2. 三角錐の体積の背景にある数学

鹿児島大学教育学部　安井　孜 (Yasui Tsutomu)
Faculty of Education
Kagoshima University

1　はじめに

中学校の教科書 [4], [5] の三角錐の節を開いてみた．同底面，等高の円錐と円柱による紙上の実験図とともに，[5] では，次のように書かれていた．

『円錐，角錐の体積は，底面積が等しく高さも等しい円柱，角柱の体積の $\frac{1}{3}$ であることがわかっている．だから，円錐，角錐の底面積を S，高さを h とすると体積 V は次のようになる：

$$V = \frac{1}{3}Sh. \text{』} \tag{1.1}$$

中学生は，はたしてこれで納得できるであろうか？教師自身，この説明で納得できるであろうか？生徒の質問に納得できるような (証明までとは言わないまでも) 説明ができるであろうか？我々が教科専門の授業の中で，教師を目指す大学生 (中学生にではない！) に対し，この問題をどのように扱えばよいであろうか？大学で教える数学は，学校現場の教科書のような説明はしない．教育現場で教える数学と大学ので教える数学のギャップは大きい [9]．三角錐の体積を求める公式の証明は，数学Ⅲの積分 (法) の応用まで待たねばならない．しかし，小学生・中学生は積分を学校で学ばない．

教員志望の教育学部の学生はこのギャップの存在を認め，なおかつ，このギャップを，なぜこのようなギャップがあるのかも込めて，自分自身で解消しておくくらいの知識がほしい．そこには，小・中学校で教える内容の背後にある数学，大学の数学と教育現場における数学との関連付け，位置付けが見えてくるだろう [9]．小・中・高校の数学の教育内容の発展が歴史的な発展の凝縮になっていることを知るだけでなく，なぜ教科書のような教え方をせざるを得ないのかも見えてくる．三角錐の体積を求める問題はその一つの事例である．

以下の構成は次のようになる．第 2 節で学校教育における体積の扱いを分析をする．第 3 節では，ユークリッドの「原論」[12] における扱いを紹介する．第 4 節では，ヒルベルトの第 3 問題とデーンの定理の紹介をする．第 5 節では,「原論」の扱いを基本的には踏襲しながら，高校の教科書のレベルで理解できる証明を紹介する．第 6 節では，ルベーグの扱いを紹介し，第 7 節では，線形代数学による証明を紹介する．最後の第 8 節で筆者の考えを整理する．

この拙文のほとんど全ては既知のものであるが，このように一つに整理しておくことは，教員志望の大学生，現職の教員にとって，意味があると思いこれを著わす.

2　学校教育における三角錐の体積

新指導要領 [7] によれば，角柱，円柱の体積は小学校 6 年に降りたが，角錐，円錐の体積は現行の指導要領と同じく，中学 1 年で学ぶことになっている．前前回改訂された指導要領によれば，小学 6 年で，量と測定の項目の (1) イで「基本的な角錐及び円錐の体積の求め方について知ること，また簡単な場合について，その表面積の求め方について知ること」となっていた．錐体の体積はこのように中学校で扱ったり，小学校で扱ったりしている．そこで，現行の指導要領の下で編集された教科書の該当する部分を見てみる.

2.1　教科書における三角錐の体積

東京書籍の教科書「新しい数学 1 」[5] では以下のように記述されている.

まず図で，立方体の重心 O(この用語は使っていない) と各頂点を結び，立方体の各面を底面とする正四角錐が 6 個 (互いに合同な四角錐とは書いてないが，図から推察可能) に分解できることから，底面が 10cm の正方形，高さ 5cm の正四角錐の体積を求めさせている．次に，第 1 節で述べたように，

『角錐，円錐の体積は，底面積が等しく高さも等しい角柱，円柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ であることがわかっている．(円錐の水が円柱の $\dfrac{1}{3}$ まで入った写真を見せ) 角錐，円錐の底面積を S，高さを h とすると，体積 V を求める公式は次のようになる。$V = \dfrac{1}{3}Sh$ 』

学校図書の教科書「中学校数学 1 」[4] を見てみると，東京書籍の教科書 [5] と同様の写真があり，同様の記述と公式 (1.1) があり，立方体を合同な 3 個の三角錐から構成している.

いずれの教科書も，特定の四角錐では公式が成立することと，(紙上の) 実験により，一般の円錐，角錐にも公式 (1.1) が一般に成立するらしいことを示している.

