

## 熱的負荷を受ける傾斜機能材料はりのはく離の エネルギー解放率\*

小田 美紀男<sup>\*1</sup>, 有 富 正 男<sup>\*1</sup>, 戸 谷 眞 之<sup>\*1</sup>  
羽 生 武 晴<sup>\*2</sup>, 永 家 浩 次<sup>\*3</sup>

### Energy Release Rates for a Delamination of a Functionally Graded Beam Subjected to Thermal Loading

Mikio ODA<sup>\*4</sup>, Masao ARITOMI, Masayuki TOYA,  
Takeharu HABU and Kouji NAGAIE

<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,  
1-21-40 Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

Delamination of a beam made from functionally graded material (FGM) is analyzed on the basis of classical beam theory. It is assumed that Young's modulus and the coefficient of thermal expansion vary continuously along the thickness direction, and the beam is subjected to the temperature distribution which also varies along the thickness direction. A general expression for the energy release rate of an edge delamination is derived based on so-called "cut and paste procedure". The analysis is then extended to an internal delamination that is parallel to the beam axis. It is shown that the analysis of the deflection of the beam is reduced to the solution of a nonlinear equation for axial forces acting in the beams above and below the delamination. The analyses are applied to a model FGM beam assumed by Erdogan, F. and Chiu, Tz-C [*J. Thermal Stresses*, Vol. 26, pp. 497-523 (2003)]. It is shown that both the deflection and the energy release rate compare well with those obtained by Erdogan and Chiu based on finite element method.

**Key Words:** Fracture Mechanics, Delamination, Functionally Graded Beam, Energy Release Rate, Thermal Loading

## 1. 緒 言

耐熱材料として金属基板にセラミックスを貼り付けた積層材料は、タービン等への応用が期待され注目されているが、界面における熱膨張係数の不連続的变化により大きな熱応力が生じるという欠点を抱えている。そこで近年、熱応力を緩和させるために傾斜機能材料の開発、研究が進められている。傾斜機能材料においては、例えば高温側に耐熱性の高いセラミックス、低温側に強度的に高い金属を配置し、セラミックスから金属への組成を連続的に変化させることにより熱応力を緩和し、かつ構造強度を保つことを目指している。傾斜機能材料についての研究例として、福井ら<sup>(1)</sup>は、

傾斜機能材料厚肉円筒において、残留応力に及ぼす半径方向の組成傾斜の効果について検討している。野田・辻<sup>(2)</sup> および小畑・野田<sup>(3)</sup>は、傾斜機能平板における熱応力を緩和させるための傾斜機能材料の組成を示している。

積層材料においては材料作製の工程中、板表面への低速度衝撃により容易にはく離（板面と平行な界面クラック）が生じることが知られている。それゆえはく離を有するはりおよび板のはく離進展条件を考えることが積層材料を実際の構造物に使用する際にきわめて重要となる。はく離を含む2層積層材料におけるはく離進展条件については、例えば深川らは、はりまたは板が温度こう配下におかれる場合<sup>(4)~(6)</sup>、または外部集中力のもとにおかれる場合<sup>(7)</sup>について解析した。

Noda および Jin<sup>(8)</sup>は傾斜機能材料板の上下面の温度が与えられた場合、板中の表面に平行なクラックについて応力拡大係数を理論的に解析した。Chen および Erdogan<sup>(9)</sup>は、均質な基板に傾斜機能材料をコーティン

\* 原稿受付 2008 年 10 月 16 日。

<sup>\*1</sup> 正員、鹿児島大学工学部 (☎ 890-0065 鹿児島市郡元 1-21-40)。

<sup>\*2</sup> 正員、富士電機(株) (☎ 210-0856 川崎市川崎区田辺新田 1-1)。

<sup>\*3</sup> 鹿児島大学理工学研究科。

E-mail: oda@mech.kagoshima-u.ac.jp

グした積層材料中の界面はく離の応力拡大係数について解析した. Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup>は有限要素法を用いて前記の界面はく離が熱的負荷を受ける場合の解析を行っている.

本研究では, 傾斜機能材料はりの内部はく離進展の解析をはりの曲げ理論に基づいて行った. まず一般の温度分布下における端部はく離に関する解析を行い, 温度分布による負荷と等価な軸力とモーメントの系を与える公式を導いた. 続いて内部はく離に関して, はく離面が接触する場合と接触しない場合に別けて解析し, 内部はく離のエネルギー解放率を与える公式を導出した. 最後に Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup>が仮定したような温度変化を受ける傾斜機能材料はりに対して理論解を適用し, 彼らの有限要素法による解と比較し, 解析の精度を検討した.

## 2. 端部はく離のエネルギー解放率

**2・1 温度分布下における傾斜機能材料はりのたわみ解析** 本章では, 図1に示すような端部に長さ $c$ のはく離を有する任意の温度分布 $T(y)$  (基準温度との温度差)のもとにおかれた傾斜機能材料はりの解析を行う. ヤング率, 熱膨張率係数, ポアソン比をそれぞれ $E, \alpha, \nu$ とし, これらは, はり上面からの距離 $y$ の関数であるとする. はく離部分の上部のはりの厚さを $h_1$ , 下部のはりの厚さを $h_2$ とし,  $c$ は $h_1$ に対して十分大きいものと仮定する. また, 幅を $b$ , はり全体の厚さを $h = h_1 + h_2$ とする. AB間のはりの中立軸の位置を $\bar{y}_3$ , BC間の上部のはりの上面から中立軸までの長さを $\bar{y}_1$ , 下部のはり上面から中立軸までの長さを $\bar{y}_2$ とする. ( $\bar{y}_1 \sim \bar{y}_3$ の定義については後出) はり内の温度が一様に基準温度に保たれているときには, はり内のひずみは0であるものとする. 温度分布 $T(y)$ が与えられると, はり内にひずみ分布が生じ, はりはたわむ. このたわみの解析を, 図2に示すような2段階の

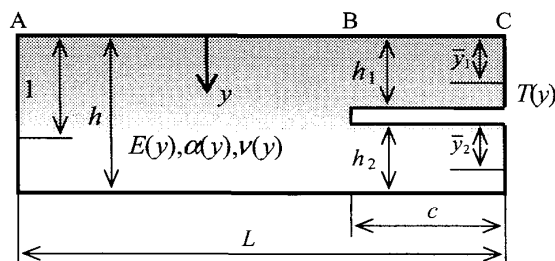


Fig.1 Model of a functionally graded beam with an edge crack subjected to temperature change.

