

## 円形はく離を有する積層円板の自由振動特性\*

有 富 正 男<sup>\*1</sup>, 平 山 将 行<sup>\*2</sup>  
足 立 賢<sup>\*3</sup>, 戸 谷 眞 之<sup>\*1</sup>Free Vibration Characteristics of Circular Laminated Plates  
Containing a Disk-Shaped DelaminationMasao ARITOMI<sup>\*4</sup>, Masayuki HIRAYAMA,  
Ken ADACHI and Masayuki TOYA<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,  
1 21 40 Korimoto, Kagoshima shi, Kagoshima, 890 0065 Japan

The influence of a delamination on the natural vibration characteristics of circular laminated plates has been investigated. Free vibration of the clamped plate with a disk-shaped delamination of arbitrary size and thickness-wise location is analyzed on the basis of the theory of a small deflection of plates. Basic assumption is that the delaminated layers are contacting one another, and the distribution of mutual contact pressure is also analyzed. The experimental results are corroborated with simplified plate theory models for natural frequencies.

**Key Words:** Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency, Mode Shape

## 1. ま え が き

複合積層材料は比強度, 比剛性が大きく, 耐久性に優れているため, 航空・船舶などの軽量化が要求される構造物を始め, 多くの分野で広く使用されている。しかしこれら積層材料は, 層と層の間に材料の不連続性が存在するので, 外部から低速度衝撃などを受けると, 容易に材料内部に, 表面から観測困難な層間はく離が発生する。この層間はく離が, 構造要素の積層はりや積層板の振動特性に及ぼす影響を明らかにしておけば, 層間はく離の存在やはく離進展問題を検討する場合に役立つものと考えられる。

層間はく離が, 積層はりの自由振動特性に及ぼす影響を調査した研究はいくつか見受けられる。Wang<sup>(1)</sup>や Mujumdar<sup>(2)</sup>は同種材からなる積層はりを, Tracy<sup>(3)</sup>は中央面にはく離がある対称複合積層はりを, Shen<sup>(4)</sup>は複合積層はりを, Hu<sup>(5)</sup>は複合サンドイッチはりを, 著者ら<sup>(6)</sup>は異種材からなる非対称

積層はりをそれぞれ取り上げ, はく離が固有振動数と振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。また, Chang<sup>(7)</sup>ははく離部分が座屈した後の積層はりの自由振動と強制振動を, Luo<sup>(8)</sup>ははく離部分の飛び移り座屈を伴う積層はりの自由振動を調査している。しかしながら, 積層はりと同様に実用上重要な積層板については, 関根ら<sup>(9)</sup>が内部に円形状の層間はく離を有する複合材積層板の剛体球による衝撃応答を, また著者ら<sup>(10)</sup>が円形はく離を有する積層円板の軸対称自由振動を理論解析している程度で, はく離を有する積層板の振動問題の研究はまだ十分ではない。

本報では, 前報<sup>(10)</sup>に引き続き, 異種材からなる二層の積層円板が, その中心部に円形の内部はく離を有する場合の, 一般の振動モードに対する自由振動を, 面内変位の影響が無視できるとして理論解析を行う。そして, はく離の大きさや厚さ方向の位置が, 周辺固定円板の自由振動特性に及ぼす影響を明らかにする。また, さまざまなはく離条件の異種材積層円板を製作して振動実験を行い, 測定した固有振動数と理論結果を比較して解析モデルの妥当性を検証する。

## 2. 理 論 解 析

## 2・1 基礎式 層間はく離が積層板の自由振動特

\* 原稿受付 2001年3月16日。

<sup>\*1</sup> 正員, 鹿児島大学工学部(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。<sup>\*2</sup> 鹿児島大学大学院。<sup>\*3</sup> 本田技研工業(株)(☎107-8556 東京都港区南青山2-1-1)。  
E-mail: aritomi@mech.kagoshima-u.ac.jp

性に及ぼす基本的な影響を調査するため、上下の板は複合材料ではなく、均質・等方性材料とする。図1に示すような、2枚の異種材を接着した半径  $R$  の積層円板が、中心部に半径  $c$  の円形はく離を有する場合を考える。板の厚さ、縦弾性係数、ポアソン比および密度は、下の板については  $h_1, E_1, \nu_1, \rho_1$ 、上の板については  $h_2, E_2, \nu_2, \rho_2$  とし、これらに関する諸量を式(1)のように定める。

$$\left. \begin{aligned} C_j &= \frac{E_j h_j}{1-\nu_j^2}, \quad D_j = \frac{E_j h_j^3}{12(1-\nu_j^2)}, \quad C_{j12} = \nu_j C_j \\ D_{j12} &= \nu_j D_j, \quad (j=1, 2), \quad C = C_1 + C_2 \\ C_{12} &= C_{112} + C_{212}, \quad C_{r\theta} = (C - C_{12})/2 \\ D_S &= D_1 + D_2, \quad D_{S12} = D_{112} + D_{212} \\ h &= h_1 + h_2, \quad \rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

また、はく離部分の下層の板を領域①、上層の板を領域②、接着された円環部分を領域③とする。座標原点は、領域①と②ではそれぞれの板の中央面、すなわち中立面の円板の中心位置  $O_1, O_2$  に、領域③では下層の板下面から  $\eta$  の距離のところに基準面を設け、その面の円板の中心位置  $O_3$  に定める。座標軸は、それぞれの座標原点から半径方向と円周方向に沿って  $r$  軸と  $\theta$  軸を、それらに垂直に  $z$  軸を定め、鉛直上方へのたわみを  $w_1, w_2, w_3$ 、円環部分の基準面の  $r$  と  $\theta$  方向の面内変位を  $u_3^0, v_3^0$  とする。なお、半径方向の座標は  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  とおける。

