

一様ばりの横振動時における端末条件 (第4報)

——まくら片持ばりの振動数方程式と振動モード——

有 富 正 男
(受理 昭和57年5月31日)

END CONDITIONS FOR FLEXURAL VIBRATION OF UNIFORM BARS (4th Report-Frequency Equations and Mode Shapes for Propped Cantilever)

Masao ARITOMI

In this fourth report, the transverse free vibrations of a propped cantilever which is a uniform bar with one end clamped, other end simply supported have been investigated by the use of the analytical technique mentioned in the previous work.

Following the three previous reports, also here the modified expressions of the frequency equations and mode shapes different from their classical expressions for the propped cantilever have been obtained by the above mentioned technique.

1 結 言

第1報において、一様ばりが自由横振動を行う際、各端末に発生する支点変位と支点抗力の間に成立する関係を一般的に求め、その関係を振動端末条件と呼んだ¹⁾。続いて、第2報では両端支持ばりと片持ばりを、また第3報では両端固着ばりをそれぞれ取り上げ、それらのはりに対する振動端末条件を利用すれば、はりのたわみ形を表わす振動モード曲線の表現式が、多様な形で表わされ、しかもその振動モード曲線と端末条件の間の対応関係が明確にできることを述べた^{2), 3)}。

この第4報では、これらの報告に引き続き、一様なまくら片持ばりを取り上げる。ただし、ここでまくら片持ばりと呼んだものは、一端固着、他端支持のほりを意味する。本報告書では、このまくら片持ばりの振動数方程式の在来形を変形し、それらを使用して、振動モードと端末条件の対応関係を明確にしている。そしてまた、第2報および第3報で述べた両端支持ばりや片持ばり、あるいは両端固着ばりのときと同様に、まくら片持ばりに対しても、振動モード曲線の表現式が多様な形で表現可能となることを、この報告書は述べている。

なお、本報告書では左端が支持、右端が固着のほりを

を主題材として取り上げ、はり左端がまくら支持された場合について解析を進めることにしている。したがって、左端を固着へ、また右端を支持へと、設定条件を変更した場合のほりについては簡単にふれることとする。

2 振動次数方程式と振動端末条件

はりの振動を最も一般的に取り扱う場合の運動方程式としては、せん断変形や断面の回転慣性の影響もその中に考慮した Timoshenko の方程式⁴⁾を使用することが考えられる。しかし、この方程式を使用した場合は取り扱い数式が複雑となり、得られた結果の本質を端的に理解することが困難となる。この点を考慮して本論文ではこれまでのところ、断面回転慣性やせん断変形を無視した Bernoulli-Euler の方程式を、はりの振動方程式として採用してきた。ここでも、この Bernoulli-Euler の方程式から出発して振動端末条件を得るときの計算手順を、以下の説明の便宜上、第1報に従ってそれを要約しておく¹⁾。ただし、これらの理論が Timoshenko の方程式を使用した場合でも定性的に成立することはもちろんである。

2.1 振動次数方程式

長さ l , 曲げ剛性 EI , 単位長さ当たりの質量 ρ_l の一様ばりが, 自由振動を行う際, 図1に示すように左端 A 点を座標原点とし, はりの軸線に沿って右端 B 点の方向に x 軸を取る. そしてまた鉛直下方に w 軸を取り, はりのたわみをこの w で表わすことにする. さらに, はりの両端における最大変位を δ_A, δ_B および θ_A, θ_B で表わし, また支持反力と反力モーメントの最大振幅値を, それぞれ R_A, R_B および M_A, M_B で表わすことにする.