仮想的操作を想定して行う.

まず, 図2(a)に示すようにある基準温度での長さの等しい微小厚さ $dy$ の薄い等方性はりが独立して存在していると仮定する. 温度変化がある場合各はりに伸びが生じ, 図2(b)のように各はりは長さの異なった状態になる. 次に, すべてのはりの長さを等しくするような仮想応力 $\sigma_0(y)$ を各はりの両端に負荷し, この状態ではく離部分は除いて各はりすべてを接着する.

(ただし,  $\int_0^h \sigma_0(y) dy = 0$ と仮定する.) 最後に両端面では外部応力は作用していないという条件を満足させるために応力 $\sigma_0(y)$ を取り除く. この最後の操作は, 応力 $-\sigma_0(y)$ をはりの両端に負荷することを意味する. この応力分布は, 図2(c)に示すように, はりの左端に材端モーメント $M_3$ , 右端はく離部上部の端面にモーメント $M_1$ と中立軸上に作用する軸力 $P_1$ , 下部端面に $M_2$ と軸力 $P_2$ を作用させることと同等であり, 積層はりはいくこれらのモーメントによりたわむことになる. なお, 条件 $\int_0^h \sigma_0(y) dy = 0$ により $P_3 = 0$ となる. この一連の操作によって, はりの曲げにおいて変形前にはりの軸に対して垂直であった断面は, 変形後も垂直を保つという条件が満足される. 以下に $\sigma_0(y)$ と材端モーメント $M_1 \sim M_3$ , 軸力 $P_1, P_2$ を求める.

平面ひずみ条件 $\epsilon_z = 0$ を仮定すると, 応力 $\sigma_0(y)$ による各微小厚さ $dy$ のはりの伸び $\Delta$ は,

$$\Delta = \left\{ \alpha(y)T(y) + \frac{\sigma_0(y)}{E(y)} \right\} L \quad (1)$$

と与えられる. ただし

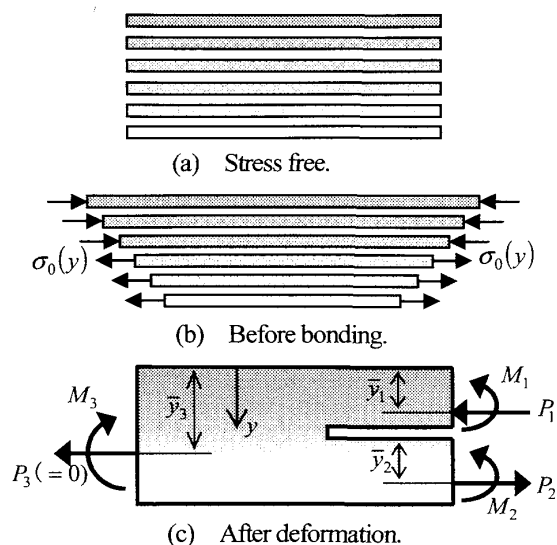


Fig.2 Cut and paste procedure for analyzing thermal stress of a cracked functionally graded beam.

$$\bar{E}(y) = \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)}, \quad \bar{\alpha}(y) = \alpha(y)[1+\nu(y)] \quad (2)$$

ここで,  $\int_0^h \sigma_0(y) dy = 0$  の条件を仮定すると,  $\Delta$  は以下のように求められる.

$$\Delta = \frac{\int_0^h \bar{E}(y) \bar{\alpha}(y) T(y) dy}{\int_0^h \bar{E}(y) dy} L \quad (3)$$

したがって, 式 (1) より  $\sigma_0(y)$  は以下のように求められる.

$$\sigma_0(y) = \bar{E}(y) \left\{ \frac{\Delta}{L} - \bar{\alpha}(y) T(y) \right\} \quad (4)$$

次に,  $\sigma_0(y)$  を取り去ることにより生ずるはりの両端におけるモーメント  $M_1, M_2, M_3$  および軸力  $P_1$  は以下のように与えられる.

$$M_1 = -b \int_0^{h_1} \sigma_0(y) (y - \bar{y}_1) dy \quad (5)$$

$$M_2 = -b \int_{h_1}^h \sigma_0(y) (y - h_1 - \bar{y}_2) dy \quad (6)$$

$$M_3 = -b \int_0^h \sigma_0(y) (y - \bar{y}_3) dy = -b \int_0^h \sigma_0(y) y dy \quad (7)$$

$$P_1 = -P_2 = b \int_0^{h_1} \sigma_0(y) dy = -b \int_{h_1}^h \sigma_0(y) dy \quad (8)$$

なお, 式(5)~(8) から図2(c)のモデルに対して, はり全体のモーメントの釣り合い条件

$$M_3 = M_1 + M_2 - P_1 \bar{y}_1 - P_2 (h_1 + \bar{y}_2) \quad (9)$$

は常に満足していることが確かめられる.

