

温度こう配下における積層はり端部はく離のエネルギー解放率*

戸谷 眞之^{*1}, 小田 美紀男^{*1}
ラック・インディヨノ^{*2}, 有 富 正 男^{*1}Energy Release Rate of an Edge Delamination
in a Laminated Beam Subjected to Thermal GradientMasayuki TOYA^{*3}, Mikio ODA,
Lalak INDIYONO and Masao ARITOMI^{*3} Kagoshima University, Dept. of Mechanical Engineering,
1-21-40, Korimoto, Kagoshima, Kagoshima, 890-0065 Japan

Energy release rate of an edge delamination of a laminated beam subject to a through-thickness temperature gradient is analyzed on the basis of the classical beam theory. Further, the decomposition of the energy release rate into mode I and mode II components is made by combining the analyses of the energy release rate of an interfacial crack by Toya (1992) and the two-dimensional linear beam solutions by Suo and Hutchinson (1990). The energy release rate is a quadric function of the temperatures at the top and the bottom surfaces of the layered beam and the mode of delamination growth changes from pure mode II to mixed mode type at the temperature difference at which energy release rate takes minimum value. Assuming several values of Bio number characterizing the heat flow across the delamination surfaces, numerical analyses based on the finite element method are carried out. It is shown that the theory agrees well with numerical analyses if the temperature jump across the crack faces is small (when Bio number is larger than 7).

Key Words: Delamination, Thermal Gradient, Energy Release Rate, Mixed Mode Fracture, Finite Element Analysis

1. 緒 言

構造用金属にセラミックをコーティングした材料はタービン等への応用が期待されているが、このような二層材料は温度こう配のもとにさらされることになり、発生する熱応力の大きさが問題となる。特に異材界面に初期はく離(界面クラック)が存在する場合には、はく離端は特異応力場となるので、初期はく離がどのような外部温度の条件下で拡大するかを把握することは重要である。

Brown および Erdogan⁽¹⁾, Martin-Moran ら⁽²⁾ は異なった二つの半無限体弾性体の接着面上の二次元界面クラックまたは円形界面クラックが、クラック面に垂直な温度こう配のもとにおかれる場合を研究した。Shindo と Atsumi⁽³⁾ は、界面に垂直に等間隔に並んだクラックを含む積層材料中の熱応力を解析した。実用的な積層構造要素のモデルとして、Toya ら⁽⁴⁾ は、端部にはく離を有する異種材二層はり、一様な温度変化を受ける際のエネルギー解放率の計算をはり理論を

基礎に行い、理論解が有限要素法解とよく一致することを確かめた。Hutchinson と Lu⁽⁵⁾ は、均質なはり内部の、熱的に絶縁されていないはく離が温度こう配下におかれる場合のエネルギー解放率を解析している。

本論文では、端部はく離を有する異種材積層はり、温度こう配下におかれるときのエネルギー解放率、およびそのモード I, II 成分を Suo と Hutchinson⁽⁶⁾ および Toya⁽⁷⁾ の結果をもとに解析する。理論解と有限要素法解を比較し、はく離の上下面の温度の不連続の程度が小さい場合には、理論解は十分な精度を有することが示される。

2. 解 析

2.1 温度こう配下における異種材積層はり 図 1 に示すような、端部はく離を有する二層はりが温度こう配下に置かれる場合を考える。上のはりの厚さを h_1 、ヤング率を E_1 、熱膨張係数を α_1 、熱伝導率を λ_1 、下のはりについてはそれぞれを、 h_2 , E_2 , α_2 , λ_2 とする。また、はりの長さは l 、はく離長さは c 、幅はともに b とする。基準温度(熱応力が零の温度)を 0°C とし、上のはりの上面は温度 $T_1[^\circ\text{C}]$ 、下のはりの下面は温度 $T_2[^\circ\text{C}]$ に保たれているとする。Hutchinson および Lu のモデル⁽⁵⁾ にならってはく離の上下の面での

* 原稿受付 1999年6月21日。

^{*1} 正員, 鹿児島大学工学部(〒890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。^{*2} 鹿児島大学大学院。

E-mail: toyamasa@mech.kagoshima-u.ac.jp

温度も一定値 T_A, T_B [°C] として与えられているとする。解析の簡単化のために、文献(5)と同様に断面 B を通して熱の出入りがないものと仮定する。このとき、接着部分およびはく離部分の上下の各はりには、厚さ方向に線形な温度こう配が生じる。周知のように均質はりでは線形な温度こう配によって応力は生じない⁽⁶⁾ から、温度 T_A, T_B の値にかかわらず BC 間のひずみエネルギーは零となる。すなわち、はく離のエネルギー解放率は、接着部分 AB 間のひずみエネルギーによってのみ定まる。それゆえ、はく離面上下の温度 T_A, T_B を、あらためて接着面における温度 T_0 と置き換えてもエネルギー解放率については同じ結果になることがわかる。この置き換えにより、上下の各はり内の温度分布は、はりの軸方向に均一な後出の式(4)で与えられることになり、以下の重ね合わせ法が適用できるようになる。このような置き換えがどのような条件下で実際に正当化しうるのかについては、3章の有限要素法による解析により調べる。