2.2　教科書における面積と体積の流れ

ここで，小学校で学ぶ三角形の面積の公式の証明 (小学校では証明という用語は使わないが) と公式 (1.1) とを，学校図書の教科書 [1]，[2]，[3]，[4] で比べてみよう.

三角形の面積の場合

4 年で，正方形を基準とする単位の面積を決め，次の公式が現れる：

長方形の面積 = たて × 横.　　小学 4 年

５年下では，平行四辺形を分解して長方形に直し，次の公式を得る：

$$\text{平行四辺形の面積} = \text{底辺} \times \text{高さ}. \qquad \text{小学５年}$$

さらに，三角形の面積は，(１) 分解合同により平行四辺形 (または長方形) を構成，または (２) 合同な２つの三角形から平行四辺形を構成し，次の公式を得る：

$$\text{三角形の面積} = \text{底辺} \times \text{高さ} \div 2. \qquad \text{小学５年}$$

三角錐の体積の場合

６年で，立方体を基準にする単位の体積を決め，次の公式が現れる：

$$\text{直方体の体積} = \text{たて} \times \text{横} \times \text{高さ}. \qquad \text{小学６年}$$

中学１年，空間図形の単元で，四角柱は直方体とみて，

$$\text{四角柱の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \qquad \text{中学１年}$$

と考えることができることを紹介したのち，角柱，円柱の体積の公式が与えられる：

底面積が S cm^2，高さが h cm の角柱，円柱の体積を V cm^3 とすると

$$V = Sh \qquad \text{中学１年}$$

と述べ，底面積と高さのの等しい角柱と角錐，円柱と円錐の容器を用いた写真による紙上の実験から次のように述べている：

『底面積が Scm^2，高さが $h$cm の角すい，円すいの体積を Vcm^3 とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh. \text{』} \qquad \text{中学１年}$$

義務教育においては，三角形の面積の公式は堅固な根拠をもって得られるのに対し，角錐，円錐の体積の公式の根拠は非常に曖昧である．体積の公式の証明は紙上の実験である．教科書にあるような角錐と角柱の容器，円錐と円柱の容器は確かに市販されていが，多くの中学校がこのような容器を持っているかどうかは疑問である．そのような容器を持って実験しても，わずか１回の実験ではたしてこの公式は信用できるであろうか？

実際，円を描き，その周の長さを出来るだけ正確に測れば，円周率は 3.14 となるであろう．だからと言って，円周率が 3.14 というのは正しくないことを思い起こせばよい．

鹿児島大学教育学部付属中学校では，生徒に紙で模型をつくらせ，水の代わりに目の細かい砂で代用するとのことであった．だからと言って，(1.1) の公式が成立するとは言えない．ある特殊な四角錐に対しては公式 (1.1) が成立し，一般の角錐の場合 (1.1) がほぼ成立することを知るのみである．それでも，この方法では生徒の数だけ実験でき，公式の信頼度が高まる．数学的活動のモデルになっているという長所はある．

2.3 高校の教科書の扱い

東京書籍の教科書 [6] では，数学Ⅲの積分の応用の単元で体積を扱い，その例として底面積 S，高さ h の角錐の体積は公式 (1.1) で与えられることを示している．しかし，それとて曖昧さが残る (詳細は第 8 節).

直線で構成される図形に対して積分を用いるのは何か仰々しさを感じる．将来，指導要領が改訂され，角錐の体積が以前のように (1988 年改訂の指導要領) 小学校に降りてきたら，数学Ⅲを選択せず大学でも文系を通してきた小学校教員は，公式 (1,1) の正しいことを，彼ら自身，根拠を知ることなしに，児童と同レベルの知識で頭ごなしに教えるしかなくなる．それでも，数学 B の数列と，背理法 (数学 A) または数列の極限 (数学Ⅲ) を学べば (1.1) の公式は得られることを第 5 節で紹介する．

3 ユークリッドの「原論」第12巻における扱い

ユークリッドの原論 [12] では，第 1 巻が平面幾何を扱い，公式があるわけではないが，事実上，小学校の教科書のように三角形の面積を求めている (「原論」における面積は量ではなく，分解合同である)．立体幾何は第 12 巻で扱っている．内容よりも記号に使われる文字 (ギリシャ文字) と文体のために，今の学生にとって読みやすいとは言えないが，落ち着いて読めば特に難しいものではない．該当する部分を紹介する．

命題３：三角錐は，互いに合同で，全体に対しても相似な２つの三角錐と，体積の等しい２つの角柱に分解できる．このとき２つの角柱の和は全体の半分より大きい．

証明は，具体的に構成する．

命題４：等高な２つの角錐が上のように分解されると，角錐内の角柱の体積の和は底面積に比例する (取り尽くし法).