## 2・2 端部はく離のエネルギー解放率

前節において, 図1の熱的負荷のもとにある端部はく離は, 等価な軸力とモーメントの系のもとにおかれた端部はく離 (図2(c)) に置き換えられることを示したが, この結果を用いてエネルギー解放率を導く. 最初に, 単位幅の傾斜機能材料はりの両端に曲げモーメント  $M$  と中立軸に軸力  $P$  とが作用する場合の曲げ剛性  $D$  と伸び剛性  $V$  とを計算する必要があるが, これらについては Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup> により与えられている. 便利のため, これらの定義式を付録 A に示す.

次に  $P$  と  $M$  が同時に作用する際のはりの単位長さ当たりの全エネルギー  $\{\text{ひずみエネルギー} - (\text{外力のポテンシャルエネルギー})\}$  を求める.  $P$  と  $M$  によるひずみの合計は (A.1), (A.6) および (A.10) から

$$\varepsilon_x^{\text{Total}} = \varepsilon_x + \varepsilon_{x0} = \frac{y - \bar{y}}{\rho} + \frac{P}{V} = \frac{M}{D} (y - \bar{y}) + \frac{P}{V} \quad (10)$$

したがって, 座標  $y$  におけるひずみエネルギー密度は式 (A.2), (A.10) から

$$\frac{1}{2} \varepsilon_x^{\text{Total}} \{\sigma_x(y) + \sigma_x^P\} = \frac{\bar{E}(y)}{2} \left[ \frac{M}{D} (y - \bar{y}) + \frac{P}{V} \right]^2 \quad (11)$$

はりの単位長さ当たりのひずみエネルギーは式 (A.4), (A.6), および (A.9) を考慮して式 (10) を積分して

$$U_E = \int_0^h \frac{\bar{E}(y)}{2} \left[ \frac{M}{D} (y - \bar{y}) + \frac{P}{V} \right]^2 dy = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{D} + \frac{P^2}{V} \right) \quad (12)$$

となる. 外力のポテンシャルエネルギーの減少量は, 式 (12) の 2 倍である. したがって全エネルギーは  $-U_E$  となる. 以上の結果を, 図2(c) (または図1) のはり (ただし  $b=1$ ) に対して適用するとエネルギー解放率は

$$G = \frac{1}{2} \left( \frac{P_1^2}{V_1} + \frac{M_1^2}{D_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{P_2^2}{V_2} + \frac{M_2^2}{D_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{P_3^2}{V_3} + \frac{M_3^2}{D_3} \right) \quad (P_3 = 0) \quad (13)$$

で与えられる. ここで  $V_1, V_2$  および  $D_1, D_2$  は, はく離部 BC の上下のはりの伸び剛性, および曲げ剛性である. また  $V_3, D_3$  は AB 部分の伸び剛性と曲げ剛性である. この関係式は Hutchinson および Suo<sup>(11)</sup> が異種材積層はりの端部はく離について導いた公式と形の上で同じである. 温度分布下の傾斜機能材料はりの端部はく離エネルギー解放率は  $b=1$  とおいて式 (5)~(8) を計算して得られる諸量を式 (13) に代入することで求められる. また式 (5)~(8) の値は, はく離長さ  $c$ , 全長  $L$  に依存しておらず, このことからエネルギー解放率  $G$  もはく離長さ, 全長に依存しないことがわかる.

## 3. 内部はく離を有する傾斜機能材料はりのたわみ

本章では, 前章の解析を基礎として図3に示す内部はく離を有する傾斜機能材料はりについて解析を行う.

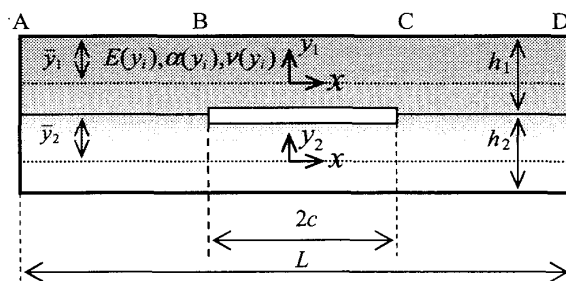


Fig.3 Model of a functionally graded beam with an internal interface crack subjected to temperature change. (i=1,2)

**3・1 非接触解** 最初にはく離部分BCのたわみ曲線について解析する。はりは、基準温度で伸びも縮みもしないものとする。この節では、はく離面は互いに接触していない場合を考える。BC部分を切り出して考えると、この部分は図4(a)のようにヒンジで止められた重ねはりとみなすことができる。この重ねはりの両端では合モーメントおよび軸方向合力は0である。仮に、後章で解析する例のように、温度変化は負の一定値であって、さらに $\alpha(y_1) < \alpha(y_2)$ の場合を考えると、はく離部は上に凸にたわみ、したがって、はく離の上側のはりには圧縮軸力、下側のはりには引張り軸力が誘起される。この場合のヒンジの作用は上のはりに対しては、はりの両下すみ部に作用する水平方向の集中圧縮軸力 $P$ 、下のはりに対しては、はりの両上すみ部に作用する水平方向の集中引張り軸力 $P$ に置き換えることができる。はく離面上下の各はりの中立軸に沿って $x$ 座標を、また垂直上向きに $y_i$ 座標を取り、 $y_i$ 方向のたわみを $w_i$ とする。ここで、添え字 $i=1,2$ はそれぞれ上下のはりを表す。自由体線図と座標系を図4(b)に示す。また、 $M'_1 + M'_2 = 0$ が成り立つ。上下のはりの伸び $u_i$ は、

$$u_i = u_{0i} - y_i \frac{dw_i}{dx} \quad (14)$$

と表すことができる。上下それぞれのはりのひずみは、

$$\varepsilon_{xi} = \frac{du_{0i}}{dx} - y_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} \quad (15)$$

