

D 0 8 大きさの等しい多重層間はく離を有する積層円板の自由振動特性

Free Vibration Characteristics of Circular Laminated Plates Containing Multiple Delaminations of a Same Size

○学 師岡 優 (鹿児島大学) 正 有富 正男 (鹿児島大学)
 正 小田 美紀男 (鹿児島大学) 正 戸谷 眞之 (鹿児島大学)

Yuu MOROOKA, Masao ARITOMI, Mikio ODA and Masayuki TOYA

Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency

1. 緒言

本報では、異種材からなるN層の積層円板が、その中心部に大きさの等しい円形多重層間はく離を有する場合の自由振動を、面内変形の影響が無視できるものとして理論解析する。また、大きさの等しいはく離をもつ三層と四層の積層円板を製作して振動実験を行い、解析モデルの妥当性を検証している。

2. 理論解析

本報では、図1に示すようなN枚の異種材を接着した半径Rの積層円板が、各層間の円板中心に半径cの大きさの等しいN-1個の円形はく離を有する場合を考える。積層円板の上面から第1層、第2層、・・・とし、第k層の厚さを h_k 、縦弾性係数を E_k 、ポアソン比を ν_k 、密度を ρ_k 、伸び剛性と曲げ剛性を C_k, D_k 、板上面から第k層の中央面までの距離を H_k とする。

いま、板の上面から

$$\eta = \sum_{k=1}^N H_k C_k / \sum_{k=1}^N C_k \quad (1)$$

のところに基準面を設け、基準面から第k層の中央面までの距離を d_k とし、z方向の円環部分のたわみをw、はく離部分のたわみを w_k とする。

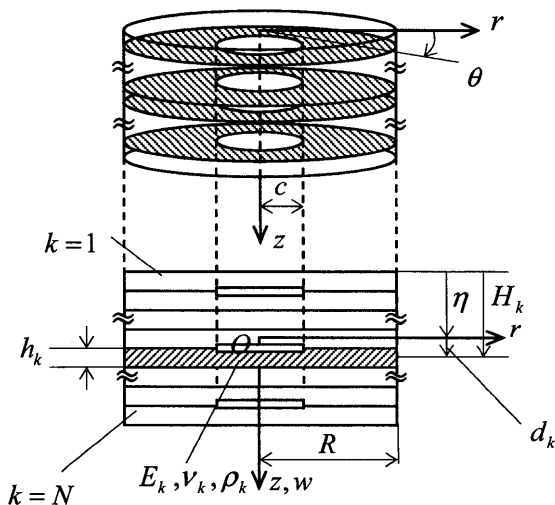


Fig.1 Geometry of a circular laminated plate containing multiple disk-shaped delaminations

次に座標 r, 時間 t, たわみ w, w_k および各諸量を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{w}, \bar{w}_k, \bar{h}_k) &= (w, w_k, h_k) / h, (\xi, \bar{c}) = (r, c) / R \\ (\bar{D}_{12}, \bar{D}_s, \bar{D}_{s12}, \bar{D}_k) &= (D_{12}, D_s, D_{s12}, D_k) / D \\ \bar{D} &= \frac{12(1-\nu_1^2)D}{E_1 h^3}, \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ \bar{\rho}_k &= \rho_k / \rho, \alpha_k = E_k / E_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のように無次元化する。また、以下のことを仮定する。

- (1) 積層板の基準面と単層板の中央面の面内伸縮の影響は、面外の曲げ変形に比べて小さく無視できる。
- (2) はく離部分の各層のたわみは等しい。

この二つの仮定の下で運動方程式を導き、それらの解に境界条件と連続条件を適用して一般の振動モードの自由振動を解析する。まず、円環部分の運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w} = 0 \quad \text{ただし} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

と簡単な式で表される。はく離部分は図2に示すようにはく離円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、ヒンジには単位長さ当たり $Z_k(t, \theta)$ の大きさの半径方向内力が作用するとする。また、振動中上下の板が接触すると、はく離界面に相互接触力 $q_k(r, \theta, t)$ が作用すると仮定する。はく離部分の各層の微小振幅の曲げ振動に対する運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \nabla^4 \bar{w}_1 + \bar{Z}_1 \nabla^2 \bar{w}_1 + \bar{q}_1 &= 0 \\ \bar{\rho}_k \bar{h}_k \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial \tau^2} + \bar{D}_k \nabla^4 \bar{w}_k + (\bar{Z}_k - \bar{Z}_{k-1}) \nabla^2 \bar{w}_k + (\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}) &= 0 \\ &(k=2, \dots, N-1) \\ \bar{\rho}_N \bar{h}_N \frac{\partial^2 \bar{w}_N}{\partial \tau^2} + \bar{D}_N \nabla^4 \bar{w}_N - \bar{Z}_{N-1} \nabla^2 \bar{w}_N - \bar{q}_{N-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