証明：背理法による．

命題５：等高な三角錐の体積は底面積に比例する．

証明は，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$(とアルキメデスの原理) を用いる (これが重要).

命題６：等高な多角錐は底面に比例する．

証明：多角錐を三角錐に分解する．

命題７：三角柱は体積の等しい３個の三角錐に分解できる．

証明：構成による．

以下，与えられた三角錐に対し，その三角錐と同体積の２つの三角錐を命題７の手法で構成すれば，底面を共有する三角柱が構成される．従って，公式 (1.1) が得られる．□

「原論」に現れる体積も，面積と同様,「量」ではないことが分かるだろう.「原論」において等しいというのは，分解して，必要なら同じ図形を加えて，一方から他方が構成されるとき言う．原論第 1 巻命題 38(底辺が同一で同じ平行線の間にある三角形は互いに等

しい）はその例である．この辺りの議論は「原論」[12] より砂田の本 [21, 第 4 章] の方が理解しやすい．

「原論」の証明は中学生には難しすぎるだろうし，高校生には，授業の中でするのは，時間が不足するだろう．

命題 3 を見ると，三角錐を分解して，三角柱を構成できないだろうかと考えるのは自然な発想であるが，実は，次節で説明するように，それは一般的には不可能である．

4　ヒルベルトの第 3 問題

ヒルベルトは 1990 年 8 月，パリで開催された第 2 回国際数学者会議において 23 の問題を提示した．その第 3 問題が「底面積と高さの等しい 2 つの三角錐 (四面体) の体積の等しいことの合同公理だけによる証明は可能か？」である．2 つの三角形は，その面積は底辺と高さが等しければ，底辺はそのままにして，高さを半分にした長方形を介して面積の等しいことが分かる (小学 5 年)．同様のことは三角錐でも成立するかというものである．与えられた三角錐を分解し，再構成して，同じ底面で高さが $\frac{1}{3}$ の三角柱が得られれば,「原論」第 12 巻命題 5 の証明にアルキメデスの原理を用いなくてすみ，大変都合がよい．

M. デーンはその年のうちに,「正四面体を分解合同により同じ底面で高さ 3 分の 1 の三角柱に直すことは不可能である.」と，ヒルベルトの第 3 問題を否定的に解決した．従って，一般には，三角錐を分解合同により同底面の三角柱を構成することはできないことになった．その証明には，今ではデーン不変量と呼ばれる不変量を用いる．詳細は，例えば，ポルチャンスキーら [16] の「面積と体積，第 2 章」，ハーツホーン [15] の「幾何学 I，第 27 節」ほか,「天書の証明，第 7 章」[13],「分割の幾何学，第 4 章」[21] にある.「見える数学の世界」[22] には解説が載っている．

さらに，同底面，等高であるが，同形でない 2 つの三角錐で，分解合同により，一方は三角柱にでき，もう一方はできない例もある [13, pp. 63-64]，[11, p. 47]．

三角形の面積には，実数の連続性は使わなかった．三角錐の場合，原論第 12 巻命題 5 に現れたように，実数の連続性 (アルキメデスの原理) を必要とした．不可能性にはこのように，数の構造が背景にある．さらに，初等的に扱うことのできた 2 次元 (多角形) とそれを越えた議論を必要とする 3 次元 (多面体) という，次元の差というのも大きい例であることが分かる．

小学校教員，中学校数学教員を目指す大学生は，角錐と角柱が，一般には分解合同でないという事実だけは知識として持っていることを望む．この不可能性のゆえに，同底面，等高な角錐と角柱の容器で教科書のような実験をする意味がある．

5　数列の極限を使う証明 (高校３年で可能)

以下，空間図形 K の体積を $V(K)$ で表し，平面図形 K の面積を $S(K)$ で表す.

アルキメデスの原理を直接には用いず (陰には用いる)，高校で学ぶ程度の厳密性を用いて公式 (1.1) の証明を紹介する．本質的には，原論第 12 巻命題 5 と同値である.