また、応力に関するひずみは平面ひずみ条件( $\varepsilon_z = 0$ )を仮定すると、

$$\varepsilon'_{xi} = \varepsilon_{xi} - \alpha_i T(y_i), \quad \varepsilon'_{yi} = -\alpha_i T(y_i) \quad (16)$$

である。したがって、フックの法則より

$$\sigma_{xi} = \bar{E}(y_i) \left( \frac{du_{0i}}{dx} - y_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right) - \bar{E}(y_i) \bar{\alpha}(y_i) T(y_i) \quad (17)$$

したがって単位幅当たりのモーメントおよび軸力は、付録A式(A.4)を参照すると上のはりについて、

$$M_{x1} = -D_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} - A_1 \quad (18)$$

$$N_{x1} = V_1 \frac{dw_1}{dx} - B_1 \quad (19)$$

下のはりについては、

$$M_{x2} = -D_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} - A_2 \quad (20)$$

$$N_{x2} = V_2 \frac{dw_2}{dx} - B_2 \quad (21)$$

となる。ただし、 $A_i, B_i$ は次式で与えられる。

$$A_i = \int_{-h_i + \bar{y}_i}^{\bar{y}_i} \bar{E}(y_i) \bar{\alpha}(y_i) y_i T(y_i) dy_i \quad (22)$$

$$B_i = \int_{-h_i + \bar{y}_i}^{\bar{y}_i} \bar{E}(y_i) \bar{\alpha}(y_i) T(y_i) dy_i$$

また $D_i, V_i$ は、上下各はりの曲げ剛性と伸び剛性であり、図4(b)の座標系では、次式で表される。

$$D_i = \int_{-h_i + \bar{y}_i}^{\bar{y}_i} \bar{E}(y_i) y_i^2 dy_i \quad (23)$$

$$V_i = \int_{-h_i + \bar{y}_i}^{\bar{y}_i} \bar{E}(y_i) dy_i \quad (24)$$

ここで、図4(b)の力の系を、これと等価な材端モーメント $M_1 \{= M'_1 + P(h_1 - \bar{y}_1)\}$ 、 $M_2 \{= M'_2 + P\bar{y}_2\}$ と上下各はりの中立軸に作用する軸力の組み合わせ(上層に圧縮力 $P$ 、下層に引張り力 $P$ )に置き換える。 $M_1, M_2$ は今のところ未知ではあるが全体の釣り合いを満足するために以下の関係式が成り立っていないなければならない。

$$M_1 + M_2 - P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = 0 \quad (25)$$

はりの任意点における曲げモーメント $M_{x1}, M_{x2}$ は上向きに凸に曲げるように作用するときを正とすると以下のようなになる。

$$M_{x1} = M_1 + Pw_1(x) \quad (26)$$

$$M_{x2} = M_2 - Pw_2(x) \quad (27)$$

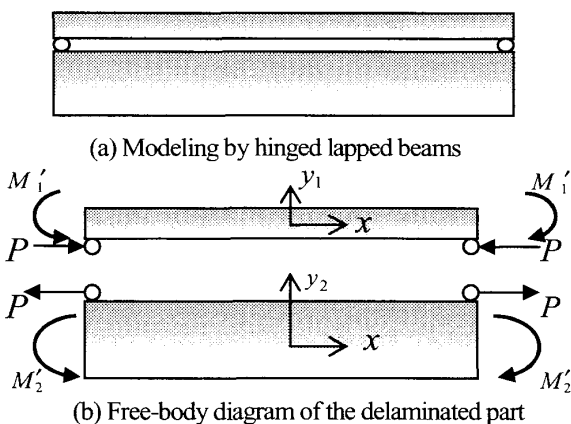


Fig.4 Forces and moments in the interval BC.

式(18)と(26), 式(20)と(27)を組み合わせ整理すると, 上下のはりに関するたわみの微分方程式はそれぞれ以下ようになる.

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{P}{D_1} w_1 = -\frac{1}{D_1} (M_1 + A_1) \quad (28)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{P}{D_2} w_2 = -\frac{1}{D_2} (M_2 + A_2) \quad (29)$$

$P$  の正負によってたわみ曲線の解の形は異なってくるが, 解析手順は両者同様であるので以下では,  $P$  が正の場合について記す. この場合, はく離端で上下のはりのたわみが 0 であるという条件を課すとたわみ曲線は以下の式となる.

$$w_1 = \frac{M_1 + A_1}{P} (\frac{\cos k_1 x}{\cos k_1 c} - 1) \quad (30)$$

$$w_2 = -\frac{M_2 + A_2}{P} (\frac{\cosh k_2 x}{\cosh k_2 c} - 1) \quad (31)$$

ここで,

$$k_1 = \sqrt{P/D_1}, \quad k_2 = \sqrt{P/D_2} \quad (32)$$

また, 材端モーメント  $M_1$ ,  $M_2$  は, はく離端での上下のはりの傾きが等しいという境界条件から決定され, 次のようになる.

$$M_1 = \frac{\{P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + A_2\}k_2 \tanh k_2 c - A_1 k_1 \tan k_1 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (33)$$

$$M_2 = \frac{[P(h_1 - \bar{y}_1 - \bar{y}_2) + A_1]k_1 \tan k_1 c - A_2 k_2 \tanh k_2 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (34)$$

次に上下のはりにおける変位の適合条件より, 軸力  $P$  に関する方程式を求める.  $x=c$  における上下のはりの伸びは, 式(19), (20)より

$$u_{01}(c) = -\frac{1}{V_1} (P - B_1) c \quad (35)$$

$$u_{02}(c) = \frac{1}{V_2} (P + B_2) c \quad (36)$$

変形前に中立軸に垂直であった断面は変形後も垂直関係を保つという条件より以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} u_{01}(c) - u_{02}(c) - \frac{1}{2} \left[ \int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx - \int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx \right] \\ = -(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=c} \end{aligned} \quad (37)$$

上式中の積分は容易に実行できる. 式(37)中の積分を具体的に実行した結果, および  $dw_1(c)/dx$  の具体的な式を付録 B に示す. 結局, たわみを求める問題は, 未知数  $P$  に対する非線形方程式(37)を解くことに帰着される. 解は数値的に求める必要がある. 方程式(37)は異種材二層はりの内部はく離問題において導出された方程式と類似している. 解を求める手順は文献(4)に詳述されているので, ここでは省略する.