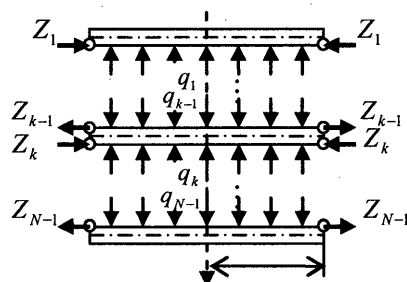


Fig.2 Inplane forces and normal pressures in the delamination region

と表される。ただし、

$$\bar{q}_k = q_k R^4 / (Dh), \quad \bar{Z}_k = Z_k R^2 / D \quad (5)$$

である。ここで、仮定 (2) の条件、すなわち $\bar{w}_k = \bar{w}_1$ ($k=2,3,\dots,N$) より、式 (4) を足し合わせると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 = 0 \quad (6)$$

のように非常に簡単となる。

円板は調和振動すると仮定し、たわみ \bar{w} , \bar{w}_1 , および面内力 \bar{Z}_k を、半径方向の接線の数 n を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(\xi, \theta, \tau) &= X(\xi) \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ \bar{w}_1(\xi, \theta, \tau) &= X_1(\xi) \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ \bar{Z}_k(\theta, \tau) &= \bar{Z}_{k0} \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおくと、運動方程式 (3) と (6) より $\xi=0$ で有界な解として

$$\left. \begin{aligned} X(\xi) &= A_1 J_n(\lambda \xi) + A_2 Y_n(\lambda \xi) + A_3 I_n(\lambda \xi) + A_4 K_n(\lambda \xi) \\ X_1(\xi) &= A_{11} J_n(\lambda_1 \xi) + A_{13} I_n(\lambda_1 \xi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし $\lambda_1 = \bar{p}, \lambda_1^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_s}$

が得られる。ここで、 \bar{p} は無次元固有角振動数、 J_n, Y_n は n 次の第 1 種、第 2 種の Bessel 関数、 I_n, K_n は n 次の第 1 種、第 2 種の変形 Bessel 関数である。また、面内力 \bar{Z}_k の大きさ \bar{Z}_{k0} は、はく離端間において上下の円板で互いに接している面の伸びが等しいという条件から求めることができる。

次に、境界条件と連続条件を円環部分とはく離部分の固有関数 X, X_1 を用いて表す。本報では周辺固定円板を取り上げるので、境界条件は

$$\xi = 1 \text{ で } X = 0, \frac{dX}{d\xi} = 0 \quad (9)$$

となる。また、はく離円周縁における連続条件は

$$\left. \begin{aligned} \xi = \bar{c} \text{ で } X_1 &= X, \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{dX}{d\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \bar{D}_{s12} \left(\frac{1}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_1 \right) &- \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{Z}_{k0}}{2} (\bar{h}_k + \bar{h}_{k+1}) \\ &= \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \bar{D}_{12} \left(\frac{1}{\xi} \frac{dX}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X \right) \\ \bar{D}_s \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_1) &= \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X) \quad \text{ただし } \nabla_d^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と表される。式 (10) の条件を、式 (8) の固有関数 X, X_1 に適用すると

$$[H][A] = \{0\}, \quad \text{ただし } \{A\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_{11}, A_{13}\}^T \quad (11)$$

であり、 $[H]$ は 6 行 6 列の正方マトリックスである。さらに、式 (11) から振動数方程式

$$|H| = 0 \quad (12)$$

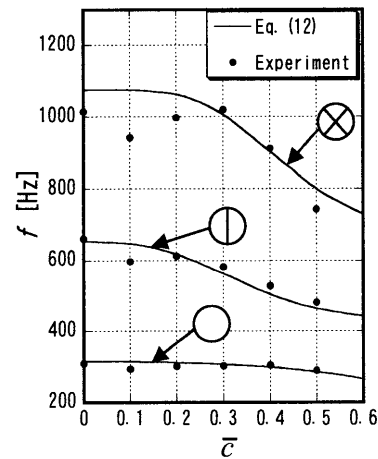
が得られる。

3. 実験と考察

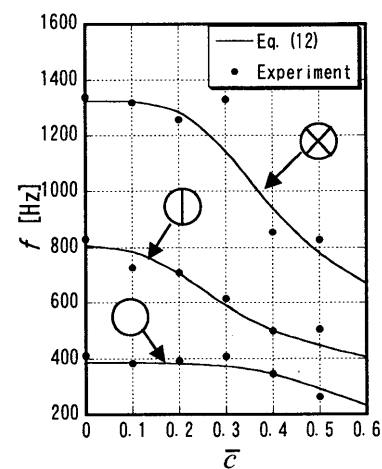
大きさの等しいはく離を有する三層と四層の積層円板を製作して、振動実験を行った。試験片は、外形寸法が 200mm の正方形の表 1 の板を、シアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。図 2 は縦軸に固有振動数 f [Hz], 横軸に無次元はく離半径 \bar{c} をとって示したものである。この図より、式 (12) から求められる理論結果が測定した固有振動数とよく一致することが確認できる。したがって、面内変形の影響を無視してはく離円周縁をヒンジ止めと仮定した解析モデルは、積層円板の自由振動特性に及ぼすはく離の影響を調査する場合には、簡単でしかも有効な方法といえる。

Table 1 Test-Piece

k	Plate 2	h_k [mm]	Plate 3	h_k [mm]
1	Steel	0.2	Steel	0.2
2	copper	0.6	copper	0.4
3	Aluminum	0.2	Aluminum	0.1
4			Steel	0.2



(a) Plate 1 (N=3)



(b) Plate 2 (N=4)

Fig. 2 Comparison between experimental and theoretical frequencies