はり AC の変形の解析を図 2 に示すような二段階の仮想的な操作を想定して行う。温度 0°C で、はり AC を、厚さ dy の多数の薄いスライスに仮想的に分離した状態をもとに考える。図 1 に示すような温度条件下において(ただし、 $T_A = T_B = T_0$)各はりには温度差により伸びの違いが生じ、各はりは長さが異なった状態になる。第一段階として、すべてのはりの長さが等しくなるような垂直応力 $\sigma_0(y)$ を各スライスの両端に付加し [図 2(a)], この状態ではく離面 ($y=0, 0 \leq x \leq c$) を除いたすべての面で接着する。第二段階として、端面では外部応力が作用していないという条件を満足させるために応力 $\sigma_0(y)$ を取り除く [図 2(b)]。この操作は、はりの左端にモーメント M_3 、軸力 P_3 、はく離の上部のはりの右端にモーメント M_1 、軸力 P_1 、はく離の下部のはりの右端にそれぞれ M_2, P_2 を作用させることと同等であり [符号は図 2(b) に示される向きを正と定義する], 積層はりの温度こう配による変形はこれらのモーメント、軸力による変形と等価になる。

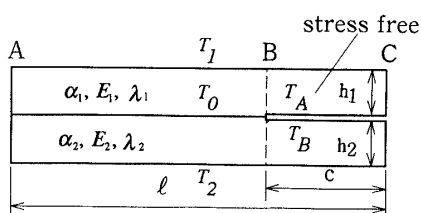


Fig. 1 Model of a laminated beam with an edge delamination subjected to temperature gradient

以下、上記の諸モーメントおよび軸力を求めよう。最初にはり中の温度分布を求める。上のはり ($y > 0$) および下のはり ($y < 0$) における y 方向に流れる熱流速をそれぞれ q_1, q_2 [W/m²] とすると

$$q_1 = -\lambda_1(T_1 - T_0)/h_1, \quad q_2 = -\lambda_2(T_0 - T_2)/h_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

条件 $q_1 = q_2$ より接着面(界面)温度 T_0 が以下のように求められる。

$$T_0 = (T_1 + \eta T_2)/(1 + \eta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし

$$\eta = (\lambda_2 h_1)/(\lambda_1 h_2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

したがって、温度分布は上下の各はりに対し、

$$T_{01}(y) = \frac{T_1 - T_0}{h_1} y + T_0, \quad (y > 0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$T_{02}(y) = \frac{T_0 - T_2}{h_2} y + T_0, \quad (y < 0)$$

となる。応力 $\sigma_0(y)$ のもとで各スライスの伸び Δ は各はりに対して

$$\Delta = \{\alpha_1 T_{01}(y) + \sigma_0(y)/E_1\} l, \quad (y > 0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\Delta = \{\alpha_2 T_{02}(y) + \sigma_0(y)/E_2\} l, \quad (y < 0)$$

ここで、条件

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_0(y) dy = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を満たす $\sigma_0(y)$ のもとで、式(5)で与えられる伸び Δ はすべてのスライスについて同一であると仮定すると、 Δ は以下のように与えられる。

$$\Delta = \frac{l}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \left\{ \frac{T_1 + T_0}{2} E_1 \alpha_1 h_1 + \frac{T_2 + T_0}{2} E_2 \alpha_2 h_2 \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を式(5)に代入すると $\sigma_0(y)$ が以下のように決定される。上のはり ($y > 0$) に対して、

$$\sigma_0(y) = -\frac{\alpha_1 E_1 (T_1 - T_0)}{h_1} y + E_U \quad \dots\dots\dots (8)$$

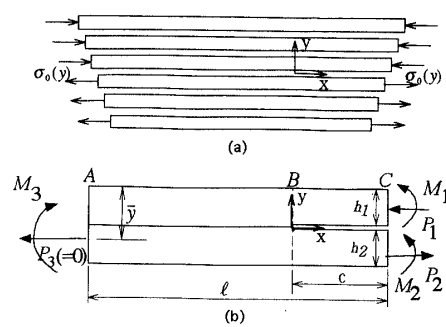


Fig. 2 Cut and paste procedure for analyzing thermal stress of a cracked laminated beam (\bar{y} is the distance of the neutral axis of the bonded part from the top surface)

ここで、

$$E_v = \frac{E_1}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \times \{ (T_1 - T_0) E_1 \alpha_1 h_1 - (T_0 \alpha_1 - T_2 \alpha_2) E_2 h_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) T_0 E_2 h_2 \} \dots\dots\dots (9)$$

また、下のはり ($y < 0$) に対して、

$$\sigma_0(y) = -\frac{\alpha_2 E_2 (T_0 - T_2)}{h_2} y + E_L \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$E_L = \frac{E_2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \times \{ -(T_0 - T_2) E_2 \alpha_2 h_2 + (T_1 \alpha_1 - T_0 \alpha_2) E_1 h_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) T_0 E_1 h_1 \} \dots\dots\dots (11)$$

