日本機械学会論文集(A 編)
71 巻 702 号(2005-2)

論文 No. 03-0319

温度こう配下における異種材積層円板中の円形はく離*
(第1報, 問題の定式化とはく離面の接触を仮定したモデルの解析)

深川和良*1, 有冨正男*2, 戸谷眞之*2

A Disc-Shaped Interface Crack in a Laminated Plate Subject to Thermal Gradient
(1st Report, Formulation of the Problem and the Analysis of the Model Assuming the Contact of Crack Faces)

Kazuyoshi FUKAGAWA*3, Masao ARITOMI and Masayuki TOYA

*3 Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,
1-21-40 Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

Symmetrical bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped delamination subject to thermal gradients is analyzed on the basis of the theory of small deflection of plates. General equations for the axisymmetrical bending of a bilayer plate are derived. A disc-shaped crack model assuming the contact of the two crack faces is then considered. Radial in-plane forces induced by bending in the parts of the plate above and below the delamination are determined by modeling the cracked part as two lapped discs hinged at both rims. If there is no temperature gap between the two faces of the crack, then the plate is bent to a spherical cap whose curvature is independent of the radius of the crack, so that the energy release rate is identically zero. The condition for the contact of crack faces is also discussed. It is concluded that the model assuming that the deflections of the plates upper and lower to the crack are different have to be considered to get more precise insight for the crack growth behavior.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Construction, Disc-Shaped Interface Crack, Energy Release Rate, Thermal Stress

1. 緒言

近年，耐熱材料または耐摩耗材料として，金属板にセラミックをコーティングした積層材料が注目されている．このような異種材料を組み合わせて作られる材料では，接合残留応力や熱応力に起因する接着面(界面)のはく離が，材料の信頼性に関る重要な問題となる．破壊力学の観点からは，積層材料を使用するにあたっては，あらかじめはく離(界面クラック)の存在を想定し，それがいかなる条件のもとで進展するかを把握しておくことが不可欠である．このことを反映して積層材料の界面はく離の進展に関し多くの理論及び実験的研究がなされてきた(1)(2)．

著者らは，材端に初期はく離を有する異種材積層はりが一様な温度変化を受ける場合のエネルギー解放率を，材料力学のはり理論に基づいて計算し，簡単な公式を得，これが有限要素法による数値解と良く一致することを確かめた(3)．HutchinsonおよびLu(4)は，均質直交異方性積層はりの内部はく離が温度こう配のもとに置かれるときのエネルギー解放率を導いている．同じく温度こう配下における材端はく離の進展の研究は，最近著者らによりなされた(5)．Saitohら(6)は実際のLSIパッケージの温度サイクル下におけるはく離について，数種類の初期界面はく離を仮定し，その進展プロセスを有限要素法により解析した．

以上の研究ははりを対象にしている．実用上重要な積層板中のはく離の研究は，円形はく離が半径方向圧縮力により座屈を起こす現象を解析した例はあるものの(7)，これらを除いては十分とはいえない．特に，はく離を含む積層板の熱応力による曲げの解析例は，きわめて少ない．戸谷ら(8)は以前，一様な温度変化を受ける積層円板中の円形はく離の座屈を解析したが，そこでは重ね合わせの原理（カットアンドペースト法）を，非線形現象である座屈に適用するという，基本的な誤りがあった．熱応力による座屈の解析は，熱膨張によるひずみの効果を考慮した曲げの基礎式に基づいて行わなければならない．

* 原稿受付　2003年3月20日．
*1 正員，鹿児島大学大学院理工学研究科(〒890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)[現：熊本県工業技術センター生産技術部(〒862-0901 熊本市東町3-11-38)]．
*2 正員，鹿児島大学工学部．
E-mail : fukagawa@kmt-iri.go.jp

本研究では，前報[8]の一様な温度変化を仮定した取扱いを，温度こう配下における積層円板に拡張し，微小たわみの板曲げ理論に基づき熱応力による板の変形，及びはく離のエネルギー解放率を解析する．本報（第１報）では，２層からなる積層板の曲げの基礎式を導き，これに基づいてはく離面が全面接触しているモデルを解析する．第２報でははく離の上下面が接触していないモデルについて解析する．特に温度こう配および一様な温度変化によるはく離部分の座屈現象の解析について焦点を合わせる．なお，前報[8]における誤りの全面的な訂正は第２報においてなされる．

