

円形はく離を有する積層円板の軸対称自由振動*

有 富 正 男^{*1}, 真 壁 弘^{*2}
小 田 美 紀 男^{*1}, 戸 谷 眞 之^{*1}Axisymmetric Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing
a Disc-Shaped DelaminationMasao ARITOMI^{*3}, Hiroshi MAKABE,
Mikio ODA and Masayuki TOYA^{*3} Kagoshima University, Dept. of Mechanical Engineering,
1-21-40, Korimoto, Kagoshima, Kagoshima 890-0065, Japan

Axisymmetric free vibrations of simply supported and clamped circular laminated plates containing a disc-shaped delamination are analyzed on the basis of the theory of a small deflection of plates. Basic assumption is that the parts of the plate above and below the crack faces are regarded as two lapped discs hinged at the edge and are contacting one another. Analyses and experiments are carried out for the effects of the delamination size and the thickness-wise location of delamination on the natural frequencies and modes of vibrations. Distributions of mutual contact pressures between the delaminated layers are also analyzed. Theoretical and experimental results agree well, which validates the analytical models assumed in our present study.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency, Mode Shape

1. ま え が き

積層複合材料は軽量で高い剛性と強さを持ち、しかも断熱効果や音響絶縁効果に優れているため、さまざまな分野で構造材料として広く使用されている。しかし積層材料は、製造過程における接着の不完全さや表面に垂直に加えられた動荷重によって接着面のはく離が生じやすい。例えば、軽量化を図った積層構造物が周期的横荷重を受けて共振現象を起こすと、構造要素の積層はりや積層板に層間のはく離が発生・進行して、予想外の強度低下を招くことがある。したがって、層間のはく離が積層はりや積層板の自由振動特性に及ぼす影響を明らかにすることは工学上重要であり、その結果は、材料の振動挙動の変化から、はく離の大きさとその発生位置を特定する手掛かりを与えるものとなる。

同種材からなる積層はりが層間のはく離を有する場合の自由振動を、Wangら⁽¹⁾ ははく離領域の上下のはりのたわみが異なるとして、MujumdarとSuryanar-

ayan⁽²⁾ ははく離界面に常に相互接触力が作用し、上下のはりのたわみは等しいと仮定して、それぞれ理論解析している。TracyとPardoen⁽³⁾ は中央面にはく離がある対称複合積層はりを、ShenとGrady⁽⁴⁾ は複合積層はりを、HuとHwu⁽⁵⁾ は複合サンドイッチはりを、著者ら⁽⁶⁾ は異種材からなる非対称積層はりをそれぞれ取り上げ、はく離が固有振動数と振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。また、ChangとLiang⁽⁷⁾ は軸圧縮力を受けてはく離部分が座屈した後の積層はりの自由振動と強制振動を、LuoとHanagud⁽⁸⁾ ははく離部分の飛び移り座屈を伴う積層はりの自由振動を調査している。しかしながら、積層はりと同様に実用上重要な積層板が、層間のはく離を有する場合の振動問題の研究は、まだ十分ではない。

本報では、ポアソン比の値が近い異種材からなる二層の積層円板が、円形の内部にはく離を有する場合の軸対称自由振動を調査する。接着部分の積層板では中立面が存在すると⁽⁹⁾、はく離部分では上下の板のたわみは等しいとそれぞれ仮定し、運動方程式を線形化して理論解析を行う。そして、はく離の大きさや厚さ方向の位置などが、周辺単純支持円板と周辺固定円板の固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調査するとともに、はく離部分の上下の板に作用する相互接触力と振

* 原稿受付 2000年5月18日。

^{*1} 正員、鹿児島大学工学部(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。^{*2} ニチアス(株)(☎105-8555 東京都港区芝大門1-1-26)。

E-mail: aritomi@mech.kagoshima-u.ac.jp

動モードの対応を明らかにする。また、さまざまなはく離条件の異種材積層円板を製作し、振動実験を行って理論結果の妥当性を検証する。

2. 理論解析

2.1 基礎式 図1に示すような、2枚の異種材の円板を接着して作られた積層円板が、中心部に円形はく離を有する場合を考える。板はともに均質、等方性材料とし、厚さ、縦弾性係数、ポアソン比および密度は、上の板については h_1, E_1, ν_1, ρ_1 , 下の板については h_2, E_2, ν_2, ρ_2 とし、これらに関する諸量を式(1)のように定める。

$$D_j = \frac{E_j h_j^3}{12(1-\nu_j^2)}, (j=1, 2), D_s = D_1 + D_2 \quad \dots (1)$$

$$h = h_1 + h_2, \rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

また、円板の半径を R , 円形はく離の半径を c とし、はく離部分の上層の板を領域①、下層の板を領域②、接着された円環部分を領域③とする。座標軸は円板の中心に原点をとり、半径方向と円周方向に沿って r 軸と θ 軸を、それらに垂直に z 軸を定め、鉛直下方へのたわみを w_1, w_2, w_3 とする。ここで、 η は上層の板の上面から円環部分の積層板の基準面までの距離であり、半径方向の座標は $r_1 = r_2 = r_3 \equiv r$ とおける。

本報では、微小振幅の軸対称曲げ振動を考え、面内の慣性力は無視できるものとする。まず、円環部分の積層板に作用する面内力 $N_{3r}, N_{3\theta}$ と曲げモーメント $M_{3r}, M_{3\theta}$ は

$$\left. \begin{aligned} N_{3r} &= B\kappa_{3r} + B_{12}\kappa_{3\theta} \\ N_{3\theta} &= B_{12}\kappa_{3r} + B\kappa_{3\theta} \\ M_{3r} &= D\kappa_{3r} + D_{12}\kappa_{3\theta} \\ M_{3\theta} &= D_{12}\kappa_{3r} + D\kappa_{3\theta} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