次に、 $\sigma_0(y)$ を取り去ることにより生ずるはりの両端におけるモーメント M_1, M_3 , および軸力 P_1 を計算すると

$$M_1 = b \int_0^{h_1} \sigma_0(y) (y - h_1/2) dy = -\alpha_1 b E_1 h_1^2 (T_1 - T_0) / 12 \dots\dots\dots (12)$$

$$M_3 = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_0(y) \{ y + (\bar{y} - h_1) \} dy = b \int_{-h_2}^0 \sigma_0(y) y dy + b \int_0^{h_1} \sigma_0(y) y dy = -\frac{b}{6} [\{ 2\alpha_1 E_1 (T_1 - T_0) - 3E_v \} h_1^2 + \{ 2\alpha_2 E_2 (T_0 - T_2) + 3E_L \} h_2^2] \dots\dots\dots (13)$$

$$P_1 = P_2 = b \int_0^{h_1} \sigma_0(y) dy = -\frac{h_1 b}{2} [\alpha_1 E_1 (T_1 - T_0) - 2E_v] \dots\dots\dots (14)$$

となる。軸力 P_3 は $\sigma_0(y)$ の定義により零である。このように、図1の熱応力を求める問題は、図2(b)の外部負荷を受ける積層はりの問題に帰着される。

2・2 エネルギー解放率およびそのモード I とモード II 成分

はく離進展の規準を研究する際には、全エネルギー解放率のみならず、そのモード I およびモード II 成分を知ることが重要である。このためには、はく離(界面クラック)端近傍での応力と変形の解析が必要となる。はく離端近傍の接着面上の特異応力場は、Malyshev ら⁽⁹⁾ の定義による複素応力拡大係数 $K = K_I + iK_{II}$ により以下のように与えられる。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = K(r/h_1)^{\epsilon} / (2\pi r)^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 σ_y, τ_{xy} は接着面上の垂直応力、およびせん断応力、 r ははく離端からはかった微小距離であり、また

$$\epsilon = (1/2\pi) \ln [(1 - \beta^*) / (1 + \beta^*)] \dots\dots\dots (16)$$

β^* は Dundurs の二つのパラメータの内の一つで

$$\beta^* = \frac{\Gamma(\kappa_2 - 1) - (\kappa_1 - 1)}{\Gamma(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)} \dots\dots\dots (17)$$

添字 1 と 2 は、それぞれ上下のはりに関する量を示し、平面応力の場合は $\kappa_i = (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i)$, 平面ひずみの場合は $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ ($i=1, 2$) である。また、 ν_i はポアソン比、 $\Gamma = \mu_1 / \mu_2$ で、 μ_i ($i=1, 2$) はせん断弾性係数を表す。

クラックの上下の面の相対変位の y 方向成分は次式で与えられる。

$$v = m \left[(K_I + 2\epsilon K_{II}) \cos \left(\epsilon \ln \frac{r}{2h_1} \right) - (K_{II} - 2\epsilon K_I) \sin \left(\epsilon \ln \frac{r}{2h_1} \right) \right] \sqrt{r} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$m = [(\kappa_1 + 1) / \mu_1 + (\kappa_2 + 1) / \mu_2] / [2\sqrt{2\pi} (1 + 4\epsilon^2) \times \cosh(\pi\epsilon)] \dots\dots\dots (19)$$

もし v が負であれば実際には接触していることになるので、純粋モード II によるクラック進展を意味し、また正であれば、この場合は混合モード進展を意味する。

さて、図2(b) [式(12)~(14)] で与えられる我々の問題に立ち返って、 K_I, K_{II} およびエネルギー解放率とそのモード I, II 成分を計算しよう。Suo および Hutchinson⁽⁶⁾ は図2(b)に示すような一般の負荷を受ける積層はりの中の界面クラックについて、 K_I, K_{II} およびエネルギー解放率を与える一般的な公式を導いた。彼らの結果は以下のように与えられる。

$$K_I = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_1}} \cos \omega + \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \sin(\omega + \gamma) \right] \dots\dots\dots (20)$$

$$K_{II} = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_1}} \sin \omega - \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \cos(\omega + \gamma) \right] \dots\dots\dots (21)$$

ここで、

$$P_0 = P_1 - C_1 P_3 - C_2 M_3 / h_1 \dots\dots\dots (22)$$

$$M_0 = M_1 - C_3 M_3 \dots\dots\dots (23)$$

定数 p, A_0, I, γ および C_i ($i=1, 2, 3$) は以下に与えられる定数である。

$$p = \sqrt{\frac{1 - \alpha^*}{1 - \beta^{*2}}}, \quad \alpha^* = \frac{\Gamma(\kappa_2 + 1) - (\kappa_1 + 1)}{\Gamma(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)} \dots\dots\dots (24)$$

α^* は Dundurs のパラメータである。さらに、平面応力条件に対して、

$$A_0 = \frac{D_0 D_2}{b E_1 h_1 (D' - D_1)}, \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{(D' - D) D_1}{(D' - D_1) D}} \\ I = D_2 / (12D), \quad C_1 = D_0 / (b E_2 h_2) \dots\dots\dots (25)$$

$$C_2 = h_1 h D_0 / (2D'), \quad C_3 = D_1 / D', \quad D = D_1 + D_2$$

ここで、 $D_1 = E_1 I_1, D_2 = E_2 I_2$ [$I_j = b h_j^3 / 12$ ($j=1, 2$)] は上下の各はりの曲げ剛性である。 D' は積層はりの

曲げ剛性で、

$$D' = D_1 + D_2 + h^2 D_0 / 4 \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

$$D_0 = b / [(E_1 h_1)^{-1} + (E_2 h_2)^{-1}], \quad h = h_1 + h_2 \dots\dots\dots (27)$$