2． 基礎方程式

図１に示すような中央に円形はく離を有する，材質の異なった２枚の弾性円板をはり合わせて作られた積層円板を考える．等方弾性体を仮定し，ヤング率，ポアソン比，熱膨張係数，熱伝導率，板厚を上の板についてはE_1，ν_1，α_1，κ_1，h_1，下の板についてはE_2，ν_2，α_2，κ_2，h_2とする．また，円板の半径をa，円形はく離の半径をbとする．円板が一様な温度 0℃のもとにあるときを基準にとり，このとき板中の応力は0であるものとする．このような円板に対し，上板上面に一定温度T_1，下板下面にT_2を与えた場合，仮に$\alpha_1>\alpha_2$，$T_1>T_2$とすると，図１に示すような上向きに凸となるような軸対称のたわみが生じると考えられる．

また，図１のような変形が生じた場合き裂部分に空気層が生じるから，この部分の熱の伝達を考慮すると，一般にはき裂の上面と下面では温度ギャップが生じるであろう．簡単のため，き裂の上面温度を場所にはよらない一定値T_A，き裂の下面温度をT_Bと置く[4]．温度ギャップはき裂表面の熱の流れを支配する無次元数B_c(ビオ数)によって表すことができる．B_cの定義，およびT_A，T_BをT_1，T_2で表した式[4]を付録Ａの式(54)に示す．B_c=0はき裂が完全に熱的に絶縁された状態に対応し，このとき$T_A=T_1$，$T_B=T_2$となる．また$B_c=\infty$は空気層による熱の流れの妨害がない状態に対応し，$T_A=T_B=T_0$（接着板の界面温度）となる．

最初に，軸対称変形に対する積層円板の平衡方程式を導く．図２に示すような，半径$r=r$，$r+dr$，偏角$\theta=\theta$，$\theta+d\theta$によって切り取られた微小扇形板要素の力とモーメントの釣合いを考える．ここでηは円板上面から測った基準面までの距離であり，後に定義される．作用面の単位長さ当たりの面内力N_r，N_θ，せん断力Q_r，基準面に関するモーメントM_r，M_θが図２のように作用する．軸対称変形においては，面内のせん断応力$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta z}$は０である．このことを考慮して，r軸方向の力の釣合いを考えると

$$N_r + r\frac{dN_r}{dr} = N_\theta \quad \cdots(1)$$

また，θ軸回りのモーメントの釣合いより

$$Q_r = \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{dM_r}{dr} \quad \cdots(2)$$

最後にz軸方向の力の釣合い条件は

$$q(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(Q_r r) \quad \cdots(3)$$

ここで$q(r)$は板面にz軸の負の方向に作用する分布力である．

円環部分において，基準面のr方向変位をu_0，z方向のたわみをwとする．基準面を$z=0$とすると，基準面からの距離zに位置する面におけるr方向ひずみε_r，及び円周方向ひずみε_θは微小たわみを仮定すると次式のように表せられる．

$$\varepsilon_r = \frac{du_0}{dr} - z\frac{d^2w}{dr^2} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r} - \frac{z}{r}\frac{dw}{dr} \quad \cdots(4)$$

応力に関係するひずみをε'_r，ε'_θとすると，これらは式(4)から温度変化によるひずみを除くことにより次式で与えられる．

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r - \alpha T_z \quad , \quad \varepsilon'_\theta = \varepsilon_\theta - \alpha T_z \quad \cdots(5)$$