**3・2 接触解** 次に, はく離面上下のはりは互いに接触しており, したがって上下のはりのたわみは等しいと仮定した場合を考える. 図 4(b)のモデルにおいて, はく離部分の上下のはりに相互接触力  $q(x)$  が働くと仮定し, また  $w_1 = w_2 = w$  という条件を課す. 式(26), (27)に分布接触力による項を付け加えると式(18), (20)より

$$\begin{aligned} M_1 + Pw(x) + (x+c)Q - \int_{-c}^x q(x')(x-x')dx' \\ = -D_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - A_1 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} M_2 - Pw(x) - (x+c)Q + \int_{-c}^x q(x')(x-x')dx' \\ = -D_2 \frac{d^2 w}{dx^2} - A_2 \end{aligned} \quad (39)$$

ここで  $Q$  は図 4(b)において左端に作用するせん断力である.

式(38), (39)を足し合わせ, 式(25)を用いることにより

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)}{D} \quad (40)$$

ここで,  $D = D_1 + D_2$  であり, また  $\rho$  は上下のはりの曲率半径を表す.

以上の結果を用いて軸力  $P$  を求める. はく離面上下のひずみは等しいという条件と式(15)より

$$(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{du_{02}}{dx} - \frac{du_{01}}{dx} \quad (41)$$

さらに, 式(19), (21)より

$$\frac{du_{01}}{dx} = \frac{1}{V_1} (B_1 - P) \quad (42)$$

$$\frac{du_{02}}{dx} = \frac{1}{V_2} (B_2 + P) \quad (43)$$

式(40), (42), (43)を式(41)に代入すると, 軸力  $P$  は以下のように求められる.

$$P = \frac{-V_1 V_2 (h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) (A_1 + A_2) - D (V_1 B_2 - V_2 B_1)}{V_1 V_2 (h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2)^2 + D (V_1 + V_2)} \quad (44)$$

はく離部分中央ではたわみ角が0, はく離端でたわみは0という条件から, たわみは

$$w = -\frac{1}{2D} [P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)](x^2 - c^2) \quad (45)$$

また, 式(38), (39)に式(40), (44), (45)を代入するとモーメントは以下のように求められる.

$$M_1 = \frac{D_1}{D} [P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)] - A_1 \quad (46)$$

$$M_2 = \frac{D_2}{D} [P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)] - A_2 \quad (47)$$

接触力分布 $q(x)$ とせん断力 $Q$ は式(38)より以下のよう求められる.

$$q(x) = -\frac{P}{D} [P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)] \quad (48)$$

$$Q = -\frac{Pc}{D} [P(h_1 - \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (A_1 + A_2)] \quad (49)$$

結局 $q(x)$ は一定値となるが, 相互接触モデルは $q(x) > 0$ を前提としているから, その符号が問題となる. すなわち, 仮定する傾斜機能モデルに対して式(48)を計算し, その符号を確かめて, 接触モデルの妥当性を検証する必要がある. なお, 2層材料はりが等温変化( $T(y_i) = \text{const}$ )を受ける場合は,  $P$ の符号にかかわらず $q(x)$ は常に負である<sup>(4)</sup>. また, 後章の数値解析例におけるように, 内部はく離の上部のはりが座屈を起こす場合には, 当然非接触モデルを採用しなければならない. このことから, 一般的には, はく離面の非接触を仮定した解析が必要であることがわかる.

次に, 接着部分のたわみの方程式は以下のように与えられる.

$$D_3 \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_3 \quad (50)$$

ここで,  $D_3$ は接着部分の曲げ剛性であり,

$$D_3 = \int_0^h \bar{E}(y)(y - \bar{y}_3)^2 dy \quad (51)$$

$\bar{y}_3$ は, 接着部分の中立軸の位置である. 接着部分のたわみ曲線の曲率半径を $\rho_3$ とすると,

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{M_3}{D_3} \quad (52)$$

となる. この式は式(40)に式(44)を代入して整理したものと同じである. このことは, 接触モデルにおいては, はく離部分と接着部分のそれぞれのたわみ曲線の曲率半径は同一であり, たわみ曲線ははく離長さによらないということを意味する. このことはさらに, はり中の応力, ひずみ分布 (したがってひずみエネルギー分

布も) ははく離長さによらないこと, したがってはく離のエネルギー解放率も0であることを意味する.

接触モデルは, はく離面上下のはりのたわみ差が小さいときには, 非接触モデルの良好な近似解を与えるであろう. したがって, この節の結論として, はく離面上下のはりのたわみ差が小さい熱負荷条件下においては, はく離のエネルギー解放率は小さいといえることができる.

**3・3 内部はく離のエネルギー解放率** 本節では, 内部はく離のエネルギー解放率を求める. エネルギー解放率を求める上で, 傾斜機能はりには外力が一切作用していなくても熱負荷による熱応力が発生しており, はく離端部近傍は, 特異応力場となっていてはく離進展によりエネルギーは解放されることを考慮する必要がある.