で与えられる。ただし $\kappa_{3r}, \kappa_{3\theta}$ は r 方向と θ 方向の曲率で

$$\kappa_{3r} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial r^2}, \kappa_{3\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w_3}{\partial r} \dots (3)$$

と表され、また伸びと曲げの連成剛性 B, B_{12} と曲げ剛性 D, D_{12} は

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left[\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right] \\ B_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\nu_1 E_1 h_1}{1-\nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{\nu_2 E_2 h_2}{1-\nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right] \\ D &= \frac{1}{3} \left[\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \{ \eta^3 - (\eta - h_1)^3 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \\ D_{12} &= \frac{1}{3} \left[\frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2} \{ \eta^3 - (\eta - h_1)^3 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

で与えられる。したがって、円環部分の積層板の運動方程式は

$$\rho h \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + D \nabla^4 w_3 - N_{3r} \frac{\partial^2 w_3}{\partial r^2} - \frac{N_{3\theta}}{r} \frac{\partial w_3}{\partial r} = 0 \quad \dots (5)$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \dots (6)$$

となる。上式には面内力による非線形項が存在し、取扱いは極めて面倒となる。しかし、第1次近似として曲げ応力の総和である面内力が零、すなわち

$$N_{3r} = N_{3\theta} = 0 \quad \dots (7)$$

となる中立面の存在を仮定すると、運動方程式は

$$\rho h \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + D \nabla^4 w_3 = 0 \quad \dots (8)$$

のように、定数を除いては全く等方均質な円板の微小振幅の運動方程式と一致する。本報では取扱いの簡単化のため、この仮定を基礎に解析を進める。そこで、上層の板の上面から η の距離にある基準面を、仮定した中立面に置き換え、この中立面の位置を考えてみる。

[1] $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$ の場合

異種材からなる積層円板の特別な例として、上下の板のポアソン比が等しい場合を考える。このとき、式(2)の面内力は

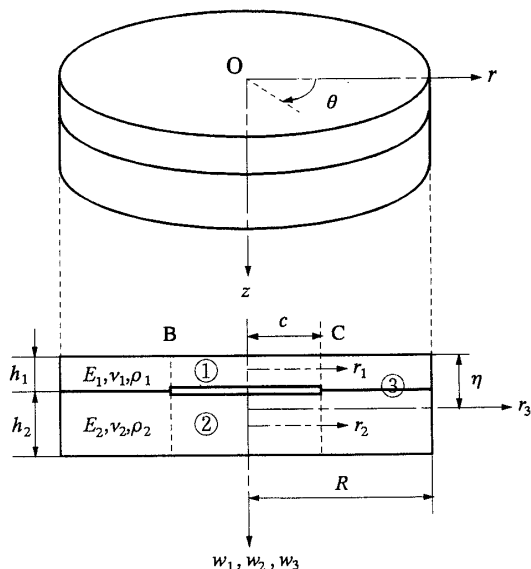


Fig. 1 Geometry of a circular laminated plate containing a disc-shaped delamination

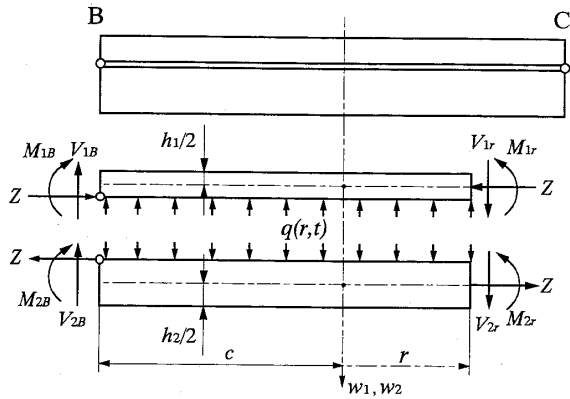


Fig. 2 Free body diagram in the delamination region

$$\left. \begin{aligned} N_{3r} &= B(\kappa_{3r} + \nu\kappa_{3\theta}) \\ N_{3\theta} &= B(\nu\kappa_{3r} + \kappa_{3\theta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と簡単になり、式(7)の条件を満足する中立面の位置 \$\eta\$ は、\$B=0\$ より

$$\eta = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。上式は \$\nu_1 = \nu_2\$ の積層円板の一般的な軸対称変形に対して成り立つ関係である。なお、式(10)は積層はりの中立軸の位置と一致する⁽⁶⁾。

[2] \$\kappa_{3r} = \kappa_{3\theta} \equiv \kappa\$ の場合

円板のたわみ面が球面となる特別な変形を考える。このとき \$\kappa_{3r} = \kappa_{3\theta} \equiv \kappa\$ とおけるので、式(2)の面内力は

$$N_{3r} = N_{3\theta} = (B + B_{12})\kappa \dots\dots\dots (11)$$

となり、これより式(7)の条件を満足する中立面の位置 \$\eta\$ が、\$B + B_{12} = 0\$ から

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{1 - \nu_1} + \frac{E_2 (h^2 - h_1^2)}{1 - \nu_2} \right\} / \left(\frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1} + \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2} \right) \dots\dots\dots (12)$$