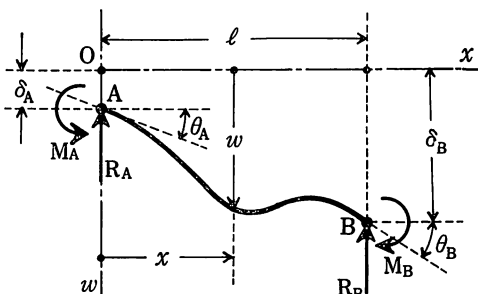


図1 はりのたわみ線

さて, 断面回転慣性とせん断による影響を無視した Bernoulli-Euler の振動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

となるが, 本式の解は第1報の(3)式によれば

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \sin(\omega_n t + \alpha_n) \quad \dots\dots (2)$$

で与えられる¹⁾. この(2)式中の $\varphi_n(x)$ は一般に振動学という正規関数に該当するわけであり, この関数 $\varphi_n(x)$ は, 左端 A における

$$\left. \begin{aligned} [\varphi]_{x=0} &= \delta_A, \quad \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=0} = \theta_A \\ \left[EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right]_{x=0} &= M_A, \quad \left[EI \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right]_{x=0} = -R_A \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3)$$

の境界条件を使用すれば

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \frac{1}{2EI\lambda_n^3} [(EI\lambda_n^2)\lambda_n \delta_A (\cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x) \\ & + (EI\lambda_n^2)\theta_A (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \\ & + \lambda_n M_A (\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x) \\ & - R_A (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x)] \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

と表わされる. 本式は第1報に(10)式として示しておいたものであり, 本論文では便宜上それを振動モ-

ド曲線と呼んでいる¹⁾. この(4)式の場合その中の λ_n が未知量であるから, 関数 $\varphi_n(x)$ を確定させるためには, まず λ_n の値を決定しておかねばならない. ところがここで

$$\lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\rho_l}{EI} \omega_n^2}, \text{ あるいは } \omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_l}} \quad \dots\dots (5)$$

の関係があり, λ_n の値を決定することは, 結局のところ固有円振動数 ω_n を求めることを意味する. この意味で次は, ω_n の値, つまり λ_n の値を決定しなければならないが, それは右端 B における変位と抗力の値を使用して, (3)式と同様な境界条件を利用すれば実行できる.

よってここに, (3)式でその右辺の値をそれぞれ B 端の値に置き換えて, 右端 B における境界条件を示すと, それは

$$\left. \begin{aligned} [\varphi]_{x=l} &= \delta_B, \quad \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=l} = \theta_B \\ \left[EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right]_{x=l} &= M_B, \quad \left[EI \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right]_{x=l} = R_B \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

のように表わされる. そこで, この条件を(4)式に適用して整理し, かつ λ_n はそれを λ と略記することになれば

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \cos \lambda l - \lambda [(EI\lambda^2)\delta_A - M_A] \sin \lambda l \\ = [(EI\lambda^2)\theta_B - R_B] \\ \lambda [(EI\lambda^2)\delta_A - M_A] \cos \lambda l + [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \sin \lambda l \\ = \lambda [(EI\lambda^2)\delta_B - M_B] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \cosh \lambda l \\ + \lambda [(EI\lambda^2)\delta_A + M_A] \sinh \lambda l \\ = [(EI\lambda^2)\theta_B + R_B] \\ \lambda [(EI\lambda^2)\delta_A + M_A] \cosh \lambda l \\ + [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \sinh \lambda l \\ = \lambda [(EI\lambda^2)\delta_B + M_B] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

が得られる. これら(7)式と(8)式を使用して λl を求めると, λ の値が得られるわけである. しかし, 実際の実用計算に当たっては, (7)式と(8)式を次の形に変形しておくことと便利になる. すなわち, まず(7)式を $\cos \lambda l$ と $\sin \lambda l$ について解くと

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 [(EI\lambda^2)\delta_A - M_A]^2 + [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2 \cos \lambda l \\ = \lambda^2 [(EI\lambda^2)\delta_B - M_B] [(EI\lambda^2)\delta_A - M_A] \\ + [(EI\lambda^2)\theta_B - R_B] [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A - M_A]^2 + [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2\} \sin \lambda l \\ &= \lambda \{[(EI\lambda^2)\delta_B - M_B][(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \\ & \quad - [(EI\lambda^2)\theta_B - R_B][(EI\lambda^2)\delta_A - M_A]\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

