda]i_1\cdots i_{k-\lambda}}(P)$$

の形に表わされる場合かつこの場合に限る。[5)]

証明. (2) 式において $(i_1\cdots i_{\lambda-1})$ の中に $(j_{\lambda+1}\cdots j_k)$ と異なる添数がある場合は恒等的には 0 とならないから

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[l_0\cdots l_k]i_1\cdots i_{\lambda-1}\cdots i_{k-\lambda}}(P),$$

更にこの場合 $(i_\lambda\cdots i_{k-\lambda})$ の中に $(l_0\cdots l_k)$ と異なる添数があると恒等的には 0 とならないから

$$H_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_{k-\lambda}\beta_1\cdots\beta_\lambda\gamma_1\cdots\gamma_\lambda]i_1\cdots i_{k-\lambda}}(P) \tag{9}$$

の形を考察すれば十分である。λ が偶数のとき(9)式は恒等的には 0 でない。((8)式参照) λ が奇数のとき (K は (8) 式の定数)

$$\begin{aligned}
(9)\ \text{式} &\equiv K\sum\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_1\cdots\beta_\lambda\gamma_1\cdots\gamma_\lambda\\ s_1\cdots s_\lambda t_1\cdots t_\lambda\end{pmatrix}P_{i_1\cdots i_{k-\lambda}s_1\cdots s_\lambda}P_{t_1\cdots t_\lambda i_1\cdots i_{k-\lambda}}\\
&\equiv K\sum\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_1\cdots\beta_\lambda\gamma_1\cdots\gamma_\lambda\\ t_1\cdots t_\lambda s_1\cdots s_\lambda\end{pmatrix}P_{i_1\cdots i_{k-\lambda}t_1\cdots t_\lambda}P_{s_1\cdots s_\lambda i_1\cdots i_{k-\lambda}}\\
&\equiv(-1)^{\lambda^2}K\sum\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_1\cdots\beta_\lambda\gamma_1\cdots\gamma_\lambda\\ s_1\cdots s_\lambda t_1\cdots t_\lambda\end{pmatrix}P_{t_1\cdots t_\lambda i_1\cdots i_{k-\lambda}}P_{i_1\cdots i_{k-\lambda}s_1\cdots s_\lambda},\\
&\therefore\ (9)\ \text{式}\equiv 0.
\end{aligned}$$

添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ が $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$ のいずれとも異なる添数を m 個含むとする。$m=0$, 1の場合は任意の λ に対して (3) は常に恒等式となる。$m\geq 2$ の場合は $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$, $(\beta_1\cdots\beta_k)$ の順列 $(i_1\cdots i_k)$, $(j_1\cdots j_k)$ を例えば

$$j_{\gamma+1}=i_\gamma\quad(\gamma=1,\cdots,k-m)$$

なるように定めれば, 任意の λ に対して (3) は恒等式とならない。したがって定理において $m\geq 2$ なる任意の添数の組 $(\beta_1\cdots\beta_k)$ 及び任意の λ に対して恒等的には 0 でない式 (3) を対応さすことができる。

注 Grassmann 多様体の次元を考えればこの性質は当然予想される。

文　献

1) N. Bourbaki ; Algèbre Multilinéaire, Hermann (1948), 95

2) 一柳宣男；外積方程式系の Complete の条件Ⅱ，鹿大教研究紀要，**18** (1966), 1-8

3) W. V. D. Hodge & D. Pedoe ; Methods of Algebraic Geometry I, Cambridge Univ. Press (1947), 312-315

4) 同　上　Ⅱ (1952), 378-379

5) 弥永昌吉，布川正巳；代数学，岩波 (1967), 174, 176-177

6) J. A. Schouten & W. v. d. Kulk ; Pfaff's Problem and its Generalizations, Oxford Univ. Press (1949), 14

7) B. L. van der Waerden ; Einführung in die Algebraische Geometrie, Springer (1939), 19-23.

Summary

Let H be defined as follows:

$$\boldsymbol{H}_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[l_0\cdots l_k]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(\boldsymbol{P})\equiv\Sigma\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}l_0\cdots l_k\\ t_0\cdots t_k\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{P}_{i_1\cdots i_{\lambda-1}t_0\cdots t_{k-\lambda}}\boldsymbol{P}_{t_{k-\lambda+1}\cdots t_k j_{\lambda+1}\cdots j_k}$$

where $\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}l_0\cdots l_k\\ t_0\cdots t_k\end{smallmatrix}\right)$ is the signature of permutation $(t_0\cdots t_k)$ of $(l_0\cdots l_k)$, and summation is over all possible permutations of $(l_0\cdots l_k)$. Then our result is stated as the following:

Theorem. Let $\{\boldsymbol{P}_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ be ${}_nC_k$ real numbers which are not all zero, say $\boldsymbol{P}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\neq 0$, which are skew-symmetric in the suffixes. For arbitrary k-tuple of suffixes $(\beta_1\cdots\beta_k)$ $(\beta_1<\cdots<\beta_k)$, consider the following equation:

$$\boldsymbol{H}_{i_1\cdots i_{\lambda-1}[i_\lambda\cdots i_k j_1\cdots j_\lambda]j_{\lambda+1}\cdots j_k}(\boldsymbol{P})=0 \tag{1}$$

where $(i_1\cdots i_k)$ is a permutation of $(\alpha_1\cdots\alpha_k)$, and $(j_1\cdots j_k)$ is a permutation of $(\beta_1\cdots\beta_k)$.

(i) A necessary and sufficient condition for $\{\boldsymbol{P}_{\beta_1\cdots\beta_k}\}$ to be Plücker coordinates is that (1) are satisfied for all $(\beta_1\cdots\beta_k)$ $(\beta_1<\cdots\cdots<\beta_k)$.

(ii) Any condition which consists from part of the system of all essential equations in (1), is not a sufficient condition for Plücker coordinates.