また ω は比 h_1/h_2 および Dundurs のパラメータ α^* および β^* にのみ依存する角度であり、文献(6)の表に与えられている。我々の問題 [図2(b)] に関しては、 $P_3=0$ 、および式(12)~(14)で与えられる M_1, M_3, P_1 を式(22), (23)に用いることによりただちに K_I, K_{II} が得られる。

また、エネルギー解放率 G は次式で与えられる。

$$G = \left(\frac{\mu_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\mu_2 + 1}{\mu_2} \right) (K_I^2 + K_{II}^2) / [16 \cosh^2(\pi\epsilon)] \dots\dots\dots (28)$$

実際には、エネルギー解放率を式(28)を用いて計算するのは、大変面倒である。前述のように、本論文の問題においては、はりのひずみエネルギーは接着部分 AB 間のみを考えればよい。そこで、以下ではこのことを利用してエネルギー解放率を計算する。図2(a)の操作による垂直応力に起因するひずみエネルギーを計算する。上のはりについて、単位体積当たりのひずみエネルギーは、 $u_1 = \sigma_0^2(y) / (2E_1)$ であるから、上のはりの単位長さ当たりのひずみエネルギー U_U は

$$U_U = b \int_0^{h_1} u_1 dy = \frac{b}{2E_1} \left[E_U^2 h_1 - E_U \alpha_1 E_1 (T_1 - T_0) h_1 + \frac{\alpha_1^2 E_1^2 (T_1 - T_0)^2 h_1}{3} \right] \dots\dots\dots (29)$$

同様に、下のはりの単位長さ当たりのひずみエネルギーは、

$$U_L = b \int_{-h_2}^0 u_2 dy = \frac{b}{2E_2} \left[E_L^2 h_2 - E_L \alpha_2 E_2 (T_0 - T_2) h_2 + \frac{\alpha_2^2 E_2^2 (T_0 - T_2)^2 h_2}{3} \right] \dots\dots\dots (30)$$

次に、図2(b)の操作により接着部分 AB において解放される単位長さ当たりのひずみエネルギーは、

$$U_{M_3} = M_3^2 / (2D') \dots\dots\dots (31)$$

結局、接着部分のはりの単位長さ当たりのひずみエネルギーは、 $U_U + U_L - U_{M_3}$ であり、これをはりの幅 b で割ることによりエネルギー解放率が得られる。温度 T_1, T_2 で整理すると、エネルギー解放率は次のようになる。

$$G = \frac{1}{24(1+\eta)^2 SH} (T_1 - T_2)^2 Q$$

$$+ \frac{E_1 E_2 h_1 h_2}{8SH} (T_1 - T_2) (f_1 T_1 - f_2 T_2) + G_0 \dots\dots\dots (32)$$

ここで G_0 は一様な温度変化 ($T_1 = T_2$) の際のエネルギー解放率を表す。

$$G_0 = \frac{E_1 E_2 h_1 h_2}{2H} T_1 T_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3) \dots\dots\dots (33)$$

Q, S, H, f_1, f_2 は温度を含まない定数であり、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} Q &= SH(\eta^2 \alpha_1^2 E_1 h_1 + \alpha_2^2 E_2 h_2) - R^2 \\ S &= E_1 h_1 + E_2 h_2 \\ H &= 12D'S/b \\ R &= \eta \alpha_1 E_1^2 h_1^3 + 4\eta \alpha_1 E_1 E_2 h_1^2 h_2 + 4\alpha_2 E_1 E_2 h_1 h_2^2 + \alpha_2 E_2^2 h_2^3 \\ f_1 &= [H\{(2+\eta)\alpha_1 - \alpha_2\}^2 - 3E_1 E_2 h_1 h_2 (2\alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_1 + 2\alpha_1 h_2 - 2\alpha_2 h_2 + \eta \alpha_1 h_2)^2 - 2R h_1 (4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \eta \alpha_1)] / (1+\eta)^2 \\ f_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, E_1, E_2, h_1, h_2, \eta) \\ &= f_1(\alpha_2, \alpha_1, E_2, E_1, h_2, h_1, 1/\eta) \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

エネルギー解放率 G は T_1, T_2 の2次式であり、全長 l 、はく離長さ c には依存しないことがわかる。また、熱伝導率の影響は、パラメータ η のみを通して入ってくる。

一方、はく離の微小進展 Δa に際し解放されるエネルギーのモード成分は Toya⁽⁷⁾ により計算された。モード I とモード II の各成分は以下のように与えられる。

$$G_I^4 = (G/2) [1 + F(\epsilon) \cos(2\epsilon a' + \varphi(\epsilon) + \theta_0)] \Delta a \dots\dots\dots (35)$$

$$G_{II}^4 = (G/2) [1 - F(\epsilon) \cos(2\epsilon a' + \varphi(\epsilon) + \theta_0)] \Delta a \dots\dots\dots (36)$$