と得られる。しかし一般の軸対称変形においては、曲率 \$\kappa_{3r}\$, \$\kappa_{3\theta}\$ は式(3)で与えられ、仮定した \$\kappa_{3r} = \kappa_{3\theta}\$ は一般的には成り立たなく、式(12)も成立しない。ところが \$\nu_1 = \nu_2\$ であれば、式(12)は式(10)と一致する。このことから、上下の板のポアソン比の値が近い積層円板では、式(12)は一般的な軸対称変形に対してもおおよそ成立する関係とみなしてよく、中立面の存在の仮定も大きな矛盾はないものと考えられる。そこで本報では、ポアソン比の値が近い異種材からなる2層の積層円板に、式(12)の位置に中立面が存在すると仮定し、式(8)の線形化された運動方程式に基づいて軸対称自由振動を理論解析する。

次に、はく離部分は図2のように円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、上下の板には単位縁長さ当たり \$Z\$ の大きさの半径方向面内力が作用するとする。

また振動中上下の板が接すると、はく離界面に相互接触力 \$q(r, t)\$ が作用すると仮定すると、その自由体線図は図2の下の図となる。このとき、面内力は上の板に対しては \$N_{1r} = N_{1\theta} = -Z\$、下の板に対しては \$N_{2r} = N_{2\theta} = Z\$ となることを考慮すれば、式(5)より上下の板の運動方程式は

$$\rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + D_1 \nabla^4 w_1 + Z \nabla^2 w_1 + q = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + D_2 \nabla^4 w_2 - Z \nabla^2 w_2 - q = 0 \dots\dots\dots (14)$$

と表される。ここで、はく離のある積層はりの振動問題に対する文献⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾におけるモデルと同様に、上下の板のたわみは等しい (\$w_1 = w_2\$) と仮定し、式(13)と(14)を加えさせると、はく離部分の重ね板の運動方程式は

$$\rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + D_s \nabla^4 w_1 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

のように簡単な式で表される。

式(13)と(14)に含まれる面内力 \$Z\$ は、上下の円板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件から求められる。すなわち

$$\int_0^c \epsilon_1 dr - \frac{(1 - \nu_1) Z c}{E_1 h_1} = \int_0^c \epsilon_2 dr + \frac{(1 - \nu_2) Z c}{E_2 h_2} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、\$\epsilon_1, \epsilon_2\$ は上下の円板の曲げによるひずみで

$$\epsilon_j = (-1)^j \frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} \frac{h_j}{2}, (j=1, 2) \dots\dots\dots (17)$$

と表され、式(16)の両辺の第2項は、面内力による半径方向の変形量である。式(16)と(17)より、面内力 \$Z\$ は

$$Z = - \frac{E_1 E_2 h_1 h_2 h}{2c [E_1 h_1 (1 - \nu_2) + E_2 h_2 (1 - \nu_1)]} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)_{r=c} \dots\dots\dots (18)$$

で与えられる。

2.2 解法 まず、座標軸 \$r\$ とたわみ \$w_i\$、および時間 \$t\$ と各諸量を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\xi}, \bar{c}) &= (r, c)/R, \bar{w}_i = w_i/h, (i=1, 3) \\ (\bar{h}_j, \bar{\eta}) &= (h_j, \eta)/h, \bar{\rho}_j = \rho_j/\rho, \\ \bar{D}_j &= D_j/D_s, (j=1, 2) \\ (\bar{D}_s, \bar{D}_{12}) &= (D_s, D_{12})/D, \\ \bar{D} &= \frac{12(1 - \nu_2^2)D}{E_2 h^3}, \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \\ \bar{Z} &= \frac{Z R^2}{D}, \bar{q} = \frac{q R^4}{D h}, \alpha = \frac{E_1}{E_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

のように無次元化して解析を進める。このとき、はく離部分の重ね板と接着された円環部分の積層板の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \bar{\nabla}^4 \bar{w}_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \bar{\nabla}^4 \bar{w}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \dots\dots\dots (21)$$

戸谷ら⁽⁹⁾は式(20)と同様な式で積層円板中のはく離進展問題を、また文献(2), (4), (5), (6)は式(20)に相当する式ではく離のある積層はりの振動問題を取扱っている。いま、板は調和運動をすと仮定し、無次元固有角振動数を $\bar{\nu}$ として、円板のたわみ \bar{w}_i と軸力 \bar{Z} を

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i(\xi, \tau) &= X_i(\xi) \sin(\bar{\nu} \tau + \phi), (i=1, 3) \\ \bar{Z}(\tau) &= \bar{Z}_0 \sin(\bar{\nu} \tau + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

とおくと、式(20)より $X_i(\xi)$ は

$$X_i(\xi) = C_{i1} J_0(\lambda_i \xi) + C_{i2} Y_0(\lambda_i \xi) + C_{i3} I_0(\lambda_i \xi) + C_{i4} K_0(\lambda_i \xi), (i=1, 3) \dots\dots\dots (23)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 / \sqrt{\bar{D}_s} = \bar{\nu} / \sqrt{\bar{D}_s}, \lambda_3^2 = \lambda^2 = \bar{\nu} \dots\dots\dots (24)$$

と得られ、軸力の大きさ \bar{Z}_0 は

$$\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= -\frac{6(1-\nu_2^2)}{\bar{D}\bar{c}} \\ &\times \frac{\alpha \bar{h}_1 \bar{h}_2}{\alpha(1-\nu_2)\bar{h}_1 + (1-\nu_1)\bar{h}_2} \left(\frac{dX_1}{d\xi} \right)_{\xi=\bar{c}} \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。ただし $J_0(\)$, $Y_0(\)$ は 0 次の第 1 種, 第 2 種の Bessel 関数, $I_0(\)$, $K_0(\)$ は 0 次の第 1 種, 第 2 種の変形 Bessel 関数である。