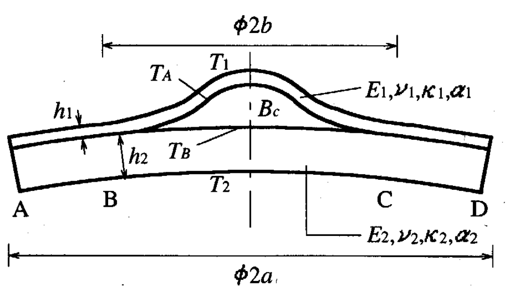


Fig.1 Bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped crack

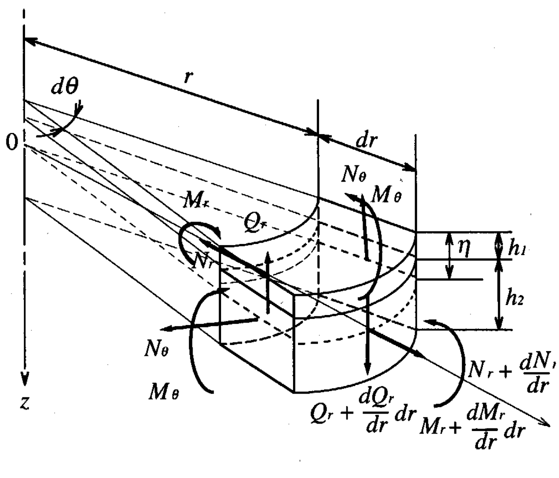


Fig.2 Plate element with stress resultants and couples

ここでT_zは基準面からの距離zの温度であり，zの 1 次関数である(付録 A，式(55)，(56))．フックの法則と式(4)，(5)より

$$\sigma_{rj}=\frac{E_j}{1-\nu_j^2}\left(\varepsilon_{rj}+\nu_j\varepsilon_{\theta j}\right)-\frac{\alpha_j E_j T_{zj}}{1-\nu_j}$$

$$\sigma_{\theta j}=\frac{E_j}{1-\nu_j^2}\left(\varepsilon_{\theta j}+\nu_j\varepsilon_{rj}\right)-\frac{\alpha_j E_j T_{zj}}{1-\nu_j}\quad,\quad (j=1,2) \qquad (6)$$

ここで，添字の 1 は上の板を，2 は下の板を意味する．以上より，面内力N_r，N_θ，および基準面に関するモーメントM_r，M_θは以下のように求められる．

$$N_r=B'\frac{du_0}{dr}+B'_{12}\frac{u_0}{r}-B\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{B_{12}}{r}\frac{dw}{dr}-P_t \qquad (7)$$

$$N_\theta=B'\frac{u_0}{r}+B'_{12}\frac{du_0}{dr}-B_{12}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{B}{r}\frac{dw}{dr}-P_t \qquad (8)$$

$$M_r=B\frac{du_0}{dr}+B_{12}\frac{u_0}{r}-D\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{D_{12}}{r}\frac{dw}{dr}-Q_t \qquad (9)$$

$$M_\theta=B_{12}\frac{du_0}{dr}+B\frac{u_0}{r}-D_{12}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{D}{r}\frac{dw}{dr}-Q_t \qquad (10)$$

ここで，伸びと曲げの連成剛性B，B_{12}，曲げ剛性D，D_{12}，伸び剛性B'，B'_{12}および温度こう配に起因する項P_t，Q_tは付録Bに与えられている．

次に基本解を求める．式(2)に式(9)，(10)を代入すると次式が得られる．

$$Q_r=B\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}\right)-D\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right) \qquad (11)$$

ここで，ηの値は$B=0$を満足するものと定義し，この位置における面を基準面とする．付録 A，式(57)よりηは次式で表される．

$$\eta=\frac{E_1h_1^2/\left(1-\nu_1^2\right)+E_2h_2\left(h+h_1\right)/\left(1-\nu_2^2\right)}{2\left[E_1h_1/\left(1-\nu_1^2\right)+E_2h_2/\left(1-\nu_2^2\right)\right]} \qquad (12)$$

ここで，$h=h_1+h_2$である．このとき，平衡方程式は均質板に対するものと同じになり，板上に分布力が作用しない場合は，式(3)，(11)より

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=0 \qquad (13)$$

となる．

式(1)に式(7)，(8)，および式(12)を代入すると次式が得られる．

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{r}u_0\right)=0 \qquad (14)$$

一般解は

$$u_0=A_1r+A_2/r \qquad (15)$$

となる．ここでA_1，A_2は定数である．

3．円環部分の解析

図１のモデルを$r=b$で仮想的に分離し，図３に示す接着部分(円環部分)と図４(a)に示す$r<b$のはく離部分に分けて解析する．

円環部分のたわみ曲線w_Aを考える．図３に示すように外縁($r=a$)は自由縁でありモーメントは作用していないが，内縁には図の向きに今のところ未知のモーメントM_iが作用していると仮定する．なお，厳密な取扱いにおいては，半径方向の変位の適合条件を考えるために$r=b$の基準面の位置に未知の半径方向面内力が作用しているとすべきであるが，ここではその作用を考えない．実際，本報において扱うき裂面が接触しているモデルにおいては，面内力は正確に 0 であることが，後の解析により示される．（なお，第２報で示されるが，図１に示される変形に対しては，面内力は無視し得ない大きさになるが，この場合でもエネル

