211　三点曲げによる積層はり内部はく離の局所座屈

Local Delamination Buckling of a Laminated Beam Due to Three-Point Bending

○正　深川　和良　（鹿大院）　　正　小田　美紀男　（鹿大）
正　有冨　正男　（鹿大）　　正　戸谷　眞之　（鹿大）
Kazuyoshi Fukagawa, Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima
Mikio Oda, Masao Aritomi, Masayuki Toya, Kagoshima University

1．緒　言

積層はり中の内部はく離の進展条件を明らかにすることは，実用上きわめて重要である．本報告では三点曲げを受ける積層はり内部はく離の局所座屈がエネルギー解放率に及ぼす効果について解析する．着力点がはく離面外にある場合については，すでに報告した[1]ので，本報告では着力点がはく離面上にある場合を取り上げる．

2．解　析

たわみの解析　解析モデルを図1に示す．積層はりの長さ（支点間距離）をL，上のはりの厚さ，幅，ヤング率，及び断面2次モーメントをそれぞれh_1, b_1, E_1, I_1とし，下のはりのこれらの諸量をh_2, b_2, E_2, I_2とする．いま，長さcの界面はく離が含まれていると仮定し，左の支点からのはく離左端までの距離をa_Lとする．集中力Pが左端から距離d（または，右端から$d'=L-d$）の位置に作用している．着力点がはく離面上にある場合（$a_L<d<L-a_R$）を考える．

仮想的にはりをB，D点で分離し三つの要素AB, BDおよびDEに分ける．はく離部分BDは両隅部でヒンジ止めされた重ねはりとしてモデル化する．ヒンジの作用は，上のはりに対しては，圧縮軸力$-Z$，下のはりに対しては引張り軸力Zに置換えられる．軸力の大きさは後に変位の適合条件から決定される．ヒンジはまた垂直方向力$-R_B$および$-R_D$を両隅部に及ぼす．ヒンジをこれらの力に置換えることにより，図2の自由体線図を得る．$c_L<c_R$と仮定し，区間BCでは,はく離面は互いに接触しており（分布接触力は$-q(x)$），一方，区間CDにおいては上のはりは座屈を起こしているものとする．せん断力$F_{1B}=\alpha_1 F_B$および$F_{1D}=\alpha_3 F_D$，曲げモーメントM_{1B}およびM_{1D}，水平方向圧縮力Zおよび垂直力R_BおよびR_Dが上のはりの両端に図1に示す方向に作用している．同様に，せん断力$\beta_1 F_B$および$\beta_3 F_D$，モーメントM_{2B}およびM_{2D}，引張り力Z，垂直方向力R_BおよびR_Dが下のはりに作用している．ここで，α_1，α_3，β_1およびβ_3は関係式$\alpha_1+\beta_1=1$および$\alpha_3+\beta_3=1$を満足する未定定数である．

区間BCにおいてはく離面は互いに接触しているとし，また負荷Pの一部$\alpha_2 P$が上層に作用し，$\beta_2 P$が下層に作用すると仮定する．ここで，$\alpha_2+\beta_2=1$であり，α_2は解を求める過程において決定されるべき未知定数である．釣合い条件より次式を得る．

$$F_B=P(L-d)/L,\quad F_D=Pd/L,$$
$$M_{1B}+M_{2B}=F_B a_L,\quad M_{1D}+M_{2D}=Pda_R/L \tag{1}$$

区間BCにおいて，上層および下層におけるxの位置における曲げモーメントM_{x1}およびM_{x2}は以下のように与えられる．

$$M_{x1}=M_1+\alpha_1' F_B x+Zy(x)+\int_0^x q(x')(x-x')dx \tag{2}$$

$$M_{x2}=M_2+\beta_1' F_B x-Zy(x)-\int_0^x q(x')(x-x')dx \tag{3}$$

ここで，yは上層，下層のたわみである．また，

$$\alpha_1' F_B=\alpha_1 F_B+R_B,\quad \beta_1' F_B=\beta_1 F_B-R_B \tag{4}$$

$$M_1=M_{1B}-Zh_1/2,\quad M_2=M_{2B}-Zh_2/2, \tag{5}$$

たわみの微分方程式$D_1 d^2y/dx^2=-M_{x1}$，$D_2 d^2y/dx^2=-M_{x2}$（ここで，D_i(i=1, 2)は上下層の曲げ剛性$D_i=E_iI_i=b_ih_i^3/12$ (i=1, 2)）を足し合わせ，（2）（3）式を代入し，積分して

$$y_{BC}=s_1x^3+s_2x^2+s_3x \tag{6}$$

ここで

$$s_1=-F_B/(6D),\quad D=D_1+D_2 \tag{7}$$

$$s_2=(-F_Ba_L+hZ/2)/(2D),\quad h=h_1+h_2 \tag{8}$$

s_3は未定定数である．

つぎに区間CD ($d-a_L<x<c$) においては，局所座屈がおきており上下層のたわみは異なる．これらをそれぞれy_1およびy_2で表すと，座標xにおけるモーメントは以下のようになる．