そのために, 外力は作用せず熱的負荷のみを受けている状態での傾斜機能材料はりにおける等価な軸力とモーメントの系と, 外力が作用している状態の軸力とモーメントを足し合わせる必要がある. 内部はく離の問題では, 非接触のモデルを考える. (前述したように接触している場合, エネルギー解放率は恒等的に0である.) 図2(b)の軸力とモーメントの方向を正とする. それぞれの諸量は, 以下のように与えられる.

$$M_1 = -M_1^{In} + M_1^{Edge} \quad (53)$$

$$M_2 = -M_2^{In} + M_2^{Edge} \quad (54)$$

$$M_3 = M_3^{Edge} \quad (55)$$

$$P_1 = P^{In} + P_1^{Edge} \quad (56)$$

$$P_2 = -P^{In} + P_2^{Edge} \quad (57)$$

$$P_3 = 0 \quad (58)$$

$M_1^{In}, M_2^{In}$ は式(33), (34)で与えられる $M_1, M_2$ を意味し, また $P^{In}$ は非線形方程式(37)の軸力 $P$ の数値解である. また $M_i^{Edge} (i=1 \sim 3), P_i^{Edge} (i=1,2)$ は, それぞれ式(5)～(8)で求めた $M_1 \sim M_3, P_1, P_2$ を意味する. エネルギー解放率は, 式(53)～(58)を式(13)に代入することにより求められる.

#### 4. 数値解析例

Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup>は図3のモデル( $T(y_i) = \text{一定値}$ )に対して, 有限変形弾性論を基礎とした有限要素

法を用いてエネルギー解放率を求めている。そこで、本論文における理論解析とErdoganおよびChiu<sup>(10)</sup>による有限要素法解を比較する。彼らは図3のはりのモデルに対して、はく離部を境界面として上層は傾斜機能材料はり、下層を均一材料としてヤング率、熱膨張係数を以下の関数で与えている。

$$\bar{E}(y) = \begin{cases} \bar{E}_1 + (\bar{E}_2 - \bar{E}_1)y/h_1 & 0 \leq y \leq h_1 \\ \bar{E}_2 & h_1 \leq y \leq h \end{cases} \quad (59)$$

$$\bar{\alpha}(y) = \begin{cases} \bar{\alpha}_1 + (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1)y/h_1 & 0 \leq y \leq h_1 \\ \bar{\alpha}_2 & h_1 \leq y \leq h \end{cases} \quad (60)$$

$$(y = -y_1 + \bar{y}_1 = -y_2 + h_1 + \bar{y}_2)$$

式(59), (60)中の諸量は表1に与えられている。

Table 1 Material properties and dimensions of the model shown in Figure 3,  $L=100\text{mm}$

	Material	$E_i$ (GPa)	$\nu$	$\alpha_i$ ( $1^\circ\text{C} \times 10^{-6}$ )	$h_i$ (mm)
$i=1$	Zirconia	151.0	0.3	10.0	2.0
$i=2$	Rene-41	219.7	0.3	16.7	12.5

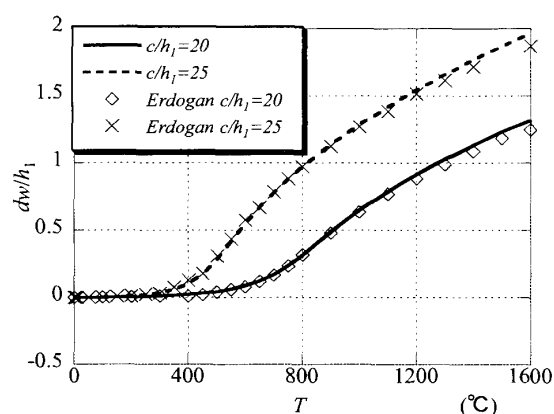


Fig.5 Variation of  $dw/h_1$  with  $T$ .

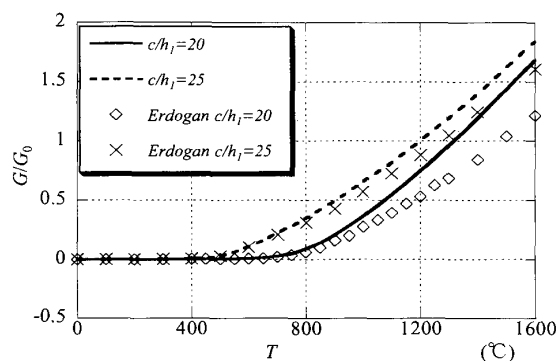


Fig.6 Variation of  $G/G_0$  with  $T$ .

$$(G_0 = (1 - \nu_2^2)K_0^2/E_2, K_0 = E_2\alpha_2 T_0 \sqrt{\pi h_1}, T_0 = 100^\circ\text{C})$$

本論文でも式(59), (60)と表1の数値を用いて3.

1節における非接触解の数値解析を行いErdoganおよびChiu<sup>(10)</sup>の結果と比較する。表1の諸量が与えられた図3のモデルを想定すると、はりが上に凸にたわむ温度変化は、基準温度より低い温度となる。よって、温度を基準温度から下げる場合について解析を行う。

具体的には、 $T(y) = T = \text{一定} (< 0)$ とし、式(59), (60)を式(5)-(8)に代入し、 $M_1 \sim M_3$ , および $P_1 (= -P_2)$ をまず計算する。これらは式(53)-(57)で上付き添え字Edgeで表されている量に対応する。計算結果を付録C, 式(C.1)-(C.6)に示す。次に式(37)の数値解 $P = P^{ln}$ を文献(4)に示されている方法によって求め、これを式(33), (34)に代入して $-M_1^{ln}$ ,  $-M_2^{ln}$ を求める。必要な定数 $A_1, A_2, B_1, B_2$ は付録C, 式(C.7)-(C.10)に与えられている。その他、エネルギー解放率、式(13), を計算する際に必要となる中立軸の位置、はりの曲げ剛性、伸び剛性は付録C, 式(C.11)~(C.19)に与えられている。