ところで、式(23)中の未定数は、境界条件と連続条件によって定められる。いま ξ が非常に小さくなると $Y_0(\lambda_i \xi)$ と $K_0(\lambda_i \xi)$ は無限大に近づく。しかし、無孔円板の場合にはたわみは有限でなければならないから

$$\xi=0 \text{ で } X_1 = \text{有限より}, C_{12} = C_{14} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

とおける。また、円板の周辺を単純支持とした場合、境界条件は

$$\xi=1 \text{ で } X_3 = 0, \frac{d^2 X_3}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{12}}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

となり、固定の場合の境界条件は

$$\xi=1 \text{ で } X_3 = 0, \frac{dX_3}{d\xi} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

である。

次に、はく離周縁でたわみとたわみ角は連続であるから

$$\xi = \bar{c} \text{ で } X_1 = X_3, \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{dX_3}{d\xi} \dots\dots\dots (29)$$

また、はく離部分の重ね板のはく離円周縁の曲げモー

メント M_B が

$$M_B = M_{1B} + M_{2B} = \left[-D_s \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \frac{\nu_1 D_1 + \nu_2 D_2}{r} \times \frac{\partial w_1}{\partial r} \right]_{r=c} + \frac{Zh}{2} \dots\dots\dots (30)$$

と表されるから、曲げモーメントの連続条件は

$$\begin{aligned} \xi = \bar{c} \text{ で } \frac{d^2 X_3}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{12}}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} &= \bar{D}_s \left[\frac{d^2 X_1}{d\xi^2} \right. \\ &\left. + \frac{\nu_1 \bar{D}_1 + \nu_2 \bar{D}_2}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} \right] - \frac{\bar{Z}_0}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

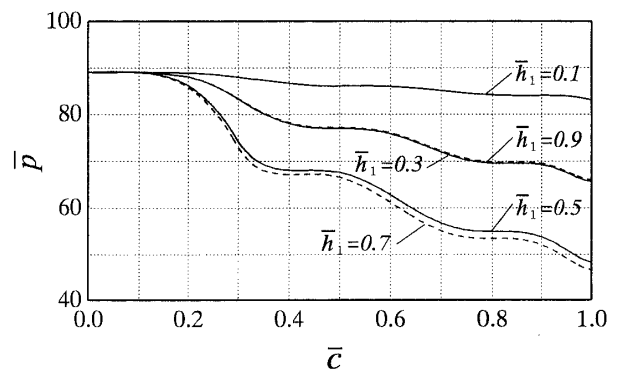
で与えられる。ところで、はく離部分に作用する面内力 Z の鉛直方向成分は、上下の板で大きさが等しく方向が反対となるため、重ね板のはく離円周縁のせん断力 V_B は面内力と無関係になって

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -D_s \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_1}{\partial r} \right)_{r=c} \dots\dots\dots (32)$$

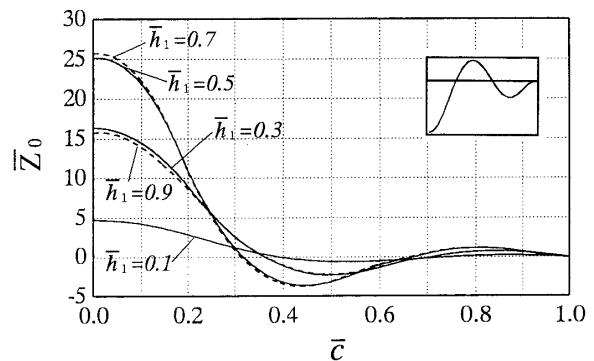
と表される。よって、せん断力の連続条件は

$$\begin{aligned} \xi = \bar{c} \text{ で } \frac{d^3 X_3}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{d^2 X_3}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi^2} \frac{dX_3}{d\xi} \\ = \bar{D}_s \left[\frac{d^3 X_1}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi^2} \frac{dX_1}{d\xi} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (33)$$

となる。そこで、式(23)の X_1, X_3 にこれらの条件を



(a) natural frequency



(b) inplane force ($\bar{A}=0.3$)

Fig. 3 Effect of delamination size on natural frequency and inplane force (clamped edge, axisymmetric third mode)

適用すれば

$$[B]\{C\} = \{0\} \dots\dots\dots (34)$$

の形の関係式が得られる。ここで $\{C\}$ は

$$\{C\} = \{C_{11} \ C_{13} \ C_{31} \ C_{32} \ C_{33} \ C_{34}\}^T \dots\dots\dots (35)$$