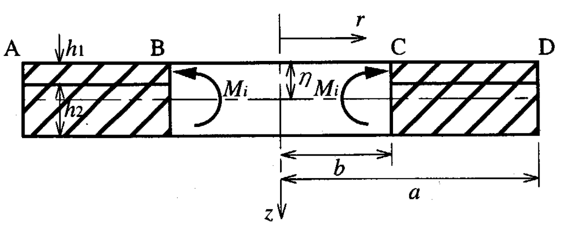
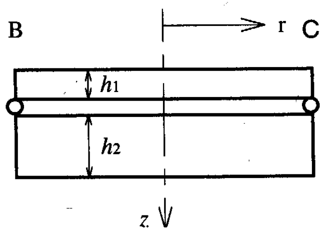
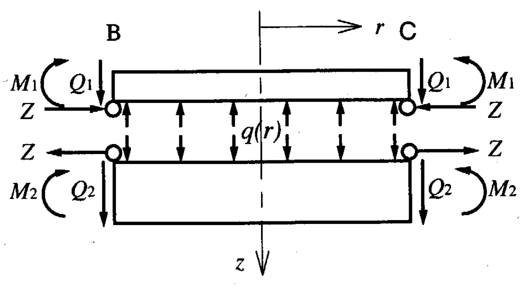


Fig.3 Free-body diagram of the bonded part



(a) Modeling by hinged lapped discs



(b) Free-body diagram

Fig.4 Model of the delaminated part

ギー解放率に対する影響は小さい．）たわみの一般解は式(13)より，

$$w_A = C_{1A} + C_{2A}\ln\frac{r}{a} + C_{3A}r^2 + C_{4A}r^2\ln r \quad (16)$$

で与えられる．ここで C_{1A} ～ C_{4A} は未知定数である．円環内においてせん断力は作用しないから，式(16)を式(11)に代入することにより $C_{4A}=0$ が得られる．また周辺は自由縁であり，そこでのたわみを０とすると，

$$w_A(a)=0 \text{ より，} \quad C_{1A} = -C_{3A}a^2 \quad (17)$$

円環の外縁ではモーメントは作用せず，内縁でモーメント M_i が作用するという条件は，式(9)，(15)，(16)を使って以下のように表せられる．

$$C_{2A} = \frac{-B_{12}A_2 + a^2 M_i/(\lambda-1)}{D-D_{12}} \quad (18)$$

$$C_{3A} = \frac{(\lambda-1)(A_1B_{12}-Q_t)+M_i}{2(D+D_{12})(\lambda-1)} \quad , \quad \lambda = a^2/b^2 \quad (19)$$

また，$r=a$ において半径方向面内力は作用しないという条件を課し，また前述のように円環部分とはく離部分の境界($r=b$)においても半径方向面内力は０と仮定する．この場合，式(7)と(15)，(16)より

$$A_1 = \frac{2B_{12}C_{3A}+P_t}{B'+B'_{12}} \quad , \quad A_2 = -\frac{B_{12}C_{2A}}{B'-B'_{12}} \quad (20)$$

が得られる．

4．はく離部分の解析

次にはく離部分のたわみを解析する．ここでは，はく離面が全面接触していると仮定したモデルを解析する．はく離上下の面のたわみを等しく w_B とする．はく離部分は，図４(a)に示すように円周縁でヒンジ止めされた重ね板としてモデル化できる[8]．全面接触条件の仮定のもとでは空気層の影響は無視することができるので $Bc=\infty$ すなわち $T_A=T_B=T_0$ とおける．さらに $\nu_1=\nu_2\equiv\nu$ と仮定する．このとき，付録 B，式(65)より連成項 $B_{12}=0$ となり解析は簡単になる．$\alpha_1>\alpha_2$，$T_1>T_2$ とし図１のように変形する場合を想定すると，ヒンジの作用は上の円板に対して円板下縁部に半径方向に作用する未知の圧縮力(単位長さ当たり $-Z$ とする)，下の円板に対して円板上縁に作用する引張力(Z)に置き換えることができる．はく離面間の相互接触力を $q(r)$ とすると，図４(b)に示される自由体線図を得る．

上下の円板の縁に作用するモーメントを M_1，M_2 とする．これらも今のところ未知であるが，以下の連続条件が成り立つ．

$$M_i = M_1 + M_2 \quad (21)$$

$r=$ 一定の面に作用するせん断力は上の板に対し

$$Q_1(r) = Z\frac{dw_B}{dr} + \frac{1}{r}\int_0^r rq(r)dr \quad (22)$$

一方，

$$Q_1(r) = -D_1\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w_B}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_B}{dr}\right) \quad (23)$$