が求まり、また次に (8) 式を $\cosh \lambda l$ と $\sinh \lambda l$ について解けば

$$\left. \begin{aligned} & \{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A + M_A]^2 - [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2\} \cosh \lambda l \\ &= \lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B + M_B][(EI\lambda^2)\delta_A + M_A] \\ & \quad - [(EI\lambda^2)\theta_B + R_B][(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \\ & \{\lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A + M_A]^2 - [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2\} \sinh \lambda l \\ &= \lambda \{ - [(EI\lambda^2)\delta_B + M_B][(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \\ & \quad + [(EI\lambda^2)\theta_B + R_B][(EI\lambda^2)\delta_A + M_A] \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(10)$$

が得られる。(9) 式は第1報の (16) 式であり、(10) 式は第1報の (17) 式にほかならない¹⁾。

このようにして、本論文で振動固有数と呼んでいる λl の値は、いま述べた (9) 式と (10) 式の4個のすべてを、同時に満足すべきことがわかる。したがって、(9) 式と (10) 式が固有振動数を決定する振動次数方程式である。ただし、 λl を振動数といった具体的な物理量として取り扱っている振動問題においては、当然のことながら $0 < \lambda l < \infty$ の値が λl に対して採用されなければならない。

2.2 振動端末条件

(9) 式と (10) 式で表わされる4個の式すべてを、同時に満足する振動固有数 λl の値を求めると、(5) 式によりはりの各固有振動数が得られるわけである。ところがこのとき、はりの端末では各固有振動数に対応して、そこに発生する変位と抗力との間には、本論文で振動端末条件と呼んでいる特定の関係が成立する。ここでは、この端末条件式を提示しておく。

いま (7) 式に示した2個の式をそれぞれ2乗して辺々加え、その結果に $\cos^2 \lambda l + \sin^2 \lambda l = 1$ の公式を適用すると

$$\begin{aligned} & [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2 + \lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A - M_A]^2 \\ &= [(EI\lambda^2)\theta_B - R_B]^2 + \lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B - M_B]^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(11)$$

が得られる。ところで、(9) 式は (7) 式より得られたものであるから、この (11) 式は結局のところ、(9) 式でそのいずれかの式から λl の値を求め、この値を同じ (9) 式の別の式に代入した、ということに当たる。したがって、(9) 式のうちのいずれか一つの式と (11) 式とを組合わせた2個の式は、(9) 式で示した2個の

式を代用すると考えてよい。

次に、(8) 式の2個の式を2乗して、その第1式から第2式を辺々引いた後、 $\cosh^2 \lambda l - \sinh^2 \lambda l = 1$ の関係を使用することにより

$$\begin{aligned} & [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2 - \lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_A + M_A]^2 \\ &= [(EI\lambda^2)\theta_B + R_B]^2 - \lambda^2[(EI\lambda^2)\delta_B + M_B]^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(12)$$

が得られ、これは (8) 式から求めた (10) 式で、そのうちのいずれかの式の代りに採用できる。

ここに示した (11) 式と (12) 式中の λ は、前記の (9) 式と (10) 式から λl を求めると得られる。したがって、 λ は既知の値であると考えてよく、(11) 式と (12) 式はとりもなおさず、両端末における変位、支点反力および反力モーメントの間に成立すべき関係式を表わす。つまり、これら両式がこの場合の端末条件である。なお、第3報では、その中に示しておいた (6) 式と (7) 式が、第1報の端末条件を整理すれば得られるということを述べたが、上記の (11) 式と (12) 式は第3報の (6) 式と (7) 式の両辺から共通項をおとした形になっている³⁾。

以上が、本報告書で必要とする事項を、第1報の中から要約したものであって、この第4報ではこれらの結果をまくら片持ばりに適用した場合について述べることにする。

3 振動数方程式

緒言で述べたように本報告書では、A 端が支持、B 端が固着のまくら片持ばりを主題材として取り上げているので、その場合にあらかじめ与えられる境界条件としては

$$\delta_A = 0, M_A = 0, \delta_B = 0, \theta_B = 0 \quad \dots\dots(13)$$

の関係が成立していなければならない。

そこで、この境界条件を (4) 式に代入して、その下付添字の n をすべて省略すると、振動モード曲線 $\varphi(x)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{\theta_A}{2\lambda} \{ \sinh \lambda x + \sin \lambda x \\ & - \frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \} \quad \dots\dots(14) \end{aligned}$$