であり、 $[B]$ は 6 行 6 列の正方マトリックスである。したがって、式(34)から振動数方程式

$$|B| = 0 \dots\dots\dots (36)$$

が得られる。

3. 計算結果

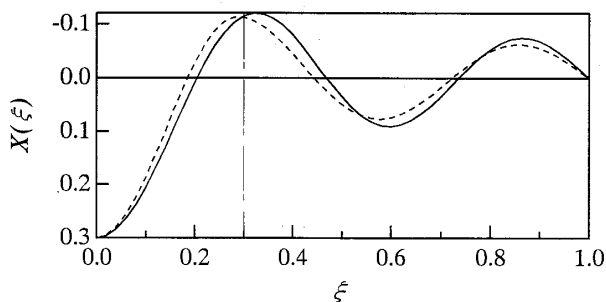
式(36)は超越方程式となるため、固有値 λ はニュートン法で計算した。数値計算では、上の板にはアルミニウム、下の板にはステンレスを仮定し、縦弾性係数、ポアソン比および密度は便覧等を参考にして $E_1 = 74.0 \text{ GPa}$, $E_2 = 200 \text{ GPa}$ ($\alpha = 0.37$), $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.29$, $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 7770 \text{ kg/m}^3$ とした。また、はく離半径が $\bar{c} = 0.001 \sim 0.999$ の範囲の軸対称振動の 1 次から 5 次まで計算した。ただし、 $\bar{c} = 0.001$ のときの無次元固有振動数 \bar{p} ($= \lambda^2$) の値は、周辺固定板の場合には 10.22, 39.77, 89.10, 158.2, 247.0 となって等方均質な板の値⁽¹⁰⁾と一致した。これに対して、周辺単純支持板の \bar{p} の値はポアソン比 ν によって異なる。そこで、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ として $\bar{c} = 0.001$ のときの \bar{p} の値を計算し、 $\nu = 0.3$ の等方均質な板の

\bar{p} の値⁽¹⁰⁾, 4.935, 29.72, 74.16, 138.3, 222.2 と一致することを確認した。

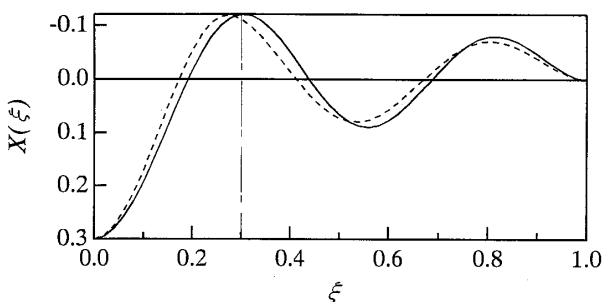
3・1 固有振動数と面内力 図3は、周辺固定の積層円板の無次元固有振動数と面内力が、はく離の大きさによってどのように変化するかを示したものである。面内力 \bar{Z}_0 は、図2に示す方向を正とし、振動モードが略図で示される場合の、最大振幅が $A = 0.3$ ($\bar{A} = A/h = 0.3$) のときの計算結果である。まずはく離半径が零に近づくと、 \bar{p} は等方均質な板の 89.10 となっている。またはく離半径が大きくなると、固有振動数は減少し、その減少率は面内力が極値をとる付近では小さく、面内力が零付近では大きい。このことより、はく離部分の上下の板に作用する面内力は、はく離によって固有振動数が減少するのを抑える傾向にあるといえる。

3・2 振動モードとはく離界面の接触力 図4の点線は、半径 $\bar{c} = 0.3$ のはく離をもつ積層円板の、最大振幅が $\bar{A} = 0.3$ のときの振動モードである。図中の縦の一点鎖線がはく離端を表す。はく離部分の重ね板の曲げ剛性 D_s が接着部分の積層板の曲げ剛性 D に比べて小さいため、モードの節線が実線のはく離のない板に比べてはく離の中心方向へ移動している。

次に、はく離界面に分布する接触力 \bar{q} は、式(13)ま



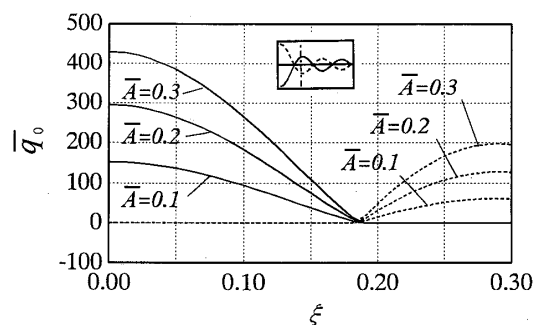
(a) simply supported edge



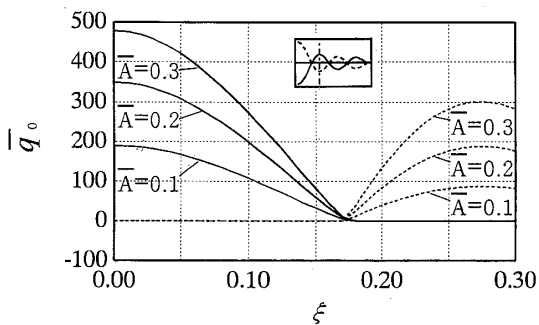
(b) clamped edge

— integral plate, $\bar{c} = 0.3, \bar{h}_1 = 0.3$

Fig. 4 Mode shape (axisymmetric fourth mode)



(a) simply supported edge



(b) clamped edge

Fig. 5 Normal pressure distribution in delamination region (axisymmetric fourth mode, $\bar{c} = 0.3, \bar{h}_1 = 0.3, \bar{\rho}_1 = 0.43$)

たは式(14)からわかるように時間の関数である。そこでここでは

$$\omega_0 = \left(\frac{2n+1}{2} \pi - \phi \right) / \bar{p}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots (37)$$

の時刻における接触力の分布 \bar{q}_0 を

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_0(\xi) &= \bar{q}(\xi, \omega) \\ &= \pm [\bar{p}_1 \bar{h}_1 \lambda^4 X_1 - \bar{D}_1 \bar{D}_s \bar{\nabla}_d^4 X_1 \mp \bar{Z}_0 \bar{\nabla}_d^2 X_1] \\ \bar{\nabla}_d^2 &= \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