したがって，式(22)，(23)より次式の関係が成り立つ．

$$-D_1\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w_B}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_B}{dr}\right) = Z\frac{dw_B}{dr}+\frac{1}{r}\int_0^r rq(r)dr \quad (24)$$

同様に下の板に対し

$$-D_2\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w_B}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_B}{dr}\right) = -Z\frac{dw_B}{dr}-\frac{1}{r}\int_0^r rq(r)dr \quad (25)$$

を得る．式(23)～(25)中の D_1，D_2 はそれぞれ上下の板の曲げ剛性であり付録 C，式(69)で与えられている．式(24)と(25)を足し合わせて積分すると

$$w_B = C_{1B} + C_{2B}r^2 + C_{3B}\ln r \quad (26)$$

$w_B(0)=$ 有界という条件よりただちに $C_{3B}=0$ を得る．

次に各板の縁に作用する曲げモーメントを求める．均質板に対するモーメントの式は，接着板に対する式の特別な場合として式(9)，付録 A，式(68)よりただちに得られ，上板に対し，中立面に関する曲げモーメント M_{r1} は

$$M_{r1} = -D_1\left[\frac{d^2w_B}{dr^2} - \frac{\nu}{r}\frac{dw_B}{dr} - \frac{(1+\nu)}{h_1}\alpha_1(T_1-T_0)\right] \quad (27)$$

となる．$r=b$ に作用しているモーメントは上の板に対しては，$M_1-h_1Z/2$ であるから（図 4(b)を参照）式(26)を(27)に代入して

$$-2D_1(1+\nu)\left[C_{2B}+\frac{\alpha_1(T_0-T_1)}{2h_1}\right] = M_1 - \frac{h_1Z}{2} \quad (28)$$

同様に下の板に対して

$$-2D_2(1+\nu)\left[C_{2B}+\frac{\alpha_2(T_2-T_0)}{2h_2}\right] = M_2 - \frac{h_2Z}{2} \quad (29)$$

式(28)，(29)を足し合わせ，条件(21)を代入すると

$$M_i = \frac{hZ}{2} - 2C_{2B}D'' - (1+\nu)\left[\frac{D_1\alpha_1(T_0-T_1)}{h_1}+\frac{D_2\alpha_2(T_2-T_0)}{h_2}\right] \quad (30)$$

が得られる．ここで $D''=(1+\nu)(D_1+D_2)$．

一方，$r=b$ における変位と傾きの連続条件より

$$C_{1B} = C_{1A} + C_{2A}\ln(b/a) + (C_{3A}-C_{2B})b^2 \quad (31)$$

$$C_{2B}=C_{2A}/(2b^2)+C_{3A} \quad \cdots\cdots (32)$$

面内力Zは上下の円板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件から決定される．伸びを上下円板それぞれ$\bar{u}_{B1}$，$\bar{u}_{B2}$とすると

$$\bar{u}_{B1}=-\frac{1-\nu}{E_1h_1}Zr+\frac{\alpha_1(T_1+T_0)}{2}r-\frac{1}{2}h_1\frac{dw_B}{dr} \quad \cdots\cdots (33)$$

$$\bar{u}_{B2}=\frac{1-\nu}{E_2h_2}Zr+\frac{\alpha_2(T_2+T_0)}{2}r+\frac{1}{2}h_2\frac{dw_B}{dr} \quad \cdots\cdots (34)$$

ここで

$$dw_B/dr=2C_{2B}r \quad \cdots\cdots (35)$$

を代入すると，条件$\bar{u}_{B1}=\bar{u}_{B2}$から

$$Z=\frac{D_0\{[\alpha_1(T_1+T_0)-\alpha_2(T_2+T_0)]-2hC_{2B}\}}{2} \quad \cdots\cdots (36)$$