で表わされる。また、(13) 式の条件を (11) 式と (12) 式に適用すれば

$$\begin{aligned} & [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2 = R_B^2 + \lambda^2 M_B^2 \\ & [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2 = R_B^2 - \lambda^2 M_B^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

が得られるが、これを書き換えるとこのまくら片持ばりに対しては

$$\left. \begin{aligned} R_B^2 &= R_A^2 + (EI\lambda^2)^2 \theta_A^2 \\ M_B^2 &= 2(EI)\theta_A R_A \end{aligned} \right\} \quad \cdots (16)$$

の振動端末条件が成立することになる。

なお、まくら片持ばりの固着端では、固着の定義により必然的に $R_B^2 + \lambda^2 M_B^2 \equiv 0$ の関係が成立するはずであり、かつそこではまた $R_B^2 - \lambda^2 M_B^2 \equiv 0$ の関係が存在した¹⁾。したがって、(15)式により

$$\left. \begin{aligned} (EI\lambda^2)\theta_A + R_A &\equiv 0 \\ (EI\lambda^2)\theta_A - R_A &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (17)$$

とすべきことがわかる。

3.1 振動数方程式の在来形

まず参考のために、境界値問題に対する従来の解法手順を、そのまま踏襲した場合の振動数方程式の求め方を述べておく。すなわち (14) 式へ、 $\delta_B = [\varphi]_{x=l} = 0$ および $\theta_B = [d\varphi/dx]_{x=l} = 0$ の条件を適用すると

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}{\sinh \lambda l - \sin \lambda l} (>0) \quad \cdots (18)$$

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\cosh \lambda l - \cos \lambda l} (>0) \quad \cdots (19)$$

が得られるが、これら両式では左辺が同じ値を表わすので、それらの右辺も相等しいことになる。よって、(18)式と(19)式の右辺を等しくおき、少し変形すれば

$$\tanh \lambda l = \tan \lambda l \quad \cdots (20)$$

となる。本式がまくら片持ばりに対する在来形の振動数方程式であり、この計算手順が従来から採用されている固有値問題の解法に従った振動数方程式の求め方である^{5), 6)}。

さて本報告書では、(9)式と(10)式の振動次数方程式へ、(13)式の境界条件を適用すれば、まくら片持ばりの振動数方程式が求まる、といった第2報より一貫して採用してきた計算手法について述べる。そこでまず、(13)式の境界条件を(9)式に適用すれば、この(9)式の表わす振動次数方程式は、その形が

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \cos \lambda l &= -R_B \\ [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \sin \lambda l &= -\lambda M_B \end{aligned} \right\} \quad \cdots (21)$$

となる。ところがここでは、 $R_B \equiv 0$ 、 $M_B \equiv 0$ の関係が存在し、かつ(17)式の第1式が成立しているの、上式から

$$\cos \lambda l \equiv 0, \quad \sin \lambda l \equiv 0 \quad \cdots (22)$$

であるべきことがわかる。次に、(13)式の境界条件を

(10)式に適用すると、この(10)式で表わされている振動次数方程式としては

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \cosh \lambda l &= R_B \\ [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \sinh \lambda l &= \lambda M_B \end{aligned} \right\} \quad \cdots (23)$$

が得られる。ただし、(21)式と(23)式とを得る計算途中では、それらの両辺に $[(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]$ あるいは $[(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]$ の共通項が含まれるので、ここでは(17)式の関係を利用して、これらの共通項を両辺からおとした形で、(21)式と(23)式とを示しておいた。

ところで、(21)式と(23)式の4個の式から θ_A 、 R_A 、 M_B 、 R_B を消去すれば、振動数方程式が得られるはずである。しかし、そのようにすれば、おびただしい計算手数が要となる。よってここでも前報までと同様に、次のような簡便法によって振動数方程式を求めることにする^{2), 3)}。