で計算した。図5は、図4と同じ積層板の接触力分布である。図5中の \bar{A} は無次元最大振幅を表し、振動モードの略図の実線と点線に対応する接触力分布がそれぞれの線で表されている。ただし、物理的に \bar{q}_0 の値は負とはなりえないので、式(38)の計算結果が負の場合には $\bar{q}_0=0$ として図示した。この $\bar{q}_0=0$ の領域では、上下の板が接触して両者のたわみが等しい、という仮定は成立しなくなる。また、計算に用いた積層板は曲げ剛性比が $D_1/D_2 \approx 0.03$ と、上の板の曲げ剛性が下の板の曲げ剛性に比べてかなり小さいので、接触力は鉛直下方へたわんだはく離領域のみに発生し、鉛直下方でのモードの腹で最大となることがわかる。さらに、最大振幅の大きいほど、接触力の値も大きくなる。

4. 実 験

解析結果の妥当性を検討するため、はく離条件が異なる積層板を製作し、微小振幅の振動実験を行った。

4.1 試験片と実験要領 試験片の外形寸法は、周辺単純支持円板の場合には一辺が75 mmの正八角

Table 1 Material properties

Materials	E GPa	ν	ρ kg/m ³
Aluminum	72.4	0.33	2700
Tough-pitch copper	114	0.35	8600
Stainless spring steel	194	0.30	7770

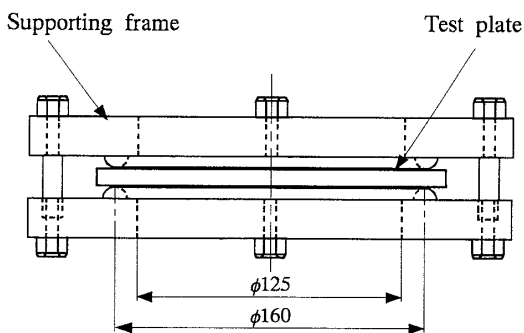


Fig. 6 Supporting frame (simply supported edge)

形、周辺固定円板の場合には一辺が200 mmの正方形である。試験片は厚さが1 mmとなるように、さまざまな厚さのアルミニウム板、タフピッチ銅板、ステンレスばね鋼板のうち二つの材料を組合せて、シアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。それらの材料定数を表1に示す。このとき、所定のはく離半径とはく離位置をもつ試験片を製作するため、まず2枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な貼付位置と量を試行錯誤で取得した。さらに、この方法で表1中の二種類の材料を接着し、重りを約24時間載せて接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定のはく離をもつ試験片を製作した。

また本報では、試験片支持部の両面を半円形断面の凸部で挟むことにより、比較的容易に周辺単純支持を実現させることにした。そのため、大きさが250 mm角で厚さが21 mmの2枚の鉄板から、図6に示すような試験部の直径160 mmの位置に直径12 mmの半円形断面の支持部をもち、直径125 mmの開口部を設けた試験片取付枠を製作した。このとき、支持部のずれを防ぐため、4本のガイドを取付け、振動実験時には試験片を取付枠に挟んで、試験片支持部が回転自由でガタがないように、4本のボルトで軽く締め付けた。

周辺固定の試験片取付枠は、大きさが250 mm角で厚さが20 mmの2枚の鉄板のそれぞれ中心部に直径160 mmの開口部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作した。実験の際には、試験片を取付枠に挟んで12本のボルトに7.84 Nmの一定トルクを均等にかけて締め付けた。

実験は次の手順で行った。まず、試験片を挟んだ試験片取付枠を定盤の上に垂直に固定した。次に、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅し、直径10 mmの先端開口をもつホーン形ノズルを取付けたスピーカに入力し、最大振幅点の試験片中心を音圧により加振した。このとき、加振振動数を変化させ、パワーアンプの電圧と試験片に接着した圧電素子の出力電圧をメモリハイコーダに取込み、リサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を計測した。なお、今回使用したスピーカによる音響加振では、軸対称の3次以上の振動実験を行うことはできなかった。また、軸対称の2次の固有振動モードの確認は、指で試験片をなぞって節線の位置を調べるにとどまった。

4.2 実験結果と考察 図7は上層にアルミニウム、下層にタフピッチ銅を、図8は上層にタフピッチ銅、下層にステンレスばね鋼を用いた積層円板の、周辺が単純支持された場合の固有振動数の実験値と理論