本報では、微小振幅の自由曲げ振動を考える。まず円環部分の積層板に作用する面内力  $N_{3r}, N_{3\theta}, N_{3r\theta}$  と曲げモーメント  $M_{3r}, M_{3\theta}$ 、ねじりモーメント  $M_{3r\theta}$  は

$$\begin{bmatrix} N_{3r} \\ N_{3\theta} \\ N_{3r\theta} \\ M_{3r} \\ M_{3\theta} \\ M_{3r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & C_{12} & 0 & B & B_{12} & 0 \\ C_{12} & C & 0 & B_{12} & B & 0 \\ 0 & 0 & C_{r\theta} & 0 & 0 & B_{r\theta} \\ B & B_{12} & 0 & D & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B & 0 & D_{12} & D & 0 \\ 0 & 0 & B_{r\theta} & 0 & 0 & D_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{3r}^0 \\ \epsilon_{3\theta}^0 \\ \epsilon_{3r\theta}^0 \\ \kappa_{3r} \\ \kappa_{3\theta} \\ \kappa_{3r\theta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。ただし、基準面のひずみ  $\epsilon_{3r}^0, \epsilon_{3\theta}^0, \epsilon_{3r\theta}^0$  と曲率  $\kappa_{3r}, \kappa_{3\theta}, \kappa_{3r\theta}$  は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{3r}^0 &= \frac{\partial u_3^0}{\partial r}, \quad \epsilon_{3\theta}^0 = \frac{1}{r} \left( u_3^0 + \frac{\partial v_3^0}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{3r\theta}^0 &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_3^0}{\partial \theta} - v_3^0 \right) + \frac{\partial u_3^0}{\partial r} \\ \kappa_{3r} &= -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial r^2}, \quad \kappa_{3\theta} = -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_3^0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial \theta^2} \right) \\ \kappa_{3r\theta} &= -2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_3^0}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

と表される。式(2)中の伸び剛性  $C, C_{12}, C_{r\theta}$  は式(1)で与えられており、また伸びと曲げの連成剛性  $B, B_{12}, B_{r\theta}$  と曲げ剛性  $D, D_{12}$ 、ねじり剛性  $D_{r\theta}$  は

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left[ \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right] \\ B_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\nu_1 E_1 h_1}{1-\nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{\nu_2 E_2 h_2}{1-\nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right] \\ D &= \frac{1}{3} \left[ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \{ (h_1 - \eta)^3 + \eta^3 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \\ D_{12} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2} \{ (h_1 - \eta)^3 + \eta^3 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \\ B_{r\theta} &= \frac{1}{2} (B - B_{12}), \quad D_{r\theta} = \frac{1}{2} (D - D_{12}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

のように、基準面の位置  $\eta$  によって変化する。そこで、この基準面の位置について考えてみる。まず、座標  $r$ 、たわみ  $w_1, w_2, w_3$ 、面内変位  $u_3^0, v_3^0$ 、および時間  $t$  と各諸量を次のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} (\xi, \bar{t}) &= (r, c)/R \\ (\bar{w}_i, \bar{u}_3^0, \bar{v}_3^0) &= (w_i, u_3^0, v_3^0)/h, \quad (i=1, 2, 3) \\ (\bar{h}_j, \bar{\eta}) &= (h_j, \eta)/h, \quad \bar{\rho}_j = \rho_j/\rho, \quad (j=1, 2) \\ (\bar{C}, \bar{C}_{12}) &= (C, C_{12})R^2/D, \quad (\bar{B}, \bar{B}_{12}) = (B, B_{12})R/D \\ (\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_S, \bar{D}_{S12}, \bar{D}_{12}) &= (D_1, D_2, D_S, D_{S12}, D_{12})/D \\ \bar{D} &= \frac{12(1-\nu_2^2)D}{E_2 h^3}, \quad \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}, \quad \beta = \frac{h}{R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

いま、面内変位の影響を考慮した微小振幅の軸対称

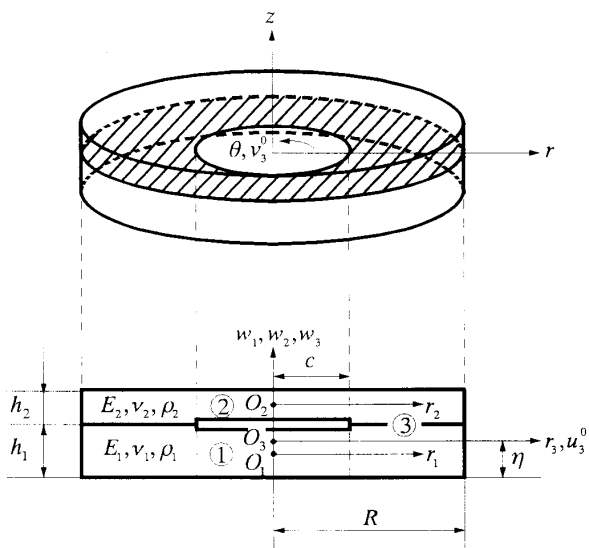


Fig. 1 Geometry of a circular laminated plate containing a disk shaped delamination

自由振動を考えると、半径方向と鉛直方向の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_3^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left( \nabla_a^2 \bar{u}_3^0 - \frac{\bar{u}_3^0}{\xi^2} \right) + \bar{B} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_a^2 \bar{w}_3) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \nabla_a^4 \bar{w}_3 - \bar{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_a^2 \bar{u}_3^0) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \bar{u}_3^0}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{u}_3^0}{\xi^3} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