すなわち、(21)式において、その第1式を第2式で割れば

$$\frac{R_B}{\lambda M_B} = \frac{1}{\tan \lambda l} \quad \cdots (24)$$

となり、また(23)式で、第1式を第2式で割ると

$$\frac{R_B}{\lambda M_B} = \frac{1}{\tanh \lambda l} \quad \cdots (25)$$

を得る。ところが、これら(24)式と(25)式では左辺が同じ値を表わすので、それらの右辺は必然的に相等しいことになる。よって

$$\tanh \lambda l = \tan \lambda l \quad \cdots (26)$$

が求まり、この(26)式は境界値問題に対する従来の解法手順で求めた(20)式と一致する。ただし、前にも述べたように、(26)式の根 λl としては、 $0 < \lambda l < \infty$ の範囲の値が採用される。

そこでいま、この $0 < \lambda l < \infty$ の範囲を念頭におけば、(26)式では

$$0 < \tanh \lambda l < 1 \quad \cdots (27)$$

の間の値をとることになり、結果として(26)式の右辺の関数 $\tan \lambda l$ も、その値が

$$0 < \tan \lambda l < 1 \quad \cdots (28)$$

の範囲に存在することになってしまう。

なお、(27)式の関係から、(25)式の $R_B/(\lambda M_B)$ の値は

$$\frac{R_B}{\lambda M_B} > 1 \quad \cdots (29)$$

となるが、このことは、右端 B の固着端における反力 R_B と反力モーメント M_B の値が常に同符号となり、しかもそれらの大きさは $|R_B| > |\lambda M_B|$ の関係

が存在していることを意味する。さらにまた、(16) 式の第2式によれば、左端 A の支持端における傾斜角 θ_A と支持反力 R_A も、常に同符号をもつべきことがわかる。

3.2 振動数方程式の変形

(26) 式の在来形の振動数方程式はその形が簡単であり、振動数を求めるときの実用計算には便利である。しかし、振動モードや端末条件に対する振動数の対応関係を求めるためには、(26) 式を別な表現式に変形しておく都合がよい。その際、(26) 式を満足する振動固有数 λl の存在する範囲も、前もって決定しておく必要がある。それゆえ、この λl の存在範囲を決定するわけであるが、(28) 式によれば $\tan \lambda l$ の値は $0 < \tan \lambda l < 1$ の範囲にある。このことは λl の値が第1象限と第3象限にのみ存在することを意味する。しかも、2・1節の最後のところでも述べたように、 λl の値としては $0 < \lambda l < \infty$ の範囲の値が採用される。

したがって、 λl の値をその最小値から順次増大してゆく順に、ここで $\lambda_0 l, \lambda_1 l, \lambda_2 l, \lambda_3 l, \dots$ と書いて、これら λl の存在範囲を $0 < \tan \lambda l < 1$ の条件で表わしてゆけば、まず最初の値 $\lambda_0 l$ は $0 < \lambda_0 l < \pi/4$ の範囲の第1象限内に存在することになる。そして次の値 $\lambda_1 l$ は $\pi < \lambda_1 l < (\pi + \pi/4)$ の第3象限内にあり、続いてその次の値 $\lambda_2 l$ は $2\pi < \lambda_2 l < (2\pi + \pi/4)$ の第1象限内に、またさらに引き続く次の値 $\lambda_3 l$ の存在範囲は $3\pi < \lambda_3 l < (3\pi + \pi/4)$ の第3象限内などとなり、以下 λl は順繰りに第1象限内、第3象限内の値を交互にとることになる。

ところが、最初の $0 < \lambda_0 l < \pi/4$ の範囲内では必ず $\tanh \lambda l < \tan \lambda l$ の関係が存在し、そこでは (26) 式の振動数方程式 $\tanh \lambda l = \tan \lambda l$ が満足されない。この理由から最初の第1象限内の $\lambda_0 l$ の値だけは、除外しなければならない。よって、 n を振動次数とおけば、 $\lambda_n l$ の値は n が奇数のときには第3象限内に存在し、また n が偶数のときにはそれが第1象限内に存在することを知る。そこで、これまでのことをまとめて表わすと、 $\lambda_n l$ の存在範囲は

$$n\pi < \lambda_n l < (n+1/4)\pi, (n=1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