5.1　数列 (数学 B) と極限の性質 (数学Ⅲ) を用いる証明

ここで，極限の性質というのは，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ と極限の和の公式とはさみうちの原理である.

公式 (1.1) の証明 (cf. [22, pp. 364-365]) : 三角形 $\triangle ABC$ を底面とし D を頂点とし，底面積 $S=S(\triangle ABC)$，高さ h の三角錐 K を考える．線分 DA を n 等分し，その点を上から $A_1, A_2, \ldots, A_n(=A)$ とする．点 A_k を通り，底面と平行な平面と，線分 DB, DC との交点をそれぞれ B_k, C_k $(1\le k\le n)$ とおく．このとき，三角形 $\triangle A_kB_kC_k$ $(1\le k\le n)$ は $\triangle ABC$ と相似である．$\triangle A_kB_kC_k$ を上底とし，A_kA_{k+1} を母線とする三角柱 K_k $(1\le k\le n-1)$ と $\triangle A_kB_kC_k$ を下底とし，A_kA_{k-1} を母線とする三角柱 L_k $(1\le k\le n)$ とが構成される．このとき，

$$V(K_k)=V(L_k)=S(\triangle A_kB_kC_k)\times\frac{h}{n}=\frac{h}{n}\frac{k^2}{n^2}S=\frac{k^2}{n^3}hS.$$

集合として $\bigcup_{1\le k\le n-1}K_k\subset K\subset\bigcup_{1\le k\le n}L_k$ だから

$$\sum_{1\le k\le n-1}\frac{k^2}{n^3}hS<V(K)<\sum_{1\le k\le n}\frac{k^2}{n^3}hS. \tag{5.1}$$

従って，

$$\frac{hS}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})<V(K)<\frac{hS}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).$$

ここまでは高校数学 B の範囲である．ここで高校数学Ⅲ，数列の極限の単元における極限の和の公式と $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$(アルキメデスの原理と同値だが，高校生には直観的に受け入れやすい) とを用いれば，公式 (1.1) が得られる．□

区分求積法を用いても公式 (1.1) は求められるが，区分求積法は数学Ⅲの積分の単元に入る．そこでは，積分を用いて級数を求めるのが本来の目的である.

5.2　数列と背理法 (数学 A) を用いる証明

上で用いたたアイディアにより，背理法 (数学 A) と自然数の数列 $\{n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ が上に有界でないことを用いれば，数学 B の数列の範囲内で，次の命題が証明できる.

補題 5.1 底面積と高さの等しい２つの三角錐は体積も等しい.

証明: K, K' を，底面積がともに S で，高さがともに h の三角錐で，$V(K) \neq V(K')$ とすると，$|V(K) - V(K')| > 0$ となる．$\dfrac{Sh}{|V(K) - V(K')|} < n$ を満たす自然数 n をとる (ここで数列 $\{n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ が上に有界でないことを用いるが，高校生，大学生は疑問を持たないほど自然である)．即ち，

$$|V(K) - V(K')| > \frac{Sh}{n}. \tag{5.2}$$

(5.1) より，

$$\sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{k^2}{n^3} hS < V(K), V(K') < \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k^2}{n^3} hS.$$

故に，

$$|V(K) - V(K')| \leq \frac{1}{n} Sh.$$

これは n の取り方 (5.2) に矛盾する．従って，$V(K) = V(K')$ である．□

以下，公式 (1.1) の証明は，原論第 12 巻命題 7 の逆の発想，即ち，[17, p. 71] と同様にすればよい．□

5.3 ここまでの議論に対するコメント

学校教育で扱う図形ということでユークリッド空間内の図形を対象にしてきたが，ここまで来ると，大学生にも三角錐の体積の公式 (1.1) がそれほど安直に得られるものでなく，中学生に理解させる方法も限定的であることが理解されるだろう．この間，無意識に次の性質を用いたことにも気付くかもしれない．

(a) 学校教育で扱う体積は「量」であり，その基準となる量は立法体の体積である．
(b) 従って，体積は非負の実数．
(c) 立体 K が K_1 と K_2 に分解されるとき，$V(K) = V(K_1) + V(K_2)$,
(d) 立体 K と L が合同 $\Longrightarrow V(K) = V(L)$,
(e) $K \subset L$ ならば $V(K) \leq V(L)$.