と与えられ、面内変位  $\bar{u}_3^0$  とたわみ  $\bar{w}_3$  が連成する連立微分方程式となる。ここで

$$\nabla_a^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \dots\dots\dots (7)$$

ところが、基準面を  $\bar{B}=0$  を満足する

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu_2^2) \alpha \bar{h}_1^2 + (1-\nu_1^2) \bar{h}_2 (1+\bar{h}_1)}{(1-\nu_2^2) \alpha \bar{h}_1 + (1-\nu_1^2) \bar{h}_2} \dots (8)$$

の位置に定めると、 $\bar{u}_3^0$  と  $\bar{w}_3$  は

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{u}_3^0(\xi, \tau), \bar{w}_3(\xi, \tau) \} &= \{ U_3(\xi), X_3(\xi) \} \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ X_3(\xi) &= A_1 J_0(\lambda_3 \xi) + A_2 Y_0(\lambda_3 \xi) \\ &\quad + A_3 I_0(\lambda_3 \xi) + A_4 K_0(\lambda_3 \xi) \\ U_3(\xi) &= A_5 J_1(\lambda_4^2 \xi) + A_6 Y_1(\lambda_4^2 \xi) \\ \lambda_3^2 &= \bar{p}, \quad \lambda_4^2 = \bar{p} / \sqrt{C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と簡単に解くことができる<sup>(11)</sup>。ここで、 $\bar{p}$  は無次元固有角振動数、 $J_n(\ )$ ,  $Y_n(\ )$  は  $n$  次の第1種、第2種の Bessel 関数、 $I_n(\ )$ ,  $K_n(\ )$  は  $n$  次の第1種、第2種の変形 Bessel 関数である。ただしこの場合、力学的境界条件とはく離円周縁における連続条件によって、面内変位  $\bar{u}_3^0$  とたわみ  $\bar{w}_3$  が連成した振動問題となる<sup>(11)</sup>。

一般の振動モードに対する自由振動を、面内変位の影響を考慮して理論解析することは、非常に難しく、繁雑である。そこで本報では、解析解を得るために、円環部分の積層板の基準面は、 $\bar{B}=0$  の条件から得られる式(8)の位置に定め、積層円板の自由振動特性に及ぼす基準面の面内伸縮の影響は、面外の曲げ変形に比べて小さく無視できると仮定する。この仮定、つまり

$$\bar{B} = 0, \quad \bar{u}_3^0 = \bar{v}_3^0 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

の条件を適用すると、微小振幅の自由曲げ振動に対する円環部分の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w}_3 = 0 \dots\dots\dots (11)$$

と非常に簡単な式で表される。ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (12)$$

また、円環部分のはく離円周縁の基準面には

$$\bar{N}_{3B} = \frac{N_{3B} R^2}{D} = -\beta \bar{B}_{12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \theta^2} \right)_{\xi=c} \dots\dots\dots (13)$$

なる半径方向の面内力  $N_{3B}$  が作用する。なお前報<sup>(10)</sup>では、曲げ応力の総和である面内力が零となる中立面の存在を仮定しているので、 $N_{3B}=0$  において解析を進めている。

次に、はく離部分は図2に示すように円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、上下の板のヒンジには単位縁長さ当たり  $Z$  の大きさの半径方向面内力が作用するとする。これに加え、式(13)の面内力  $N_{3B}$  によって上下の板のはく離円周縁に、半径方向面内力  $N_{1B}$  と  $N_{2B}$  が作用する。ただし、はく離円周縁に作用する  $(N_{3\theta})_{r=c}$  と  $(N_{3r\theta})_{r=c}$  がはく離部分の重ね板の振動に及ぼす影響は、 $Z$  や  $N_{3B}$  に比べて小さく無視できるものとする。このような仮定のもとでは、任意断面の  $r$  方向と  $\theta$  方向の面内力は、 $r$  に無関係な  $N_{1r} = N_{1\theta} = N_{1B} - Z$  と  $N_{2r} = N_{2\theta} = N_{2B} + Z$  が作用することになる。また、振動中上下の板が接すると、はく離界面に相互接触力  $q(r, \theta, t)$  が作用すると仮定すると、その自由体線図は図2の下の図となる。これらの力を

$$\begin{aligned} (\bar{Z}, \bar{N}_{1B}, \bar{N}_{2B}) &= (Z, N_{1B}, N_{2B}) R^2 / D, \\ \bar{q} &= q R^4 / (Dh) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

と無次元化すれば、それぞれの板の運動方程式は

$$\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \nabla^4 \bar{w}_1 - (\bar{N}_{1B} - \bar{Z}) \nabla^2 \bar{w}_1 + \bar{q} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \nabla^4 \bar{w}_2 - (\bar{N}_{2B} + \bar{Z}) \nabla^2 \bar{w}_2 - \bar{q} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

と表される。ただしはく離円周縁において、円環部分の基準面に作用する  $N_{3B}$  を、面内力に関する力とモーメントの釣合い式より、はく離部分の下板と上板の中立面に作用する力学的等価な面内力、すなわち

$$\bar{N}_{1B} = (1 + \bar{h}_1 - 2\bar{\eta}) \bar{N}_{3B}, \quad \bar{N}_{2B} = (2\bar{\eta} - \bar{h}_1) \bar{N}_{3B} \dots\dots\dots (17)$$

に置換えている。ここで前報<sup>(10)</sup>と同様に、上下の板のたわみは等しい、すなわち  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$  と仮定し、式