$$M_{x1}=M_1+\alpha_1' F_B x+f_1Z-f_2Zx+Zy_1(x)-\alpha_2P(x-d+a_L) \tag{9}$$

$$M_{x2}=M_2+\beta_1' F_B x-f_1Z+f_2Zx-Zy_2(x)-\beta_2P(x-d+a_L) \tag{10}$$

ここで，M_1およびM_2は材端モーメントであり，また

$$f_1=\frac{-F_B(d-a_L)}{D}\left[\frac{(d-a_L)^2}{3}+\frac{1}{2}(d-a_L)\left(a_L-\frac{hZ}{2F_B}\right)\right] \tag{11}$$

$$f_2=\frac{F_B(d-a_L)}{D}\left(-\frac{d+a_L}{2}+\frac{hZ}{2F_B}\right) \tag{12}$$

たわみの微分方程式を解いて

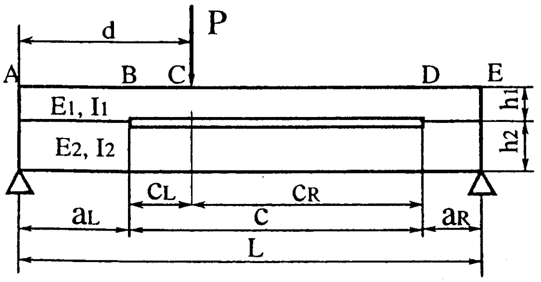


Fig.1　Laminated beam subject to three-point bending

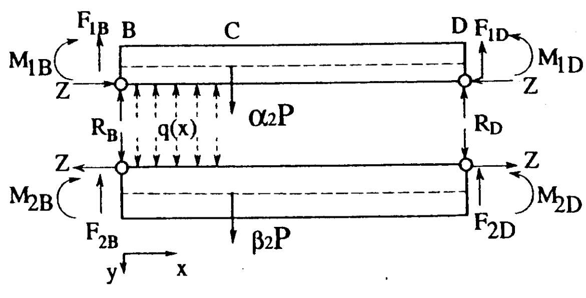


Fig.2　Free body diagram of the delaminated part

日本機械学会講演論文集　No. 028-1〔'02-3-18，九州支部第55期総会講演会〕

$$y_1 = A_1\cos(k_1x) + B_1\sin(k_1x) - \frac{M_1}{Z} - \frac{\alpha_1' F_B x}{Z} - f_1 + f_2 x + \alpha_2 P(x-d+a_L)/Z \tag{13}$$

$$y_2 = A_2\exp(k_2x) + B_2\exp(-k_2x) + \frac{M_2}{Z} + \frac{\beta_1' F_B x}{Z} - f_1 + f_2 x + \beta_2 P(x-d+a_L)/Z \tag{14}$$

ここで, $k_1=\sqrt{Z/D_1}$, $k_2=\sqrt{Z/D_2}$.

接着部分の区間ABおよびDFにおけるたわみy_{AB}およびy_{DF}はx座標の原点をA点に取ると

$$y_{AB} = -F_B x^3/(6D') + s_4 x \tag{15}$$

$$y_{DF} = \frac{Pd}{6LD'}x^3 - \frac{Pd}{2D'}x^2 + s_5 x + s_6 \tag{16}$$

D'は接着はりの曲げ剛性である. さらに, $y_{DF}|_{x=L}=0$より$s_6=PdL^2/(3D')$となる. 残りの9つの未定定数A_i, B_i $(i=1,2)$, s_3~s_5, α'_1, α_2は軸力Zの関数として, 点B, C, Dにおけるたわみ, およびたわみ角の連続条件から求められる.

軸力Zは変形前に点BおよびDにいて中立面に垂直であった断面は, 変形後も垂直を保つという条件から決定される. この条件より非線形方程式$F(Z)=0$, ただし

$$F(Z) = \frac{Zc}{E_1h_1w_1} + \frac{Zc}{E_2h_2w_2} + \frac{1}{2}\int_{d-a_L}^{c}(y_1')^2dx - \frac{1}{2}\int_{d-a_L}^{c}(y_2')^2dx - \frac{h}{2}(\theta_L+\theta_R) \tag{17}$$

を得る. ここで, θ_Lとθ_RはB, D点におけるたわみ角で,

$$\theta_L = \left.\frac{dy_{BC}}{dx}\right|_{x=a_L}, \quad \theta_R = \left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=c} \tag{18}$$

Zが求められると, すべての未定定数がきまる. 着力点におけるたわみδは$\delta = y_{AB}|_{x=a_L} + y_{BC}|_{x=c_L}$で与えられる.