しかし，小学校における面積，体積の定義のままでは 2 辺の大きさが 1, $\sqrt{2}$ の長方形の面積，3 辺の大きさが，1, 1, $\sqrt{2}$ の直方体の体積を決めることができない．小学校における面積は「量」であり，その計算には極限が必要となる．体積も同様である.「量」としての面積，体積を考える限り，解析学に接近する．

「原論」においては，体積は (その前に面積も)「量」ではない．面積であれ，体積であれ,「原論」では「等しい＝分解合同可能」である.「原論」では，面積・体積は「性質」に重点がおけれているように見られるが，背後には「量」があり，幾何学の起源も「(測)量」であることを忘れてはならない．この「原論」においてすら体積においては無限の操作 (極限) を必要とする．

上野 [19] はこう述べている：「小学校で学んでいる数学を概念的に説明するのは実は一番難しい」[19, p. 43]．さらに，「面積というのも決して簡単なことではありません．（中略）面積もきちんと定義しようとすると，実は長々と議論しなければいけない．」[19, p. 45]

体積はもっと難しく，体積を計算しようとすると [17, Ⅳ 体積] のように，さらに長い議論が必要となる．

6 ルベーグの扱い

ここでは，学校教育における体積と同様，立方体を基準とするルベーグ [17, §§44-48] のアイディアのみ紹介する：

まず，単位となる長さ (v とおく) を決める．単位の大きさを 1 辺とする立方体 C を決める．1 辺が $\dfrac{v}{10^i}$ ($i=0$ または $i \in \boldsymbol{N}$) の立方体を C_i とおき，C_i に等しい立方体 (U_i-立方体という) の網目で空間 $\boldsymbol{R}^3$ を覆う．

定義 6.1 与えられた立体 K に含まれる U_i-立方体の個数を n_i，K の点を 1 点以上含む U_i-立方体の個数を m_i とおく．このとき，

$$n_0 \leq \frac{n_1}{1000} \leq \cdots \leq \frac{n_i}{1000^i} \leq \frac{m_i}{1000^i} \leq \frac{m_1}{1000} \leq m_0.$$

$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{m_i - n_i}{1000^i} = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{1000^i} \left(= \lim_{i\to\infty} \frac{m_i}{1000^i} \right)$ を K の体積といい，$V(K)$ で表す．

小・中学校における定義は $n_0 = m_0$ または $m_1 = n_1$ の場合のみで，しかも，当然ながら有界な立体しか考えない．ここでも，体積を考える対象は有界な立体に限っている．次に，定義より，「直方体の体積 = 底面積 × 高さ」を証明する．

ルベーグは面積に関する議論との重複を避け，面積の章では記載があるが，体積のところ省いたものがある．ここではそれを補いながら解説する．

立体 K が K_1 と K_2 に分解されるとき，$V(K) = V(K_1) + V(K_2)$．

合同な立体の体積は等しい．

任意の多面体は体積を持つ．

次の補題は，[17, §28] の面積に関する補題の体積版で，[17] に書かれてはいないが，[17, §48] で暗に使われている．

補題 6.1 (有界で連結な) 立体 K が体積を持つための必要十分条件は，K を覆うある多面体 E と K に覆われる (いくつかの) 多面体 (の和集合) I とを，E の体積と I の体積の差を十分小さく出来るように取ることができることである．

ルベーグはここで三角錐の体積の議論のために，原論第 12 巻命題 5 の代わりに，次の補題を準備する：

補題 6.2 体積を持つ立体は，平面に関する直角または斜め折返しによって同一体積の立体に変換される．

証明には，上記の補題6.1を暗に使っている．斜め折り返しの定義は書いてないが，文脈から，適当な直角座標系で，(x, y, z) を $(x + az, y + bz, -z)$ に移す変換のことと推察される．

以下，公式 (1.1) の証明 [17, p. 71] は，基本的に原論第12巻命題7と同じである．従って，3つの三角錐は互いに体積が等しく，公式 (1.1) が得られる．

ルベーグの方法は，$\epsilon - \delta$ 論法を使わず,「差を十分小さく取ることができる」という表現で済ませており，その意味では高校の範囲の数学しか使わない．だからと言って，高校で教えるには，時間の制限を超えるだろう．

7 線形代数学を用いる方法

線形変換により，平行六面体が平行六面体に移り，その体積は変換の行列の行列式の絶対値倍になることは示すが (例えば [18, p. 76])，三角錐の公式 (1.1) は証明されているものとして，線形代数で扱うことはほとんどない．ここでは補題6.1を用いて公式 (1.1) の証明を試みる．