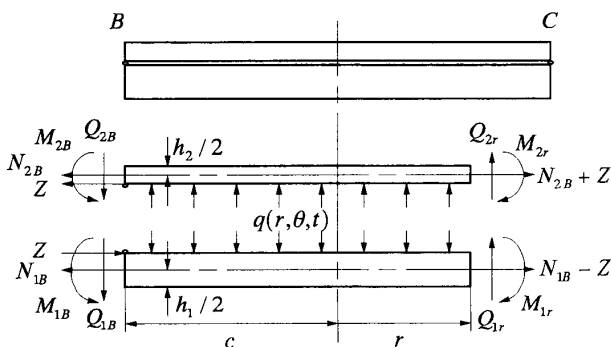


Fig. 2 Free body diagram in the delamination region

(15)と式(16)を加え合わせると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 + \beta \bar{B}_{12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \theta^2} \right)_{\xi=c} \nabla^2 \bar{w}_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となるが、第3項の非線形項は他の項に比べ微小で無視できるとすれば、はく離部分の重ね板の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

と簡単となる。

**2・2 解法** 円板は調和運動すると仮定し、たわみ  $\bar{w}_1, \bar{w}_3$  および面内力  $\bar{Z}, \bar{N}_{1B}, \bar{N}_{2B}$  を、半径方向の節線の数  $n$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i(\xi, \theta, \tau) &= X_i(\xi) \cos(n\theta + \varphi) \sin(\bar{p}\tau + \phi), \\ (i=1, 3) \\ [\bar{Z}(\theta, \tau), \bar{N}_{1B}(\theta, \tau), \bar{N}_{2B}(\theta, \tau)] \\ &= \{\bar{Z}_0, \bar{N}_{10}, \bar{N}_{20}\} \cos(n\theta + \varphi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

とおくと、式(19)および式(11)より  $X_i(\xi)$  は

$$\begin{aligned} X_i(\xi) &= A_{ni1} J_n(\lambda_i \xi) + A_{ni2} Y_n(\lambda_i \xi) \\ &+ A_{ni3} I_n(\lambda_i \xi) + A_{ni4} K_n(\lambda_i \xi), \quad (i=1, 3) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 / \sqrt{\bar{D}_s} = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_s}, \quad \lambda_3^2 = \lambda^2 = \bar{p} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と得られる。また、式(15)と式(16)に含まれる面内力  $\bar{Z}$  は、上下の円板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件、すなわち

$$\begin{aligned} \int_0^c [\varepsilon_1^{(t)} + \varepsilon_1^{(b)}]_{\theta} d\xi + \int_0^c [\varepsilon_1^{(t)} + \varepsilon_1^{(b)}]_{\theta+\pi} d\xi \\ = \int_0^c [\varepsilon_2^{(t)} + \varepsilon_2^{(b)}]_{\theta} d\xi + \int_0^c [\varepsilon_2^{(t)} + \varepsilon_2^{(b)}]_{\theta+\pi} d\xi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

から求められる。ただし、はく離界面の下の板と上の板の伸びひずみ  $\varepsilon_1^{(t)}, \varepsilon_2^{(t)}$  と曲げひずみ  $\varepsilon_1^{(b)}, \varepsilon_2^{(b)}$  は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{(t)} &= \frac{\bar{D}(1-\nu_1)\beta^2}{12a\bar{h}_1(1-\nu_2^2)} (\bar{N}_{1B} - \bar{Z}) \\ \varepsilon_2^{(t)} &= \frac{\bar{D}\beta^2}{12\bar{h}_2(1+\nu_2)} (\bar{N}_{2B} + \bar{Z}) \\ \varepsilon_j^{(b)} &= (-1)^j \beta^2 \frac{\bar{h}_j}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2}, \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

と表され、式(24)を式(23)に代入して積分すると、面内力  $\bar{Z}$  の大きさ  $\bar{Z}_0$  は、節直径数  $n$  が偶数のとき

$$\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= \frac{1}{(1-\nu_2)a\bar{h}_1 + (1-\nu_1)\bar{h}_2} \\ &\times \left[ -\frac{6(1-\nu_2^2)}{\bar{D}\bar{c}} a\bar{h}_1\bar{h}_2 \left( \frac{dX_1}{d\xi} \right)_{\xi=c} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + (1-\nu_1)\bar{h}_2\bar{N}_{10} - (1-\nu_2)a\bar{h}_1\bar{N}_{20} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、 $n$  が奇数のときは

$$\bar{Z}_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{10} &= -\beta(1+\bar{h}_1-2\bar{\eta})\bar{B}_{12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_3 \right)_{\xi=c} \\ \bar{N}_{20} &= -\beta(2\bar{\eta}-\bar{h}_1)\bar{B}_{12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_3 \right)_{\xi=c} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

次に、境界条件と連続条件を式(21)の正規関数  $X_i(\xi)$  を用いて表す。まず無孔円板の場合、板中心点のたわみは有限でなければならない。ところが  $\xi$  が非常に小さくなると  $Y_n(\lambda_i \xi)$  と  $K_n(\lambda_i \xi)$  は無限大に近づくため

$$\begin{aligned} \xi=0 \text{ で } X_1 &= \text{有限より}, \\ A_{n12} &= A_{n14} = 0 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

の条件が必要となる。また本報では、周辺固定円板を取り上げるので、境界条件は

$$\begin{aligned} \xi=1 \text{ で} \\ X_3=0, \quad \frac{dX_3}{d\xi} &= 0 \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる。さらに、はく離円周縁でたわみとたわみ角は連続であるから

$$\begin{aligned} \xi=c \text{ で} \\ X_1 = X_3, \quad \frac{dX_1}{d\xi} &= \frac{dX_3}{d\xi} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