ここで

$$F(\epsilon) = \left[\frac{\sinh(2\pi\epsilon)}{2\pi\epsilon(1+4\epsilon^2)} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (37)$$

$$a' = \ln[\Delta a / 2h_1] \dots\dots\dots (38)$$

$$\varphi(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tan^{-1} \frac{\epsilon}{1+n} - \tan^{-1} \frac{\epsilon}{1/2+n} \right) \dots\dots\dots (39)$$

$$\theta_0 = \begin{cases} \tan^{-1}[(1-k^2+4\epsilon k)/k_0], & k_0 > 0 \\ \tan^{-1}[(1-k^2+4\epsilon k)/k_0] + \pi, & k_0 \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (40)$$

$$k = K_{II}/K_I, \quad k_0 = 2[k + \epsilon(k^2 - 1)] \dots\dots\dots (41)$$

$\varphi(\epsilon)$ の値はすでに計算されて表にまとめられており、特に $|\epsilon| < 0.05$ の範囲では近似的に $\varphi(\epsilon) = -1.3863\epsilon$ となる。式(31), (32)および式(34)から明らかなように、従来のエネルギー解放率の定義 $\lim_{\Delta a \rightarrow 0} G_I^4 / \Delta a$ 等に

従ってはく離のエネルギー解放率の成分を定義しようとしても、極限值が存在しないので不可能である。それゆえ、界面クラックのエネルギー解放率の各成分は有限な進展距離 Δa に対して

$$G_I \equiv G_I^d / \Delta a, \quad G_{II} \equiv G_{II}^d / \Delta a \quad \dots\dots\dots (42)$$

として定義する必要がある。式(35), (36)および式(40), (41)からわかるように、 G_I , G_{II} は応力拡大係数の比 k が与えられると任意の有限な進展距離 Δa に対して決定されることになる。

このように、与えられた積層はりに対し、理論的に式(32)よりエネルギー解放率が、また式(35), (36), (42)より、[文献(7)の表を参照し] エネルギー解放率の各モード成分が求められることになる。

2.3 ビオ数 本来のモデル(図1)においては、上下のはりの温度分布は式(4)の T_0 をそれぞれ T_A , T_B で置き換えた式で与えられ、はく離の上下面で $T_A - T_B$ の温度ギャップがあった。断面Bを通して熱の出入りがないという近似に基づくかぎり、理論的には、エネルギー解放率はこの温度ギャップには無関係となった。3章では、有限要素法によりこの結果の妥当性を検証するが、ここで、温度の不連続の程度を表す便利なパラメータとしてビオ数を導入しておこう⁽⁶⁾。はく離面の空気層を伝わる熱流速を q_c [W/m²] として、 h_c をクラック面間の熱伝導を特徴づける定数とする

$$q_c = h_c(T_B - T_A) \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここで、 $q_1 = q_2 = q_c$ として、 T_A , T_B を求めると、

$$T_A = \frac{T_1(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$T_B = \frac{T_2(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad \dots\dots\dots (45)$$

ただし、

$$B_c = \frac{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}{\lambda_1 \lambda_2} h_c \quad \dots\dots\dots (46)$$

B_c はビオ数で、き裂表面の熱の流れを支配する無次元数である⁽⁶⁾。 $B_c = 0$ のとき、クラックは完全に絶縁され、 $T_A = T_1$, $T_B = T_2$ となる。 $B_c = \infty$ のとき、クラックによる熱の流れの妨害がなく、 $T_A = T_B$ となる。

3. 有限要素法(FEM)による解析

本章では有限要素法により、エネルギー解放率およびそのモード I および II 成分を求める。

はりの全長は $l = 100$ mm、はく離長さはひとつの計算例(図7)を除いては $c = 30$ mm と固定した。はりの厚さは h_1 , h_2 ともに 2~4 mm とした。

使用したプログラムは大草⁽¹⁰⁾の開発したもので、

はく離面が滑らかに接触する場合を扱うことができ。これに、我々が開発した熱荷重のプログラムを加え、さらに異種積層はりに対応するように改良した。要素としては三角形要素を用い、基本要素として底辺が 0.5 mm のサイズをもとに、図3に示す分割を行った。はく離端近傍でのメッシュ幅(はく離微小進展距離に対応する)は $\Delta a = 0.125$ mm とした。はりの上面を温度 T_1 、下面を T_2 、ビオ数をいくつか選んで式(44), (45)より計算されるはく離の上下面の温度 T_A , T_B なる熱負荷を加える。温度は $T_2 = 0^\circ\text{C}$, 250°C , 500°C の三とおりに設定し、それぞれ $T_1 - T_2$ の値が 0°C から最大で $\pm 1000^\circ\text{C}$ となるように T_1 を変化させた。はりの支持条件は図示のものとし、また、両側面では、断熱されているものとした。

最初は、はく離間には接触がないものとして計算し、クラック近傍の y 方向相対変位の符号をチェックする。相対変位が $v < 0$ となった場合、今度ははく離に対して全面接触(y 方向相対変位は零)という条件で再計算する。次にこの結果、はく離面に接触力が負である節点が出てくるときは、その節点での節点力は零と設定して再計算し、再びはく離面上での他の節点での接触力の符号を調べる。この過程を繰返し、はく離端に隣接する相対する2節点間の相対変位の x , y 方向成分を求めた。これにローカルコンプライアンス法を適用することにより、エネルギー解放率のモード I およびモード II 成分を計算した⁽¹¹⁾。全エネルギー解放率は各成分の和として得られる。