が得られる．ここでD_0は付録Cの式(73)により定義されている．式(36)を式(30)に代入すると，C_{2B}をM_iで表すことが出来る．この結果をさらに(32)に代入すると，M_iに対する方程式を得，付録C，式(72)を利用すると結局$M_i=0$を得る．この結果から

$$C_{2B}=-\frac{Q_t}{2(D+D_{12})} \quad \cdots\cdots (37)$$

が得られ，同様に式(17)〜(20)，および(32)，(37)から

$$C_{1A}=C_{1B}=\frac{a^2Q_t}{2(D+D_{12})}\quad ,\quad C_{2A}=0$$

$$C_{3A}=C_{2B}=-\frac{Q_t}{2(D+D_{12})} \quad \cdots\cdots (38)$$

結局

$$w_A=w_B=\frac{Q_t(a^2-r^2)}{2(D+D_{12})} \quad \cdots\cdots (39)$$

すなわち，たわみ面は球面であり，はく離半径bには無関係であることがわかる．付録C，式(72)より，

$$\alpha_1(T_0+T_1)>\alpha_2(T_2+T_0) \quad \cdots\cdots (40)$$

であればQ_tは常に負である．このことは，はく離面上部の板の中立面における熱ひずみが，下部のそれより大きい場合には，板は上に凸に変形することを意味している．

ここで，$r=b$における半径方向変位の適合条件について確認しておこう．円環部分の解析による半径方向変位は式(15)，(20)より，

$$u_{0A}(b)=\frac{b}{2}\frac{\alpha_1E_1h_1(T_0+T_1)+\alpha_2E_2h_2(T_2+T_0)}{E_1h_1+E_2h_2} \quad \cdots\cdots (41)$$

一方，はく離部分の解析から，上の円板の中立面における半径方向変位は

$$u_{0u}=\left[-\frac{1-\nu}{E_1h_1}Z+\frac{\alpha_1}{2}(T_1+T_0)\right]b \quad \cdots\cdots (42)$$

基準面の位置における変位はこれに板の傾きによる寄与分

$$(\eta-\frac{h_1}{2})\frac{dw}{dr}\bigg|_{r=b}=\frac{Q_tb}{(1+\nu)D}(\eta-\frac{h_1}{2}) \quad \cdots\cdots (43)$$

を加えることにより得られる．その結果は式(41)と一致する．

以上のことから，積層板のたわみと面内変形はともにき裂半径には依存しないことがわかった．このことは板のひずみエネルギーはき裂半径に依存しないことを意味し，したがってエネルギー解放率はゼロとなる．

次に，分布荷重$q(r)$を計算する．式(24)または(25)に式(39)を代入して

$$q(r)=-4C_{2B}Z \quad \cdots\cdots (44)$$

を得る．ここで$q(r)$の符号を調べる．最初にもっとも単純な等温変化（$T_1=T_2=T$）の場合を考えると，

$$Z=(D_1+D_2)(\alpha_1-\alpha_2)TD_0/D \quad \cdots\cdots (45)$$

$$q(r)=-h(D_1+D_2)[(\alpha_1-\alpha_2)T/D]^2 \quad \cdots\cdots (46)$$

となり，常に負となる．接触解は$q(r)>0$を前提としたものであるから，この結果は矛盾である．逆に等温変化の場合，き裂面は常に開口しているという結論が得られる．

同様な例として，$T_1>T_2$，$\alpha_1>\alpha_2$の場合はZは常に正であり，この場合も接触力は負となる．

より一般の場合を考える．C_{2B}は条件(40)のもとで常に正である．ついでZの符号を調べると，

$$\alpha_1(T_1+T_0)-\alpha_2(T_2+T_0)<$$
$$\frac{h}{D_1+D_2}\left[\frac{D_1\alpha_1}{h_1}(T_1-T_0)+\frac{D_2\alpha_2}{h_2}(T_0-T_2)\right] \quad \cdots\cdots (47)$$

が成立する場合に，$Z<0$となる．結局，式(40)と(47)の両方を満たす条件下でのみ，接触モデルが成り立つことになる．

最後に，接触していてもなお，はく離面上下で温度ギャップがあるモデルについても，解析の手順は同じであり容易になされることを付言しておく．具体的には，式(28)，(33)中のT_0をT_Aで置き換え，式(29)，(34)中のT_0をT_Bで置き換えればよい．ただし，この場合M_iは0とはならず，複雑な式になる．またエネルギー解放率も有限な値を持つようになるが，これに関しての結果は次報で示す．

5. 結言

温度こう配の効果を取り入れた微小たわみの板曲げの基礎式を導出し，これに基づいて，温度こう配下における中心に円形層間はく離を有する積層円板に対し，はく離が全面接触するモデルについて解析を行った．等温変化の場合，および$T_1>T_2$，$\alpha_1>\alpha_2$の場合には，