が得られる。曲げモーメントの連続条件は

$$\begin{aligned} r=c \text{ で} \\ M_{1r} + M_{2r} + Zh/2 &= M_{3r} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

なるはく離円周縁の曲げモーメントの関係より

$$\begin{aligned} \xi=c \text{ で} \\ \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \bar{D}_{s12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_1 \right) - \frac{\bar{Z}_0}{2} \\ = \frac{d^2 X_3}{d\xi^2} + \bar{D}_{12} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_3 \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

と表される。はく離円周縁のせん断力の間には

$$\begin{aligned} r=c \text{ で} \\ Q_{1r} + Q_{2r} + Z \left( \frac{\partial w_2}{\partial r} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) &= Q_{3r} \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

の関係が成立し、しかも  $w_1 = w_2$  と仮定しているため、せん断力の連続条件は

$$\begin{aligned} \xi=c \text{ で} \\ \bar{D}_s \left[ \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_1) - \frac{n^2}{\xi^2} \left( \frac{dX_1}{d\xi} - 2 \frac{X_1}{\xi} \right) \right] \\ = \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_3) - \frac{n^2}{\xi^2} \left( \frac{dX_3}{d\xi} - 2 \frac{X_3}{\xi} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

のように、ヒンジに作用する面内力  $Z$  とは無関係となる。ただし

$$\nabla_d^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \dots\dots\dots (35)$$

そこで、式(21)の  $X_1, X_3$  にこれらの条件を適用し、 $X_1$  の中に含まれる  $A_{n11}$  と  $A_{n13}$  を消去すると

$$[H]\{A\} = \{0\} \dots\dots\dots (36)$$

の関係式が求められる。ここで、 $\{A\}$  は

$$\{A\} = \{A_{n31} \ A_{n32} \ A_{n33} \ A_{n34}\}^T \dots\dots\dots (37)$$

であり、 $[H]$  は 4 行 4 列の正方マトリックスである。式(36)より

$$|H| = 0 \dots\dots\dots (38)$$

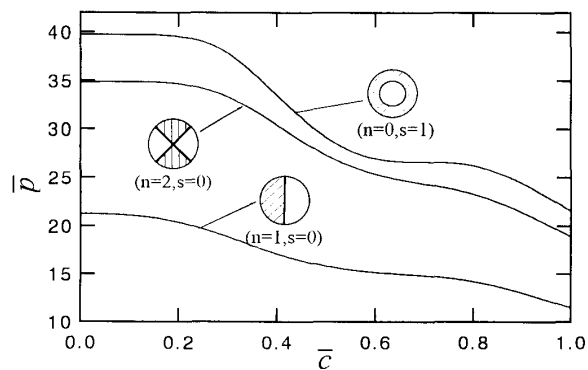
の振動数方程式が得られる。

### 3. 計算結果

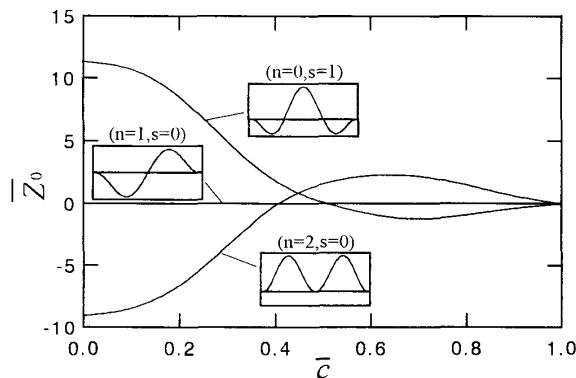
数値解析では前報<sup>(10)</sup>と同様に、下の板には  $E_1 = 74.0 \text{ GPa}$ ,  $\nu_1 = 0.35$ ,  $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$  のアルミニウム、上の板には  $E_2 = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu_2 = 0.29$ ,  $\rho_2 = 7700 \text{ kg/m}^3$  のステンレスを、また  $\beta = h/R = 1/80$  の円板を仮定し、式(38)にニュートン法を適用して固有値  $\lambda$  を計算した。また、節直径数  $n=0, 1, 2$ , 節円数  $s=0, 1$  の六とおりの振動モードについて、 $\bar{c} = 0.001 \sim 0.999$  の範囲で計算した。

#### 3.1 固有振動数と面内力

図 3(a) は、固有振動



(a) Natural frequency



(b) Inplane force ( $\bar{A} = 0.3$ )

Fig. 3 Effect of delamination size on natural frequency and inplane force ( $\bar{h}_1 = 0.5$ )

数に及ぼすはく離大きさの影響を、図中の略図の振動モードに対して示したものである。まずはく離半径  $\bar{c}$  が零に近づくと、 $\bar{p}$  の値は 21.26, 34.88, 39.77 となって等方均質な固定円板の値<sup>(12)</sup>と一致している。またはく離半径  $\bar{c}$  が大きくなると、積層板に比べて小さな曲げ剛性をもつ重ね板のはく離領域が広がるため、いずれのモードにおいても固有振動数は減少している。