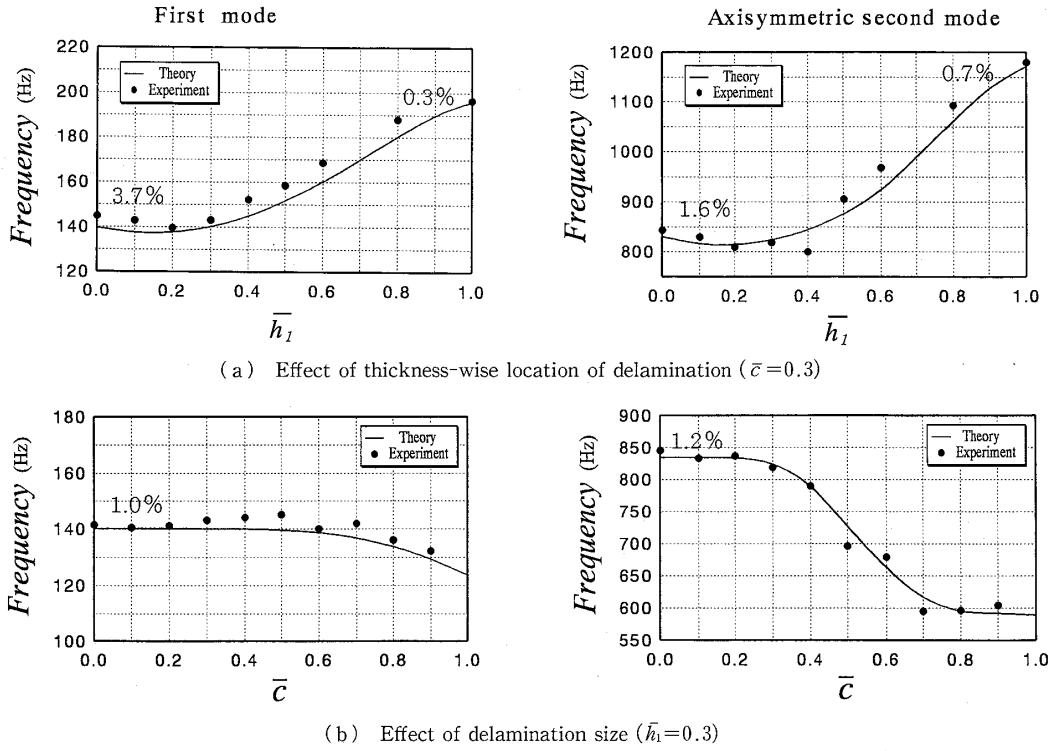


Fig. 7 Comparison between experimental and theoretical frequencies (simply supported edge, $\nu_1=0.33, \nu_2=0.35$)

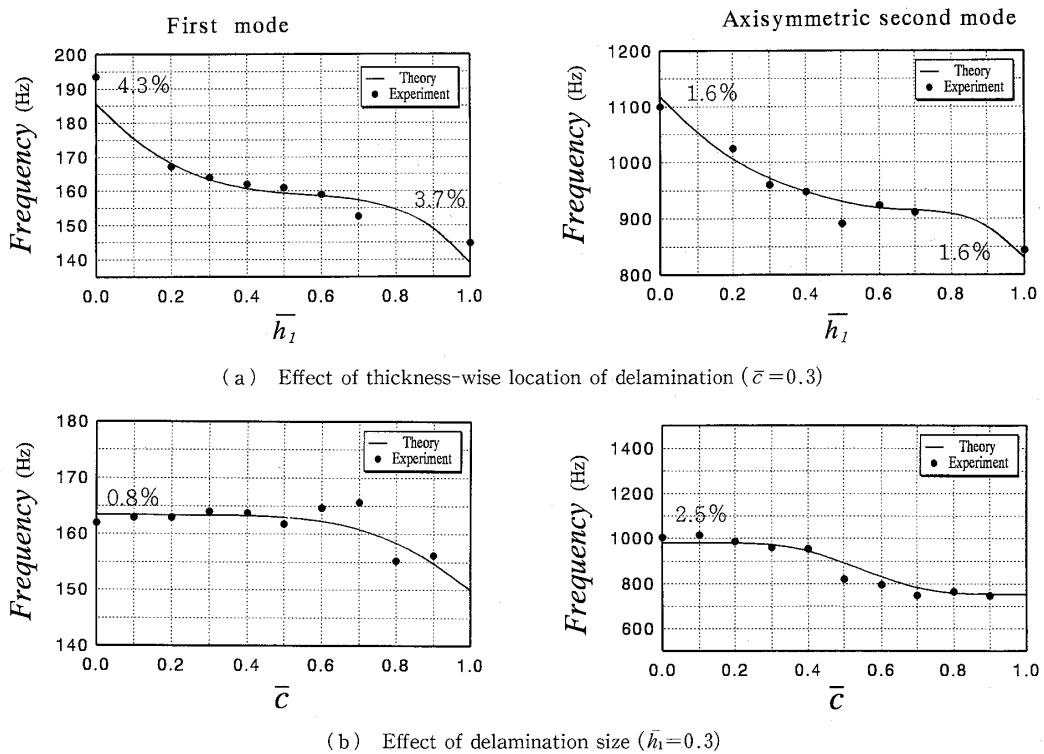


Fig. 8 Comparison between experimental and theoretical frequencies (simply supported edge, $\nu_1=0.35, \nu_2=0.30$)