相互接触力が負になることから全面接触の仮定は不適切であるということがわかった．これらの条件下では，はく離部分は常に開口していることになる．ただし，接触モデル は，はく離面間の相対変位が小さいとき，すなわち温度変化が十分小さい場合は，有効な近似を与えるであろう．この場合，たわみははく離半径に依存せず，エネルギー解放率はきわめて小さいという一般的な結論が導かれ，実際，次報ではこの結論が正しいことが示される．次報でははく離部分が接触しないモデルについて，温度こう配によるはく離部分の座屈現象およびエネルギー解放率について調べる．

最後に，本研究は文部科学省科学研究費補助金[基盤研究(C)(2) 14550083]の援助を受けて実施されたことを付記し，謝意を表する．また，計算および図の作製を手伝っていただいた小田美紀男助手，前田義和技官に謝意を表する．

付録 A

ここで温度こう配の式をまとめておく．接着部分の界面の温度を T_0 とすると，各円板において z 方向に単位時間に単位面積当たりの熱流量 q は各円板につき次式で表される．

$$q_1=\kappa_1(T_1-T_0)/h_1 \quad , \quad q_2=\kappa_2(T_0-T_2)/h_2 \quad \cdots\cdots (48)$$

$q_1=q_2$ の関係から T_0 は次式となる．

$$T_0=(T_1+\xi T_2)/(1+\xi) \quad , \quad \xi=\kappa_2 h_1/\kappa_1 h_2 \quad \cdots\cdots (49)$$

温度分布は上，下の板において次式で与えられる．

$$T_{z1}=-(T_1-T_0)(z+\eta)/h_1+T_1 \quad \cdots\cdots (50)$$

$$T_{z2}=-(T_0-T_2)(z+\eta-h)/h_2+T_2 \quad \cdots\cdots (51)$$

次にはく離部分について各円板の熱量 q は次式で示される．

$$q_1=\kappa_1(T_1-T_A)/h_1 \quad , \quad q_2=\kappa_2(T_B-T_2)/h_2 \quad \cdots\cdots (52)$$

はく離面間の熱伝達率を h_c，はく離面間の空気層を伝わる熱量を q_c とすると，熱量 q_c は次式で表される[4]．

$$q_c=h_c(T_A-T_B) \quad \cdots\cdots (53)$$

ここで $q_1=q_2=q_c$ の関係からはく離面の上下面における温度 T_A，T_B は次式となる．

$$T_A=\frac{(1+\xi)T_1+B_c(T_1+\xi T_2)}{(1+\xi)(1+B_c)} \quad , \quad B_c=\frac{\kappa_1 h_2+\kappa_2 h_1}{\kappa_1\kappa_2}h_c$$

$$T_B=\frac{(1+\xi)T_2+B_c(T_1+\xi T_2)}{(1+\xi)(1+B_c)} \quad \cdots\cdots (54)$$

それぞれ z 軸と同じ方向で，上板の板厚中心を原点に取った z_1 軸，下板の板厚中心を原点に取った z_2 軸を考えると各板の温度こう配は次式で表される．

$$T_{z1}=-(T_1-T_A)z_1/h_1+(T_1+T_A)/2 \quad \cdots\cdots (55)$$

$$T_{z2}=-(T_B-T_2)z_2/h_2+(T_2+T_B)/2 \quad \cdots\cdots (56)$$

付録 B

B，B_{12}，D，D_{12}，B'，B'_{12}，P_t，Q_t をまとめておく．

$$B=\frac{1}{2}\left[\frac{E_1h_1}{1-\nu_1^2}(h_1-2\eta)+\frac{E_2h_2}{1-\nu_2^2}(h+h_1-2\eta)\right] \quad \cdots\cdots (57)$$

$$B_{12}=\frac{1}{2}\left[\frac{\nu_1E_1h_1}{1-\nu_1^2}(h_1-2\eta)+\frac{\nu_2E_2h_2}{1-\nu_2^2}(h+h_1-2\eta)\right] \quad \cdots\cdots (58)$$

$$D=\frac{1}{3}\left\{\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left[\eta^3-(\eta-h_1)^3\right]+\frac{E_2}{1-\nu_2^2}\left[(h-\eta)^3+(\eta-h_1)^3\right]\right\} \quad \cdots\cdots (59)$$

$$D_{12}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\nu_1E_1}{1-\nu_1^2}\left[\eta^3-(\eta-h_1)^3\right]+\frac{\nu_2E_2}{1-\nu_2^2}\left[(h-\eta)^3+(\eta-h_1)^3\right]\right\} \quad \cdots\cdots (60)$$