図 3(b) は、円板の中心点と最大振幅点を結んだ断面のはく離円周縁に生じる面内力  $\bar{Z}_0$  が、はく離の大きさによってどのように変化するかを示したものである。面内力は、図 2 に示す作用方向を正とし、最大振幅  $A$  が板厚  $h$  の 0.3 倍、すなわち  $\bar{A} = A/h = 0.3$  として式(25)で計算した。この式(25)で、はく離円周縁に作用する面内力  $\bar{N}_{10}$  と  $\bar{N}_{20}$  の項は第 1 項に比べて非常に小さな値となり、しかも異符号でお互いの値を打ち消し合うため、 $\bar{Z}_0$  に及ぼす  $\bar{N}_{10}$  と  $\bar{N}_{20}$  の影響はほとんど無視できる。言い換えると、積層板の微小振幅の曲げ振動を、基準面の面内変位の影響を無視して解析する場合、同時に曲げにより生ずる面内力の影響も無視して差支えないものと考えられる。また、図 3 の (a) と (b) を比較すると、はく離が大きくなるのに伴い固有振動数が減少する傾向は、面内力が極値をとる付近では小さく、面内力が零付近では大きい。特に、 $\theta$  に無関係な一様な面内力が作用する軸対称振動の場合、面内力が小さくなると固有振動数は急激に減少する。それに対して、面内力が作用しない  $n=1$  の場合、固有振動数の減少はなだらかな傾向を示している。これらのことより、はく離円周縁に作用する面内力  $\bar{Z}_0$  は、はく離による固有振動数の減少を抑制する傾向にあるといえる。

#### 3.2 振動モードとはく離界面の接触力

はく離界面に分布する接触力  $\bar{q}$  は、式(15)あるいは式(16)からわかるように時間の関数である。そこで  $\sin(\bar{p}\tau + \phi) = 1$  を満足する

$$\tau_0 = \left( \frac{4n+1}{2} \pi - \phi \right) / \bar{p}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (39)$$

の時刻  $\tau_0$  における接触力の分布  $\bar{q}_0(\xi, \theta)$  を

$$\begin{aligned} \bar{q}_0(\xi, \theta) = \bar{q}(\xi, \theta, \tau_0) = & [\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \lambda^4 X_1 - \bar{D}_1 \nabla_d^4 X_1 \\ & + (\bar{N}_{10} - \bar{Z}_0) \cos(n\theta + \phi) \nabla_d^2 X_1] \cos(n\theta + \phi) \dots\dots (40) \end{aligned}$$

で計算した。また、振動モードも同様に

$$W(\xi, \theta) = X(\xi) \cos(n\theta + \phi) \dots\dots\dots (41)$$

として三次元的に図示した。図 4(a) は、 $\bar{c} = 0.8$ ,  $\bar{h}_1 = 0.3$  というはく離条件をもつ積層円板が、 $\bar{A} = 0.3$  で振動している場合の、節直径数  $n=1$ , 節円数  $s=1$

の振動モードと、そのときははく離界面に生じる接触力を示している。ただし、物理的に  $\bar{q}_0$  の値は負とはならないので、式(40)の計算結果が負の場合には  $\bar{q}_0=0$  として図示してある。この場合、面内力  $\bar{Z}_0$  は作用せず、しかも曲げ剛性比が  $D_1/D_2 \approx 0.03$  と、下の板の曲げ剛性が上の板の曲げ剛性に比べて極端に小さいため、接触力は鉛直上方へたわんだはく離領域のみに発生し、そのモードの腹で最大となっている。なお、 $\bar{q}_0=0$  の領域では、はく離部分の上下の板のたわみが等しい、という仮定は成立しなくなる。

図4(b)は、 $\bar{c}=0.3$ 、 $\bar{h}_1=0.5$  のはく離条件をもつ積層円板の、 $n=2$ 、 $s=1$  の場合の振動モードとはく離界面の接触力分布を示す。このとき、曲げ剛性比は  $D_1/D_2 \approx 0.37$  であるが、鉛直下方へたわんだ領域においても接触力が発生している。この領域では、下の板には引張りの面内力が、上の板には圧縮の面内力が発生し、上下の板を接触させるように働く。したがって、鉛直下方へたわんだ領域でも、曲げにより上下の板が離れようとする傾向よりも、面内力が上下の板を接触させようとする影響のほうが大きく、接触力が発生したものと考えられる。

#### 4. 実験

微小振幅の振動実験を行って固有振動数を測定し、理論結果と比較して解析モデルの妥当性を検証した。

##### 4.1 試験片と実験要領 一辺が 200 mm の正方

形のタフピッチ銅板とステンレスばね鋼板を、前報<sup>(10)</sup>と同様にシアノアクリレート系瞬間接着剤が未接着部分へ浸透することを十分考慮して接着し、ほぼ所定のはく離をもつ試験片を再度製作した。そのとき下層の板には  $E_1=114$  GPa、 $\nu_1=0.35$ 、 $\rho_1=8\,600$  kg/m<sup>3</sup> のタフピッチ銅を、上層の板には  $E_2=194$  GPa、 $\nu_2=0.30$ 、 $\rho_2=7\,770$  kg/m<sup>3</sup> のステンレスばね鋼を使用し、積層板の厚さが  $h=1$  mm となるようにさまざまな厚さの二つの材料を組合せた。

試験片取付枠は、大きさが 250 mm 角で厚さが 20 mm の 2 枚の鉄板のそれぞれ中心部に半径  $R=80$  mm の開口部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作した。実験の際には、試験片を取付枠に挟んで 12 本のボルトに 7.84 N·m の一定トルクを均等にかけ締付けた。

実験は次の手順で行った。まず試験片を挟んだ試験片取付枠を、定盤の上に固定した支持台上に水平に設置した。次に、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して口径 120 mm のスピーカに入力し、その音響出力を直径 10 mm の先端開口をもつホーン形ノズルで集中させて、試験片の最大振幅位置を音圧により加振した。このとき、加振振動数を変化させ、加振用のスピーカ端子電圧とレーザ変位計で測定した振動変位の応答出力電圧とでリサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を計測した。