用いたモデル材料 [アルミナ (Al_2O_3)、チタン合金、

Table 1 Mechanical and thermal properties of model materials

Material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Coefficient of thermal expansion $\times 10^{-6}$ ($^\circ\text{C}$)	Thermal conductivity (W/cm $^\circ\text{C}$)
Alumina (Al_2O_3)	200.0	0.25	8.00	0.20
Titanium alloy	111.0	0.32	8.90	0.071
Pyrex glass	65.46	0.20	3.25	0.009

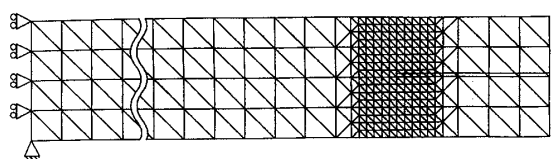


Fig. 3 Schematic diagram of the mesh division

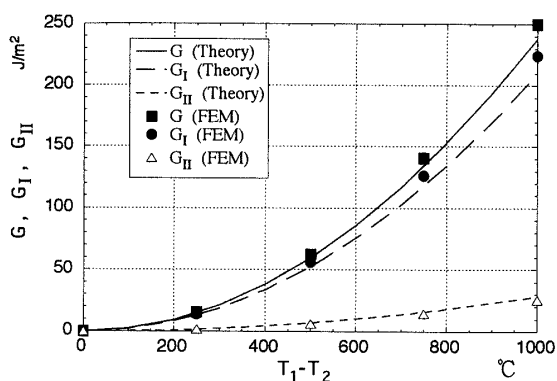
パイレックスガラス]の弾性係数およびポアソン比, 熱膨張係数, 熱伝導率を表1に示す。以下, アルミナとパイレックスガラスの積層はり等について計算するが, これは理論の精度の検証を目的としており, 必ずしも実際の応用を念頭に入れたものではない。なお, 温度によって材料定数は変化しないものと仮定する。

理論計算において, ω の値は, 文献(6)の表より, アルミナ/チタン合金はりに対しては $\omega=51.7^\circ$, アルミナ/パイレックスガラスに対しては $\omega=44.1^\circ$ となる。これらの値を式(20), (21)に代入して K_I, K_{II} を計算し, はく離端から $\Delta a=0.125$ mmの距離の垂直方向の相対変位 v [式(18)]の正負をチェックする。 v が正のときには式(42)より $\Delta a=0.125$ mmとしたときの G_I, G_{II} の理論値を計算した。負のときには G_{II} は全エネルギー解放率 G に等しい。

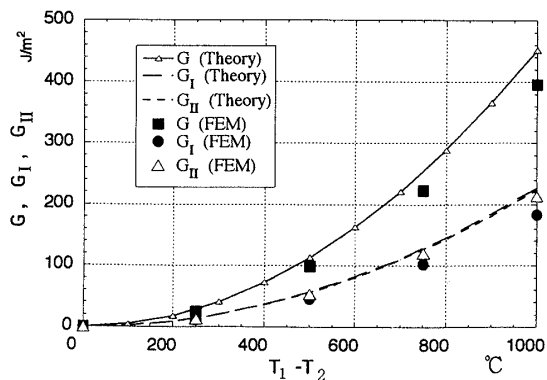
図4および図5にビオ数が ∞ の場合について, それぞれ $T_2=0^\circ\text{C}$, および $T_2=500^\circ\text{C}$ と設定したときの, 温度差に対するエネルギー解放率とそのモードI, モードII成分の理論値とFEM解との比較を示した。材料としては, アルミナ/チタン合金(厚さ $h_1=h_2=4$

mm), およびアルミナ/パイレックスガラス($h_1=h_2=2$ mm)の積層はりを仮定している。

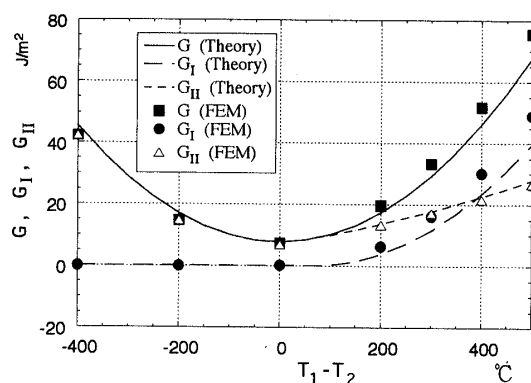
図4, 5において理論解と有限要素法による数値解は約10%以内の誤差で一致している。すなわち, ビオ数が ∞ ($T_A=T_B$)のときには理論解は有効であることが確かめられる。 $T_2=0^\circ\text{C}$ のときエネルギー解放率は T_1-T_2 の二乗に比例して増加し, 理論の予測どおり最小値は $T_1-T_2=0^\circ\text{C}$ のとき零となる。 $T_2=500^\circ\text{C}$ のときには, $T_1-T_2=0^\circ\text{C}$ は 500°C の様な温



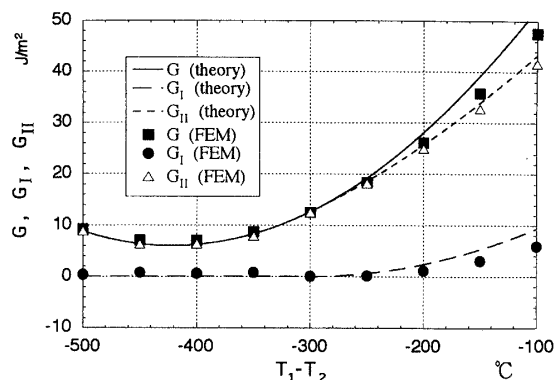
(a) Alumina/titanium alloy, $B_c=\infty$, $T_2=0^\circ\text{C}$