$$B'=\frac{E_1h_1}{1-\nu_1^2}+\frac{E_2h_2}{1-\nu_2^2} \quad \cdots\cdots (61)$$

$$B'_{12}=\frac{\nu_1E_1h_1}{1-\nu_1^2}+\frac{\nu_2E_2h_2}{1-\nu_2^2} \quad \cdots\cdots (62)$$

$$P_t=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1E_1h_1}{1-\nu_1}(T_0+T_1)+\frac{\alpha_2E_2h_2}{1-\nu_2}(T_0+T_2)\right] \quad \cdots\cdots (63)$$

$$Q_t=\frac{\alpha_1E_1}{1-\nu_1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{T_0-T_1}{h_1}\right)\left[\eta^3-(\eta-h_1)^3\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{T_0-T_1}{h_1}\eta+T_1\right)\left[(\eta-h_1)^2-\eta^2\right]\right\}$$
$$+\frac{\alpha_2E_2}{1-\nu_2}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{T_2-T_0}{h_2}\right)\left[(h-\eta)^3-(h_1-\eta)^3\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{T_2-T_0}{h_2}(\eta-h)+T_2\right)\left[(h-\eta)^2-(\eta-h_1)^2\right]\right\} \quad \cdots\cdots (64)$$

付録 C

η を本文中の式(12)として定めると式(58)～(60)，(64)は以下のようになる．

$$B_{12}=(\nu_2-\nu_1)hD'_0/2 \quad \cdots\cdots (65)$$

$$D=D_1+D_2+h^2D'_0/4 \quad \cdots\cdots (66)$$

$$D_{12}=\nu_1D_1+\nu_2D_2+h^2D'_0\left(\frac{\nu_2E_1h_1}{1-\nu_1^2}+\frac{\nu_1E_2h_2}{1-\nu_2^2}\right)\Bigg/4\left(\frac{E_1h_1}{1-\nu_1^2}+\frac{E_2h_2}{1-\nu_2^2}\right) \quad \cdots\cdots (67)$$

$$Q_t=-\frac{(1+\nu_1)D_1\alpha_1(T_1-T_0)}{h_1}-\frac{(1+\nu_2)D_2\alpha_2(T_0-T_2)}{h_2}-\frac{1}{4}hD'_0\left[(1+\nu_1)\alpha_1(T_1+T_0)-(1+\nu_2)\alpha_2(T_0+T_2)\right]$$

$$\cdots\cdots(68)$$

ここで

$$D_j=\frac{E_j h_j^3}{12\left(1-\nu_j^2\right)}\ ,\ \ (j=1,2)\cdots\cdots(69)$$

$$D_0'=\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1h_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2h_2}\right)^{-1}\cdots\cdots(70)$$

$\nu_1=\nu_2=\nu$ の場合，式(66)～(68)より以下の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}D+D_{12}&=(1+\nu)D\\&=(1+\nu)(D_1+D_2)+h^2D_0/4\cdots\cdots(71)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_t=&-(1+\nu)\left[D_1\alpha_1(T_1-T_0)/h_1+D_2\alpha_2(T_0-T_2)/h_2\right]\\&-hD_0\left[\alpha_1(T_1+T_0)-\alpha_2(T_0+T_2)\right]/4\cdots\cdots(72)\end{aligned}$$

ここで

$$D_0=\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{E_1h_1}+\frac{1}{E_2h_2}\right)\right]^{-1}\cdots\cdots(73)$$

文　献

(1) Hutchinson, J. W. and Suo, Z., Advances in Applied Mechanics, 29(1992), 63-191.

(2) 結城良治編，界面の力学，(1993)，3章，倍風館.

(3) Toya, M., Miyawaki, T. and Kirioka, K. (Hashiguchi,T.編), Proc.18th Int. Symp. on Space Tech. and Sci.,(1992), 527-534.

(4) Hutchinson, J.W. and Lu, T.J., Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 117(1995),386-390.

(5) 戸谷眞之・他3名，機論，66-647, A (2000), 1362-1369.

(6) Saitoh, T., Matsuyama, H. and Toya, M., IEEE, Trans. on CPMT, Part B, 21(1998), 422-427.

(7) 例えば，Madenci, E. and Westmann, R.A., Trans. ASME, J. Appl. Mech., 60(1993), 895-902.

(8) 戸谷眞之・他3名，機論，65-635, A (1999), 1593-1599.