図5にはく離部中央部における上下のはりのたわみ差( $dw$ )と上層のはりの厚さ( $h_1$ )の比 $dw/h_1$ と、温度変化 $T (< 0)$ の関係を示す。また、図6にエネルギー解放率の比 $G/G_0$ と温度変化 $T$ の関係を示す。両図ともに、横軸に温度変化 $T$ をとり、またはく離長さとし、上層はりの比 $c/h_1 = 25, 20$ の場合に対して実線と破線で本論文の数値解析を示し、マーカーでErdoganおよびChiu<sup>(10)</sup>の解析を示す。

図5において本論文の数値解析のグラフとErdoganおよびChiu<sup>(10)</sup>の有限要素法を用いた解析結果は、ほぼ一致している。図5と図6を比較するとわかるように、エネルギー解放率はたわみ差が小さいときはほぼ0であることがわかるが、このことは3.2節の接触解の解析において得られた結論と一致している。図6においては、温度変化が800°C近辺から本論文の数値解析とErdoganおよびChiu<sup>(10)</sup>の解析結果に差が生じ始めている。以降、温度変化が大きくなるにつれ互いの解析値の差は大きくなっている。しかし、1000°C辺りまで本研究の解析と彼らの解析の差は小さく、1000°C近辺までは本論文の理論が十分に有効であることがわかる。

## 5. 結 言

傾斜機能材料はりの内部はく離進展の解析をはりの曲げ理論に基づいて行った。まず一般の温度分布下における端部はく離に関する解析を行い、温度分布による負荷と等価な軸力とモーメントの系を与える公式を導いた。続いて内部はく離に関して、はく離面が接触する場合と接触しな

い場合に分けて解析し、内部はく離のエネルギー解放率を与える公式を導出した。最後に Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup>が仮定した様な温度変化を受ける傾斜機能材料はりに対して理論解を適用し、彼らの有限要素法による解と比較し、解析の精度を検討した。その結果、現解析は 1000°C 近辺までの温度変化に対して、十分な精度ではく離のエネルギー解放率を与えることが確かめられた。

### 付 録 A

はりの中立軸は、はり上面からの距離  $\bar{y}$  にあるとする。はり純曲げにより円弧に変形するが、中立軸の曲率半径を  $\rho$  とすると、はり上面からの距離が  $y$  の位置における伸びひずみは、

$$\varepsilon_x = \frac{y - \bar{y}}{\rho} \quad (\text{A.1})$$

位置  $y$  におけるヤング率を  $E(y)$  とすると

$$\sigma_x(y) = \bar{E}(y)(y - \bar{y})/\rho \quad (\text{A.2})$$

純曲げによつては、はり断面における  $x$  軸方向合力は生じないから

$$\int_0^h \sigma_x(y) dy = 0 \quad (\text{A.3})$$

これより

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h \bar{E}(y)y dy}{\int_0^h \bar{E}(y) dy} \quad (\text{A.4})$$

次にモーメント  $M$  と  $\rho$  の関係を求める。下に凸になるように作用するモーメントを正とする。はりを単位幅とすると

$$M = \int_0^h \sigma_x(y) \{y - \bar{y}\} dy = \int_0^h \frac{\bar{E}(y)(y - \bar{y})^2}{\rho} dy \quad (\text{A.5})$$

曲げ剛性を  $D$  と表し、 $\frac{1}{\rho} \equiv -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{D}$  によって定義

すると式 (A.5) より

$$D = \int_0^h \bar{E}(y)(y - \bar{y})^2 dy \quad (\text{A.6})$$

(Erdogan および Chiu<sup>(10)</sup>)

次に、中立軸の位置に集中力  $P$  を負荷するときのはりの伸びを考える。伸びひずみを  $\varepsilon_{x0}$  ( $y$  には無関係) とすると

$$\sigma_x(y) = \varepsilon_{x0} \bar{E}(y) \quad (\text{A.7})$$

したがって

$$P = \int_0^h \sigma_x(y) dy = \varepsilon_{x0} \int_0^h \bar{E}(y) dy \quad (\text{A.8})$$

伸び剛性  $V$  は  $P/\varepsilon_{x0}$  により定義され、したがって

$$V = \int_0^h \bar{E}(y) dy \quad (\text{A.9})$$

$P$  による応力  $\sigma_x^P$  は、(A.7)より

$$\sigma_x^P = \varepsilon_{x0} \bar{E}(y) = \frac{\bar{E}(y)}{V} P \quad (\text{A.10})$$

で与えられる。

### 付 録 B

式 (37) 中における積分を具体的に実行した結果、

及び  $dw_1/dx|_{x=c}$  の具体的な値を示す。

$$\int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx = \left( \frac{M_1 + A_1}{P \cos k_1 c} \right)^2 \frac{k_1^2}{2} \left( c - \frac{1}{2} \sin 2k_1 c \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx = \left( \frac{M_2 + A_2}{P \cosh k_2 c} \right)^2 \frac{k_2^2}{2} \left( -c + \frac{1}{2} \sinh 2k_2 c \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=c} = -\frac{(M_1 + A_1) \tan k_1 c}{P} \quad (\text{B.3})$$