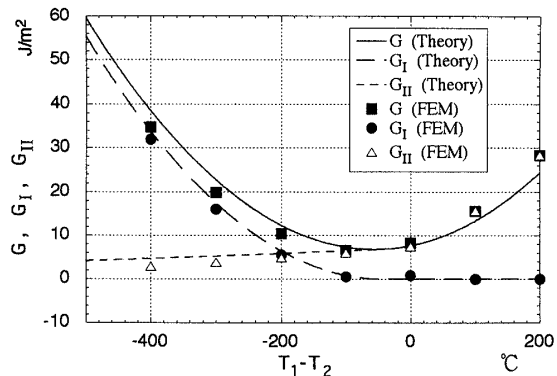
(b) Alumina/pyrex glass, $B_c=\infty$, $T_2=0^\circ\text{C}$



(a) Alumina/titanium alloy, $B_c=\infty$, $T_2=500^\circ\text{C}$



(b) Alumina/pyrex glass, $B_c=\infty$, $T_2=500^\circ\text{C}$



(c) Titanium alloy/alumina, $B_c=\infty$, $T_2=500^\circ\text{C}$

Fig. 4 Variation of energy release rate and its components with temperature difference for the case of $T_2=0^\circ\text{C}$

Fig. 5 Variation of energy release rate and its components with temperature difference for the case of $T_2=500^\circ\text{C}$

度変化を意味するから、このときのエネルギー解放率は零にはならず [式(33)], また最小値をとる $T_1 - T_2$ 値も一般には零ではない。ただ、アルミナ/チタン合金の組合わせは、熱膨張係数がほぼ等しく、式(32)~(34)から確かめられるように、 $T_1 - T_2 = 0^\circ\text{C}$ に近いところで最小値を取っている [図5(a)].

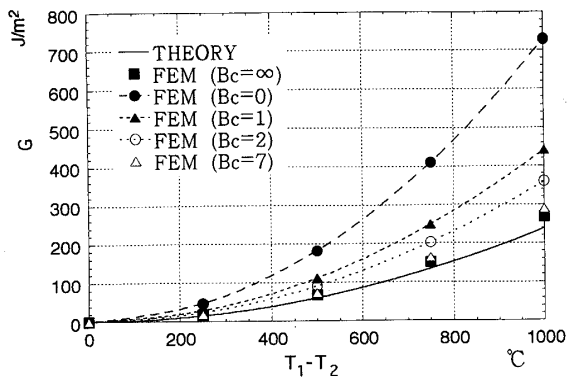
図4(a), (b)において確かめられるが、比 G_I/G_{II} は $T_2 = 0^\circ\text{C}$ のときは温度差に関係なく一定であるが、 $T_2 = 500^\circ\text{C}$ の場合(図5)は、比 G_I/G_{II} は $T_1 - T_2$ の

値によって変化する。

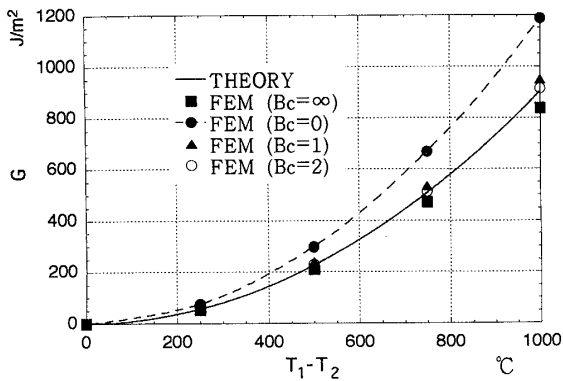
また図5(a)~(c)より、エネルギー解放率のモードI成分およびモードII成分は、最小値を境に混合モードではく離を生じる場合とモードIIではく離とに分かれることがわかる。この進展モードの変化は式(18)の ν の符号の変化によっても裏付けられ、したがって式(18)はモード予測に対し有効であることが確かめられる。

図6(a)~(c)はビオ数のエネルギー解放率におよぼす影響を示す。いずれの場合でもビオ数が小さいほど、エネルギー解放率は $B_c = \infty$ のときに比べて大きな値を示している。図6(a)のアルミナ/チタン合金の組合せでは、ビオ数が7のときには理論値および数値解はほぼ一致する。アルミナ/パイレックスガラスに対しては、 $T_1 = 0^\circ\text{C}$ でビオ数が2のとき数値解は理論値とほぼ一致する [図6(b)]. しかし、同じ材料の組合せに対し、 $T_2 = 500^\circ\text{C}$ のときのエネルギー解放率はビオ数により大きく変動している [図6(c)]. このケースでは、ビオ数が7以上の場合に理論値と数値解の誤差は15%以内であり、解析は有効であるといえよう。結局、ビオ数は同じでも、 T_2 の値によって理論の精度は変動するので、一般にあるビオ数以上で理論は有効、という結論の述べ方はできない。しかし、今回我々が調べた材料に限っては、ビオ数が7以上のときに理論は有効であるといえる。