Zの数値解　ヤング率がそれぞれE_1= 182.0 GPaのステンレス鋼はりを上層に, E_2 = 2.94 GPaのアルミニウムはりを下層とする組み合わせを考える. 厚さ, 幅をそれぞれh_1= 0.5 mm, b_1= 20 mmおよびh_2= 2 mm, b_2= 30 mm, 全長は共にL= 400 mmとする. また, d= 150 mm, a_R= 50 mmおよびc=240 mmと設定する. $F(Z)$=0の解Zの挙動を調べるために, 関数$F(Z)$をZに対してプロットしたところ, 荷重が小さいときは解は一つだけであり, 荷重が増大するにつれ解の数は増大することがわかった. 例えば, P=3.5 Nの場合, $F(Z)$=0は3つの解$Z(I)$, $Z(II)$, $Z(III)$ (ただし, $Z(I)<Z(II)<Z(III)$)を持つが, これらに対応するたわみ曲線を描かせたところ, $Z(I)$, $Z(III)$に対しては, 上にあるべき上層が下層の下にきており, 矛盾が生じることがわかった. これに対し, 2番目の解$Z(II)$に対するたわみ曲線は矛盾を含まず, $Z(II)$のみが座屈に対する適切な解であることがわかった. 同様な結果が他のPの値に対しても成り立ち, それゆえ臨界座屈荷重P_{cr}は, 2番目の解が始めて現れる荷重として定義できる.

荷重が臨界座屈荷重をこえた後の着力点変位関係 (P-δ曲線)は, いくつかのPに対して解Zを求めることにより得られる. 荷重が臨界座屈荷重以下の場合は, はく離面が全面接触しているモデル[(2)]の解が適用される. この場合, 変位δは負荷Pに比例し, コンプライアンスΦ $(=\delta/P)$を与える式はすでに得られている. 図3にモデルはりに対するP-δ曲線を示す. P-δ曲線は, バイリニアであり, 座屈後は, はりはたわみやすくなっていることがわかる. 図中に実験値も合わせて示しているが, 解析と良く一致している.

3. エネルギー解放率

つぎに, 上下のはりの幅が同じであるとしたとき$(b_1=b_2=b)$のエネルギー解放率を, 座屈前後に対して計算し, 座屈がエネルギー解放率に及ぼす影響を調べる. 全面接触の場合のGはすでに与えられている. 一方, 座屈後のGの計算には, 一般的な負荷を受ける積層はり中の界面き裂のエネルギー解放率を与えるSuoおよびHutchinson[(3)]の公式を用いる. ここで, 前節で扱ったモデルで, $b_1=b_2$, d=150 mm ポアソン比をν_1=0.29, ν_2=0.33とおき, また, 荷重はP=11.0 N, (c=100 mmに対する座屈荷重に等しい) とする. 図4に, 平面応力条件を仮定したときの, き裂の左端 (図. 4 (a)) および右端 (図. 4 (b)) におけるエネルギー解放率をc/Lに対してプロットした. Gは座屈により一般に大きくなることがわかる. この効果はき裂左端 (負荷点に近い側) において顕著である.

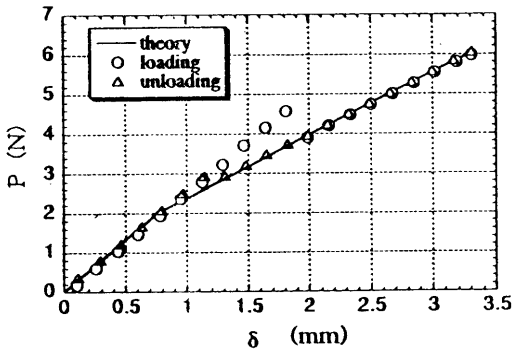
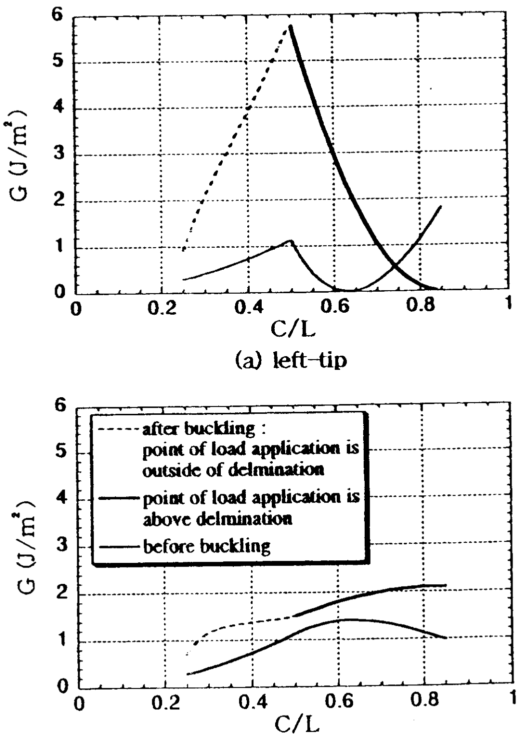


Fig.3 Relation between P and δ



(a) left-tip

(b) right-tip

Fig.4 Comparison of the energy release rates before and after buckling

文　献

(1) 戸谷眞之ほか3名, 機論, 62-602 A(1996), p.2242
(2) 戸谷眞之ほか3名, 機論, 60-578 A(1994), p.2266
(3) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., Vol.43(1990), p.1