##### 4.2 実験結果と考察 図5は、板上面に食塩を

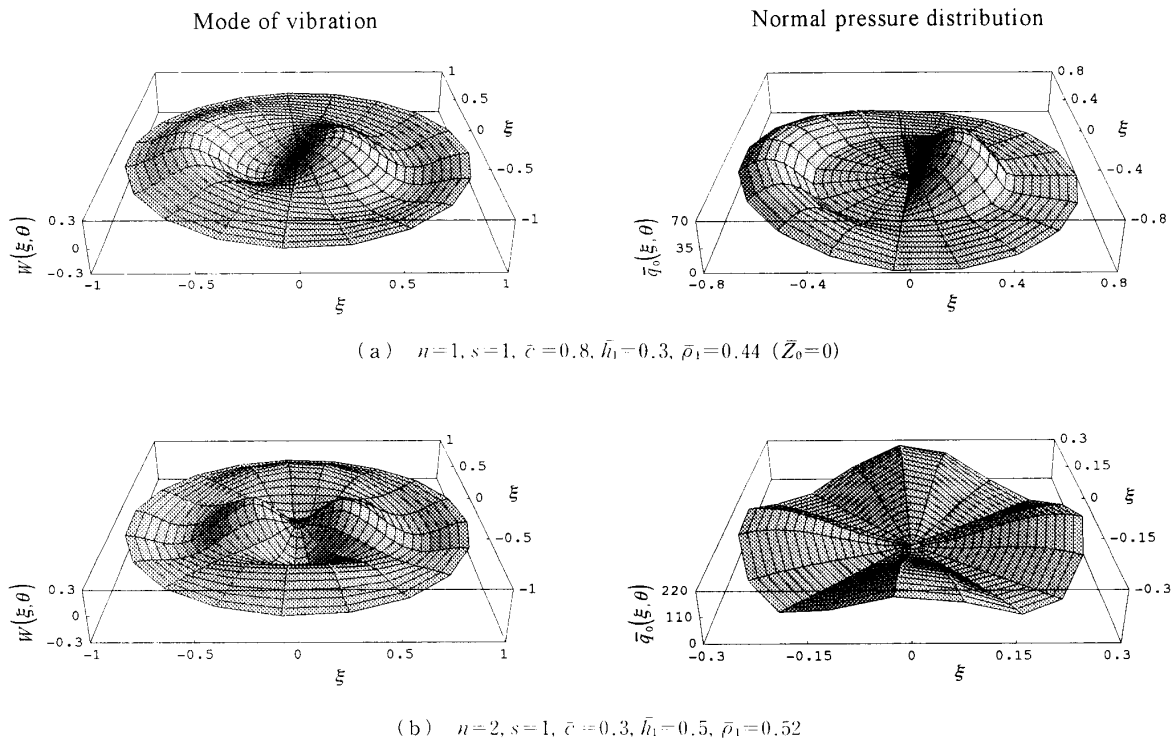


Fig. 4 Mode of vibration and normal pressure distribution in delamination region

一様に散布して描かせたクラドニ図形の写真の一例である。実験は、食塩によって描かせた節直径、節円により、固有振動数に対応する振動モードを確認しながら行った。

図6は、実験で測定された固有振動数を理論値と比較したものである。まず図6(a)の  $\bar{c}=0$  の完全に接着された積層円板の結果をみると、固有振動数の実験値はいずれのモードにおいても理論値と一致しており、今回の実験でも、試験片の接着層が固有振動数に与える影響は、ほとんど認められないことがわかる。また、実験で得られた固有振動数の値は、はく離半径が大きくなるにつれて理論曲線とほぼ同じ傾向で減少している。

次に、図6(b)で  $\bar{h}_1=0$  と  $\bar{h}_1=1$  のときが、それぞれ厚さ1mmのステンレスばね鋼板とタフピッチ銅板となるが、それらの固有振動数の測定結果は、いずれのモードにおいても理論値とよく一致している。したがって、実験装置に取付けられた試験片は、周辺固定の境界条件も満足しているものといえる。また、図6(b)の  $\bar{h}_1=0.4$  と  $0.5$  の場合の  $n=0, s=1$  の振動モードにおいて、誤差が8.1%、9.2%と、実験値がいくぶん小さな値となった。しかし、図6でそれらを除くと、理論解析で得られた固有振動数は実験値とよく一致し、微小変位の板理論に基づいた本報の解析モデルの妥当性が確認できる。