### 付 録 C

数値解析例における具体的な代入値

式 (59), (60) を式(5)~(8) に代入すると以下のようにになる。

$$\begin{aligned} M_1 = & -b \frac{\Delta}{L} h_1 \left[ \bar{E}_1 \left( \frac{h_1}{2} - \bar{y}_1 \right) + (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \left( \frac{h_1}{3} - \frac{\bar{y}_1}{2} \right) \right] \\ & + b T h_1 \left[ \bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 \left( \frac{h_1}{12} - \frac{\bar{y}_1}{3} \right) + (\bar{\alpha}_2 \bar{E}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{E}_2) \left( \frac{h_1}{12} - \frac{\bar{y}_1}{6} \right) \right. \\ & \left. + \bar{\alpha}_2 \bar{E}_2 \left( \frac{h_1}{4} - \frac{\bar{y}_1}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$M_2 = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} M_3 = & -b \frac{\Delta}{L} \left( \bar{E}_1 \frac{h_1^2}{6} + \bar{E}_2 \frac{h_1^2}{3} \right) + \\ & + b T \left[ \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 \frac{h_1^2}{12} + (\bar{E}_2 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_2) \frac{h_1^2}{12} + \bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 \frac{h_1^2}{4} \right] \\ & - b \bar{E}_2 \left\{ \frac{\Delta}{L} - \bar{\alpha}_2 T \right\} \left( \frac{h_2^2}{2} + h_1 h_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$



$$P_1 = b \frac{h_1}{6} \left[ \frac{3\Delta}{L} \{ \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \} - T \{ (\bar{E}_2 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_2) + 2(\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1) \} \right] \quad (C.4)$$

$$P_2 = b h_2 \bar{E}_2 \left( \frac{\Delta}{L} - \bar{\alpha}_2 T \right) = -P_1 \quad (C.5)$$

ここで、式(3)より

$$\Delta/(TL) = [h_1(\bar{E}_2 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_2 - 4\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 + 2\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1)/3 + 2\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h] / [\bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2(h_1 + 2h_2)] \quad (C.6)$$

また、式(59), (60) を式(22)に代入して

$$A_1 = -\{ \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_2 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_2 + 3\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 \} \frac{h_1^2}{12} T + \bar{y}_1 B_1 \quad (C.7)$$

$$A_2 = 0 \quad (C.8)$$

$$B_1 = \frac{T h_1}{6} (\bar{E}_2 \bar{\alpha}_1 + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_2 + 2\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 + 2\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1) \quad (C.9)$$

$$B_2 = \bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 T h_2 \quad (C.10)$$

それぞれのはりの中立軸の位置は以下のように与えられる。

$$\bar{y}_3 = \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) h_1^2 + 3\bar{E}_2 h^2}{3(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) h_1 + 6\bar{E}_2 h} \quad (C.11)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{(\bar{E}_1 + 2\bar{E}_2)}{3(\bar{E}_1 + \bar{E}_2)} h_1 \quad (C.12)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{h_2}{2} \quad (C.13)$$

それぞれのはりの曲げ剛性は以下のように与えられる。

$$D_3 = b(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \left( \frac{h_1^3}{12} + \frac{h_1}{2} \bar{y}_3^2 - \frac{h_1^2}{3} \bar{y}_3 - \frac{\bar{y}_3^3}{3} \right) + b \left[ \bar{E}_2 \frac{1}{3} (h - \bar{y}_3)^3 + \bar{E}_1 \frac{1}{3} \bar{y}_3^3 \right] \quad (C.14)$$

$$D_1 = b \bar{E}_1 \frac{1}{3} \{ (h_1 - \bar{y}_1)^3 + \bar{y}_1^3 \} + b(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \left( \frac{h_1^3}{4} + \frac{h_1}{2} \bar{y}_1^2 - \frac{2h_1^2}{3} \bar{y}_1 \right) \quad (C.15)$$

$$D_2 = b \bar{E}_2 h_2^3 / 12 \quad (C.16)$$

伸び剛性については、以下ようになる。

$$V_3 = \frac{1}{2} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) h_1 + \bar{E}_2 h_2 \quad (C.17)$$

## 文 献

- (1) Fukui, Y. et al., The Stresses and Strains in a Thick-Walled Tube of Functionally Gradient Material under Uniform Thermal Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 58, No.546 (1992), pp. 257-262.
- (2) Noda, N. and Tsuji, T., Steady Thermal Stresses in a Plate of Functionally Gradient Material, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 57, No.533 (1991), pp. 98-103.
- (3) Obata, Y. and Noda, N., Unsteady Thermal Stresses in a Functionally Gradient Material Plate, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 59, No.560 (1993), pp. 1097-1103.
- (4) Fukagawa, K. et al., An Interface Crack in a Laminated Beam Subject to Thermal Gradient, *Journal of the Society of Materials Science Japan*, Vol.53, No.5 (2004), pp. 518-525.
- (5) Fukagawa, K. et al., A Disc-Shaped Interface Crack in a Circular Laminated Plate Subject to Thermal Gradient(1<sup>st</sup> Report), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 71, No.702 (2005), pp.301-307.
- (6) Fukagawa, K. et al., A Disc-Shaped Interface Crack in a Circular Laminated Plate Subject to Thermal Gradient(2nd Report), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 71, No.702 (2005), pp.308-315.
- (7) Fukagawa, K. et al., Local Delamination Buckling of a Laminated Beam Due to Three-Point Bending, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 72, No.722 (2006), pp.1479-1486.
- (8) Noda, N. and Jin, Z-H., Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Strip of a Functionally Gradient Material, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No.8 (1993), pp.1039-1056.
- (9) Chen, Y. F. and Erdogan, F., The Interface Crack Problem for a Nonhomogeneous Coating Bonded to a Homogeneous Substrate, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.44, No.5 (1996), pp.771-787.
- (10) Erdogan, F. and Chiu, Tz-C., Plane Strain and Axisymmetric Spallation of Graded Coatings under Thermal Loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.26 (2003), pp.497-523.
- (11) Hutchinson, J.W. and Suo, Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 29, (1992) pp.63-191, Academic Press, New York