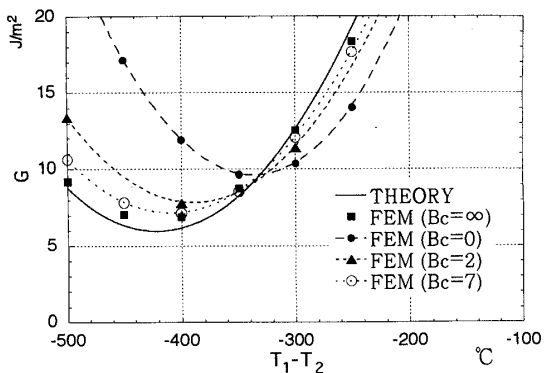
Suo と Hutchinson⁽⁶⁾ の理論ははりを対象にしているので、現理論の適用範囲は、はく離長さが上下の厚さよりある程度大きいときに限定されることが予想される。図7は、はく離長さ c によるエネルギー解放率の変化を示す。材料はアルミナ/パイレックスガラスとし、 $T_1 = 250^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$, $h_1 = h_2 = 4\text{ mm}$ とした。図7より $c > 0.75h_1(h_2)$ なる条件を満たす場合



(a) Alumina/titanium alloy, $T_2 = 0^\circ\text{C}$



(b) Alumina/pyrex glass, $T_2 = 0^\circ\text{C}$



(c) Alumina/pyrex glass, $T_2 = 500^\circ\text{C}$

Fig. 6 Effect of Bio number on the relation between energy release rate and temperature difference

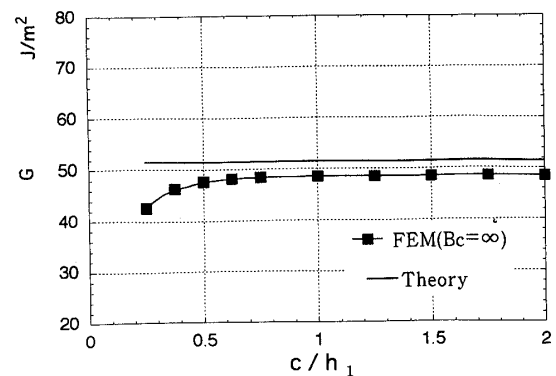


Fig. 7 Variation of energy release rate with the length of delamination: Alumina/pyrex glass, $T_1 - T_2 = 250^\circ\text{C}$

には、理論解どおり一定の値となり正確さが期待できることがわかる。このことは、HutchinsonとLu⁽⁶⁾の予想と合致している。

4. 結 論

熱負荷を受ける異種材積層はりの端部はく離について解析を行った。はり理論と、SuoとHutchinson⁽⁶⁾およびToya⁽⁷⁾の解析を適用して、エネルギー解放率、およびそのモードI, II成分の理論解を得、有限要素法解と比較した。エネルギー解放率は、はりの上下面における温度の二次関数である。理論解は、はく離長さが上のはりの厚さと同程度以上のとき、かつビオ数が $B_c = \infty$ の場合(はく離上下面の温度ギャップがない場合)にはFEM解とよく一致する。

上記の条件下で、上下どちらかの温度が 0°C のときは、比 G_I/G_{II} は、はりの上下の温度差に関係なく一定であるが、一般には温度差によって変化する。また、FEM解析により、エネルギー解放率の最小値を境に混合モードで進展する場合と、モードIIで進展する場合とに分かれることが確かめられたが、このことは理論による予測と一致している。最後に、はく離面上下に温度の不連続がある場合のFEM解析を行ったが、不連続量が小さいとき(一般にはビオ数が7以上のとき)理論解とFEM解の相対誤差は15%以内であることがわかった。したがって、本論文における理論解は、

はく離進展がモードIIで起きる場合にとりわけ有効であるといえよう。

最後に、本研究は文部省科学研究費補助金[基盤研究C(2)09650110]の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。また、計算および図の作製を手伝っていただいた前田義和技官、大学院生、竹添光広君、門亜紀子さんに謝意を表す。

文 献

- (1) Brown, E. J. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, **6** (1968), 517-529.
- (2) Martin-Moran, C. J., Barber, J. R. and Comninou, M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 29-36.
- (3) Shindo, Y. and Atsumi, A., *Int. J. Eng. Sci.*, **13** (1975), 25-42.
- (4) Toya, M., Miyawaki, T. and Kirioka, K. (Hashiguchi, T. 編), *Proc. 18th Int. Symp. on Space Tech. and Sci.*, (1992), 527-534.
- (5) Hutchinson, J. W. and Lu, T. J., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **117** (1995), 386-390.
- (6) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Fract.*, **43** (1990), 1-18.
- (7) Toya, M., *Int. J. Fract.*, **56** (1992), 345-352.
- (8) 例えば、村上敬宣, 弾性力学, (1985), 151, 養賢堂.
- (9) Malyshev, B. M. and Salganik, R. L., *Int. J. Fract. Mech.*, **1** (1965), 114-128.
- (10) 大草克巳, 鹿児島大学農学部演習林報告, **11** (1983), 1-20.
- (11) Rybicki, E. F. and Kanninen, M. F., *Eng. Fract. Mech.*, **9** (1977), 931-938.