5. ま と め

本報では、二層の異種材積層円板が板中心部に円形の層間はく離を有する場合の自由振動を、接着された円環部分の面内変位の影響は無視できるとし、はく離

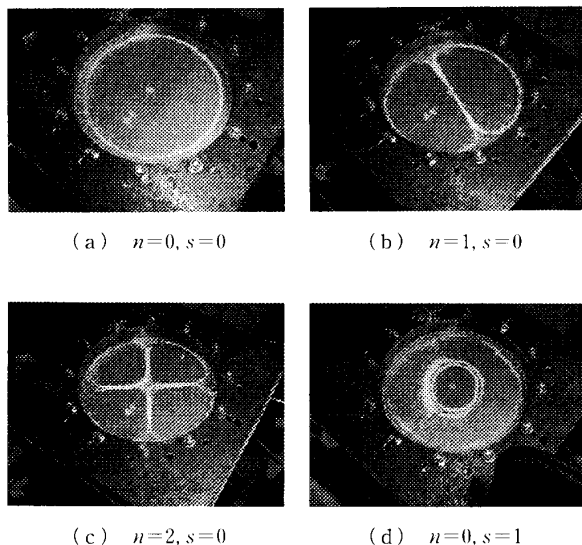
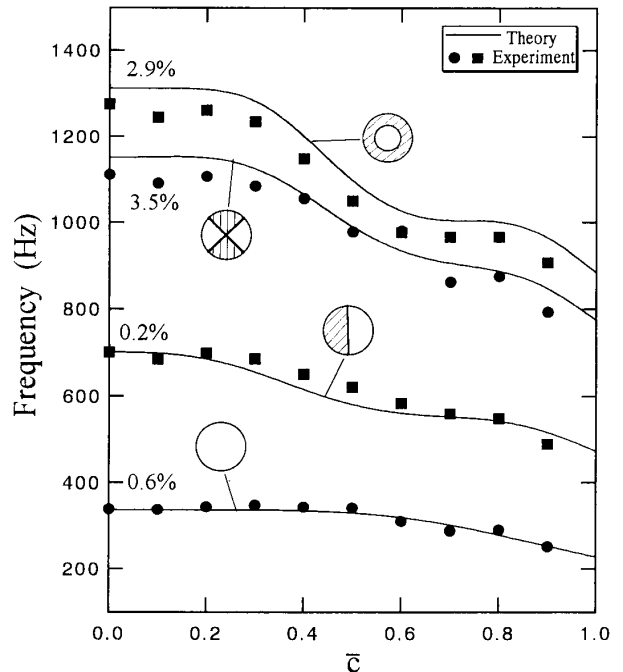
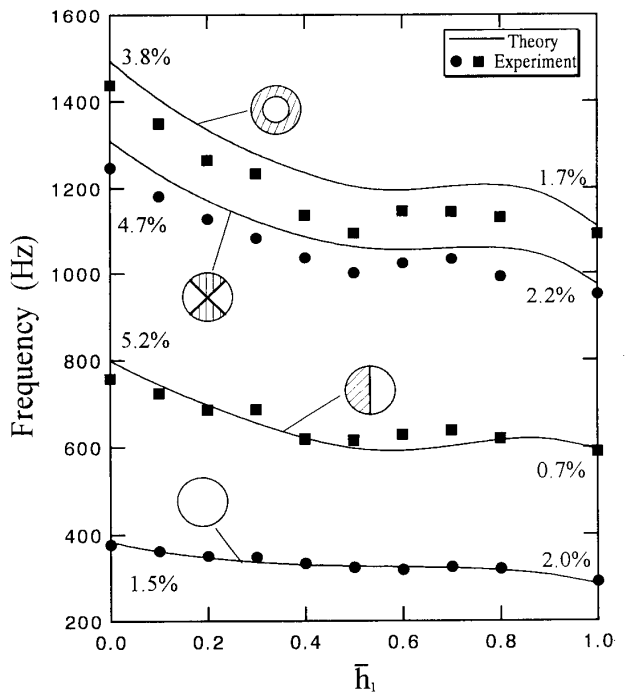


Fig. 5 Modes of vibration ( $\bar{c}=0.3, \bar{h}_1=0.2$ )

部分では上下の板のたわみは等しいと仮定して理論解析を行った。しかし実際には、振動中ははく離部分は接触する領域としない領域が混在し、上下の板が常に接触しているという仮定は矛盾を含んでいる。そこで、さまざまなはく離条件をもつ異種材積層円板を製作し



(a) Effect of delamination size ( $\bar{h}_1=0.3$ )



(b) Effect of thickness wise location of delamination ( $\bar{c}=0.3$ )

Fig. 6 Comparison between experimental and theoretical frequencies

て振動実験を行い、理論結果がいずれの場合も測定した固有振動数とよく一致することを確認した。したがって、今回の解析モデルは矛盾を含んでいるとはいえ、積層円板の自由振動特性に及ぼすはく離の影響を調査する際には、簡単でしかも有効な方法といえる。また、はく離円周縁に作用する面内力は、はく離による固有振動数の減少を抑制する傾向にあること、クラック界面に作用する接触力の分布状態などが明らかになった。

最後に、実験を手伝っていただいた井戸川剛君(鹿児島大学学部生)に感謝の意を表す。

### 文 献

- (1) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y. and Gibby, J. A., *J. Sound Vib.*, **84** 4(1982), 491-502.
- (2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S., *J. Sound Vib.*, **125** 3(1988), 441-461.
- (3) Tracy, J. J. and Pardoan, G. C., *J. Compos. Mater.*, **23** 12(1989), 1200-1215.
- (4) Shen, M. H. and Grady, J. E., *AIAA J.*, **30** 5(1992), 1361-1370.
- (5) Hu, J. S. and Hwu, C., *AIAA J.*, **33** 10(1995), 1911-1918.
- (6) 有富正男・隈元健・小田美紀男・戸谷眞之, 機論, **65** 638, C(1999), 3943-3950.
- (7) Chang, T. P. and Liang, J. Y., *Int. J. Solids Struct.*, **35** 12(1998), 1199-1217.
- (8) Luo, H. and Hanagud, S., *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 1501-1519.
- (9) 関根英樹・胡寧・夏目卓也・福永久雄, 機論, **63** 608, A(1997), 787-793.
- (10) 有富正男・真壁弘・小田美紀男・戸谷眞之, 機論, **67** 654, C(2001), 300-308.
- (11) 有富正男・平山将行・小田美紀男・戸谷眞之, 日本航空宇宙学会西部支部講演会講演集, (2000-11), 147-150.
- (12) 関谷社・浜田実・角誠之助, 平板構造設計便覧, (1982), 170, 朝倉書店.