補題 7.1 3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ のアファイン変換 f と2つの立体 K, L に対して，$V(K) = V(L)$ ならば $V(f(K)) = V(f(L))$ が成立する．

証明 3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の任意のアファイン変換は，適当な直交座標によって座標ごとの正の定数倍となるアファイン変換 (今の場合，線形な同型写像)

$$g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3,\ g(x, y, z) = (\alpha x, \beta y, \gamma z) \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

と合同変換との合成で表される [20, 定理5.41]．ここで，α, β, γ は g の固有値である．従って，上記の g について補題を証明すれば十分である．線形変換 g により，U_i-立方体 (§6参照) は平行六面体 $g(U_i)$ に移る．$g(U_i)$ を U_i'-平行六面体という．このとき，体積 $V(U_i') = \alpha\beta\gamma V(U_i)$. 補題6.1より，体積を持つ立体 K に対して，K を覆う多面体 E，K に覆われるいくつかの互いに素な多面体 I は共に，ある m_i 個，n_i 個の U_i-立方体で構成される．このとき，$g(K)$ は m_i 個の U_i'-平行六面体で覆われ，n_i 個の U_i'-平行六面体を覆う．$V(E) - V(I)$ が十分小さいとき，$V(g(E)) - V(g(I))$ も十分小さい．故に，$g(K)$ は体積 $\alpha\beta\gamma V(K)$ を持つ．従って，$V(K) = V(L) \Longrightarrow V(g(K)) = V(g(L))$ $(= \alpha\beta\gamma V(K))$. □

補題 7.2 $\boldsymbol{R}^3$ において，O を原点，E_1, E_2, E_3 をそれぞれ

$$E_1 = (1, 0, 0),\ E_2 = (1, 1, 0),\ E_3 = (0, 0, 1)$$

とおく．このとき，底面が三角形 $\triangle OE_1E_2$ で頂点が E_3 の三角錐 K の体積 $V(K)$ は，同じ三角形を底面とし，母線が OE_3 の三角柱 K' の体積 $V(K')$ の3分の1である．

証明　三角柱 K' から三角錐 K を取り去った図形は，底面は頂点 $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ の正方形で頂点 $(0,0,1)$ の四角錐になる．この四角錐を，3 点 $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ を含む平面で切ると 2 つの三角錐ができる．点 $(1,0,0)$ を含む方を K_1, 点 $(1,1,1)$ を含む方を K_2 とする．K_1 と K_2 は切られた面に対しする折返しとなっており合同である．K と K_1 も平面による折返しとなり，合同である．従って，三角錐 K の体積は三角柱 K' の体積の 3 分の 1 になる．□

公式 (1.1) の証明 与えられた三角錐 L の底面の頂点を O, F_1, F_2 とし，三角錐の頂点を F_3 とする．原点を原点に，3 点 $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ を 3 点 F_1, F_2, F_3 に移す線形写像 f はアファイン変換で，補題 7.2 の三角錐 K を与えられた三角錐 L にうつし，三角柱 K' を底面が三角形 $\triangle OF_1F_2$ とし母線が OF_3 の三角柱 L' に移す．補題 7.1 より，

$$V(L) = V(f(K)) = V(f(K_1)) = V(f(K_2)),\ \text{即ち}\ 3V(L) = V(L').$$

故に，公式 (1.1) は成立する．　□

8　まとめ

積分の応用としての体積 (高校数学Ⅲ) を用いないで，三角錐の体積を議論するとき，小学校教員・中学校数学教員を目指すの大学生には以下のことを，厳密な証明は犠牲にしても (厳密性は後からついてくる [14, p. 29])，理解してほしい：

1. 三角錐は，三角形と異なり，一般には分解合同で三角柱にできない (第 4 節)．従って，教科書 [4]，[5] のような説明は止むえないところがある．
2. 公式 (1.1) の証明には極限の概念が必要で，三角錐の体積を考えることにより初等幾何学 (ユークリッド幾何学) が解析学と接近する．面積・体積を「量」として捉える学校教育では，面積の定義の段階から極限を必要とする．
3. その面積・体積の定義である．正方形・立方体を用いる面積・体積の定義のアイディアは，基本的には，小学 4 年，小学 6 年で学ぶものと同じである．