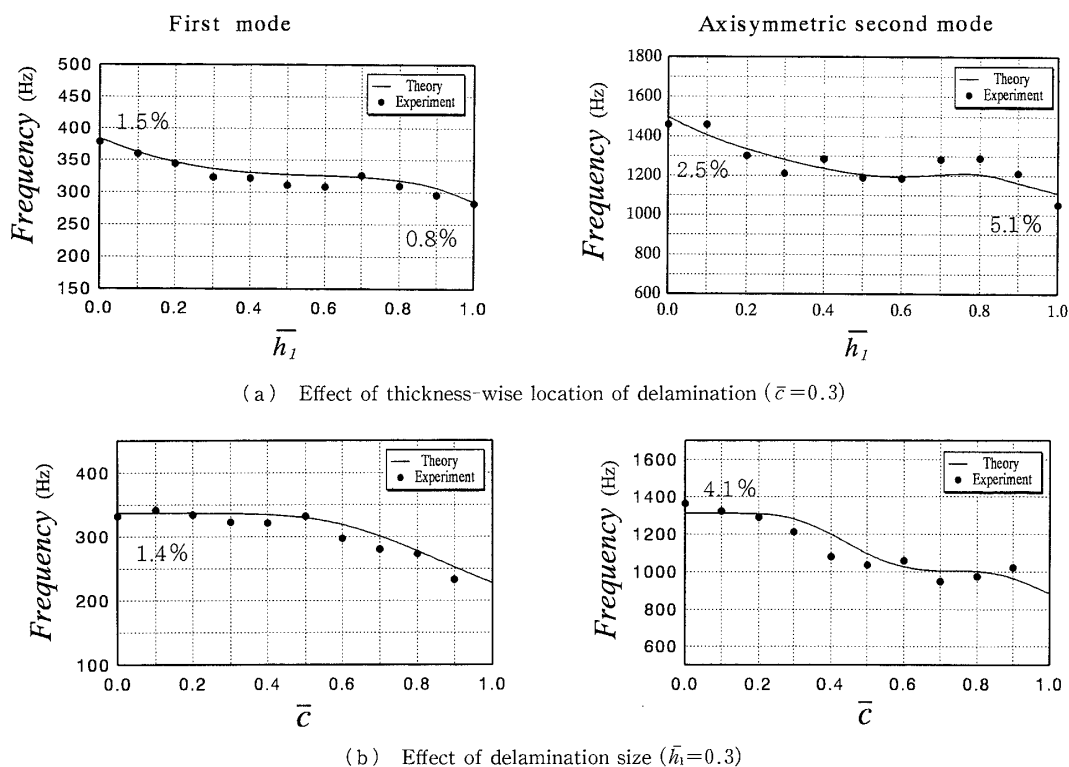


Fig. 9 Comparison between experimental and theoretical frequencies (clamped edge, $\nu_1=0.35$, $\nu_2=0.30$)

結果を比較したものである。まず、両図の(a)の $\bar{h}_1=0$ と $\bar{h}_1=1$ のときがそれぞれ厚さ 1 mm の単一材料の板となるが、それらの固有振動数の測定結果は、図中に示したその誤差からわかるように理論値とよく一致している。したがって、実験装置に取付けられた試験片は、周辺単純支持の境界条件を満足しているものといえる。また今回の試験片製作では、液体状の接着剤を使用しているため、接着層の厚さは非常に薄く、測定できなかった。そこで、両図(b)の $\bar{c}=0$ の、二つの材料を完全接着させた積層円板の結果をみると、その誤差からもわかるように、固有振動数の実験値はいずれの場合も理論値と非常によく一致している。このことから、今回の振動実験では試験片の接着層は固有振動数の値にほとんど影響を与えないことがわかる。

図9は、タフピッチ銅の上層板とステンレスばね鋼の下層板を組合せた、周辺固定円板の実験値と理論値である。図9(a)の $\bar{h}_1=0$ と $\bar{h}_1=1$ の結果から、周辺固定の境界条件は満足されているものといえる。また、図7から9のいずれの場合も、理論解析で得られた固有振動数は実験値とよく一致し、本報で用いた解析モデルの妥当性が確認できる。

5. あとがき

本報では、円形はく離を有する異種材積層円板の軸対称自由振動を、はく離部分は円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、上下の板のたわみは等しいとして理論解析を行った。また、上下の板のポアソン比は近い値とし、接着部分の積層円板に中立面の存在を仮定して解析を進めた。しかしながら、振動中はく離部分は接触する領域としない領域が混在し、また異種材積層円板に半径方向に関係なく一定の位置に中立面が存在するという仮定も矛盾を含んでいる。そこで、はく離条件の異なる試験片を製作して振動実験を行い、測定した固有振動数と理論結果を比較してみると両者はよく一致した。したがって、今回の解析モデルは矛盾を含んでいるとはいえ、はく離を有する積層円板の自由振動を解析するには、簡単でしかも有効な方法といえる。しかし、実験による理論結果の検証は、さらに高次の振動実験を行い、しかも振動モード等も測定して詳細に行う必要があり、今後の検討課題といえる。なお現在、軸対称以外の振動モードに対して理論解析を行っている。

最後に、実験装置の製作に協力いただいた中央実験工場の萩原孝一技官、実験および計算を手伝っていた

だいた中田舞子さん(現在, 九州大学大学院), 足立賢君(現在, 本田技研工業(株)), 宮津和光人君(現在, 山九(株))に謝意を表す。

文 献

- (1) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y. and Gibby, J. A., *J. Sound Vib.*, **84**-4 (1982), 491-502.
- (2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S., *J. Sound Vib.*, **125**-3 (1988), 441-461.
- (3) Tracy, J. J. and Pardoen, G. C., *J. Compos. Mater.*, **23**-12 (1989), 1200-1215.
- (4) Shen, M. H. and Grady, J. E., *AIAA J.*, **30**-5 (1992), 1361-1370.
- (5) Hu, J. S. and Hwu, C., *AIAA J.*, **33**-10 (1995), 1911-1918.
- (6) 有富正男・隈元健・小田美紀男・戸谷真之, 機論, **65**-638, C (1999), 3943-3950.
- (7) Chang, T.-P. and Liang, J.-Y., *Int. J. Solids Struct.*, **35**-12 (1998), 1199-1217.
- (8) Luo, H. and Hanagud, S., *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 1501-1519.
- (9) 戸谷真之・Indiono, L.・有富正男・小田美紀男, 機論, **65**-635, A (1999), 1593-1599.
- (10) 関谷壮・浜田実・角誠之助, 平板構造設計便覧, (1982), 170, 朝倉書店.