(1) 正方形，立方体が存在するのはユークリッド幾何の世界のみなので，この定義は非ユークリッド幾何には使えない．

(2) 定義は一意的ではない．逆転の発想で，「三角形の面積 $= \dfrac{1}{3}$(底辺 × 高さ)」を定義に採用し，「三角錐の体積 $= \dfrac{1}{3}$(底面積 × 高さ)」を体積の定義にすることもできる [21, 第 3 章]．

(3) 微分幾何やベクトル解析では，面積要素，体積要素の積分で面積，体積を定義をする．

4. 体積の対象は暗黙に有界な立体としてきた．無限な立体も対象にすると，学校教育の範囲を超え，広義積分まで必要になる．

5. 次の性質は定義から証明されるが，学校教育の場においては直感的に自明なものとして承認するのは，教育上は妥当だろう．

(1) 合同な立体の体積は等しい．

(2) 立体 K が K_1，K_2 と分解されるとき，K の体積は K_1，K_2 の体積の和になる．

(3) 2つの立体 K，L にたいして，$K \subset L$ ならば，K の体積より L の体積が大きい (か等しい)．

(4) 体積 (面積) は，基準となる立方体 (正方形) を決めれば，立体 (平面図形) の体積 (面積) は一意に決まる．

6. 多角形は三角形に，多面体は三角錐に分解される．従って，面積，体積の定義の後，三角形の面積，三角錐の体積を早く求めるのは学校教育上も実用上も重要である．

7. 体積の計算に積分を用いる場合でも，高校の教科書を大学数学から見るとやはり問題が残る．

x 軸に高さをとる．高さ x における yz 平面と平行な平面による切断の面積を $S(x)$ とおく．[6] では，$S(x)$ は x に関し，図では連続であるが，文章では連続と仮定されていない．高さ x までの体積を $V(x)$ とおく．このとき，$V(x)$ は微分可能で $\dfrac{dV}{dx}(x) = S(x)$ の証明 (例えば，[6]) は，大学のレベルでみると，曖昧である．ここにも，研究する数学と，教える数学[1]のギャップがある．

参考文献

[1] みんなと学ぶ小学校算数 4 年下，学校図書，平成 16 年検定済

[2] みんなと学ぶ小学校算数 5 年下，同上

[3] みんなと学ぶ小学校算数 6 年上，同上

[4] 中学校数学 1，学校図書，平成 17 年検定済

[5] 新しい数学 1，東京書籍，平成 13 年検定済

[6] 数学Ⅲ，東京書籍，平成 17 年検定済

[7] 文部科学省，中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版，平成 20 年 9 月

[8] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説，文部科学省ホームページ (2010 年 2 月 24 日閲覧)

[9] 黒木哲徳，教育実践の観点から見た教科内容とその課題，数理解析研究所講究録 1657，数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，2009 年 7 月，94-104

[1] 蟹江 [10, p. 10] のいう教育数学とはこのことか？

[10] 蟹江幸博，教師教育における数学者の役割，数理解析研究所講究録 1657，
数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，2009 年 7 月，1-22

[11] P.R.Cromwell, Polyhera, Cambridge Univ. Press, 1997 年
(日本語訳，下川航也ほか訳，多面体，シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 12 月)

[12] 中村幸四郎他訳・解説，ユークリッド原論，縮刷版，共立出版，1996 年 6 月

[13] M. アイグナー・G.M. ツィーグラー (蟹江幸博訳)，天書の証明，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002 年 12 月

[14] ジョラン編，何のための数学か，東京図書，1975 年 5 月

[15] R. ハーツホーン，幾何学 I，シュプリンガー・ジャパン，2007 年 10 月

[16] ボルチャンスキー他，面積と体積，東京書籍，1994 年 7 月

[17] ルベーグ，量の測度，みすず書房，1976 年 1 月

[18] 石川暢洋・鎌田正良，基礎線形代数，実教出版，1977 年 4 月

[19] 上野健爾，高校で何を教えるか，日本数学教育学会誌 (2010)，第 92 巻，第 1 号，pp.40-47

[20] 小松醇郎，菅原正博，ベクトル空間入門，朝倉書店，昭和 49 年 11 月

[21] 砂田利一，分割の幾何学，日本評論社，2000 年 4 月

[22] 山崎昇監訳，見える数学の世界 2，大竹出版，2000 年 12 月

[23] 吉田稔・飯島忠編集代表，話題源数学 $\boxed{上}$，東京法令出版，平成元年 10 月