で表わされることになる。

これで奇数次振動、偶数次振動に対する $\lambda_n l$ の存在範囲の区別が判明したので、次は奇数次、偶数次の各振動に対して、それぞれの区別ができるような振動数方程式の形について考えてみることにする。このこと

を実施するためには、(26) 式の振動数方程式を、以下のように変形してゆけばよい。すなわち、(26) 式の両辺を2乗し、さらにその両辺に1を加えてみれば

$$1 + \tan^2 \lambda_n l = 1 + \tanh^2 \lambda_n l \quad (31)$$

となるが、ここで

$$1 + \tan^2 \lambda_n l = \frac{1}{\cos^2 \lambda_n l} \quad (32)$$

の関係を (31) 式の左辺に代入して、 $\cos \lambda_n l$ を求めると

$$\cos \lambda_n l = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}}, \text{ もしくは } \cos \lambda_n l = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \quad (33)$$

が得られる。ただし、この (33) 式から得られる $\lambda_n l$ の値は、(30) 式の範囲に存在しなければならないので、(33) 式を使用して $\lambda_n l$ の値を求めるには、次のような配慮が必要である。すなわち、図2は $\lambda_n l$ を横軸にとり、 $y_1 = \cos \lambda_n l$ と $y_2 = \pm 1/\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}$ を縦軸にとって示したものであるが、本図によればその中の y_1 曲線と y_2 曲線の交点から (33) 式を満足する $\lambda_n l$ の値が求まる。

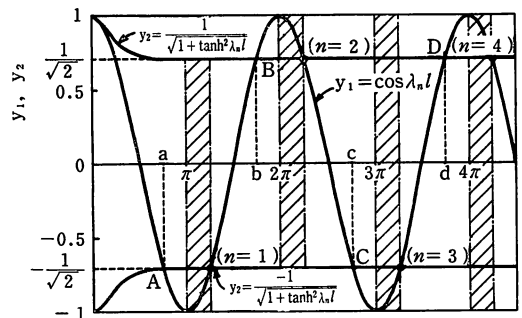


図2 $\cos \lambda_n l = \pm 1/\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}$ の根の図式解法

ところが、この図2からわかるように、(33) 式を満足する $\lambda_n l$ の値は (30) 式の範囲以外にも存在し、不都合をきたす。たとえば、図の A 点、B 点、C 点、D 点、……の交点から得られる a, b, c, d, \dots の $\lambda_n l$ の値がそれであり、これら a, b, c, d などの不都合な $\lambda_n l$ の値は、(33) 式を満足する $\lambda_n l$ の値から除外する必要がある。このような $\lambda_n l$ の不都合値を除外し、(30) 式を満足する適切な $\lambda_n l$ の値の存在範囲を示したものが、図2の斜線を施した部分である。図の斜線部の値のみを採用すると、(33) 式の第1式が奇数次振動における $\lambda_n l$ の値の満足しなければならない関係式で

あり、その第2式は偶数次振動において成立する関係式であることを知る。

次に全く同様にして、今度は (26) 式を

$$\frac{1}{\tan \lambda_n l} = \frac{1}{\tanh \lambda_n l} \quad \dots\dots (34)$$

と書いてその両辺を2乗し、その結果の両辺へ1を加えてみると

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \lambda_n l} = 1 + \frac{1}{\tanh^2 \lambda_n l}, \text{つまり}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda_n l} = \frac{1 + \tanh^2 \lambda_n l}{\tanh^2 \lambda_n l} \quad \dots\dots (35)$$

が得られる。したがって、これから

$$\sin \lambda_n l = -\frac{\tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}}, \text{もしくは}$$

$$\sin \lambda_n l = \frac{\tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \quad \dots\dots (36)$$

の関係を得る。これを先程の図2と同様に、 $y'_1 = \sin \lambda_n l$, $y'_2 = \pm \tanh \lambda_n l / \sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}$ において描いたものが図3である。

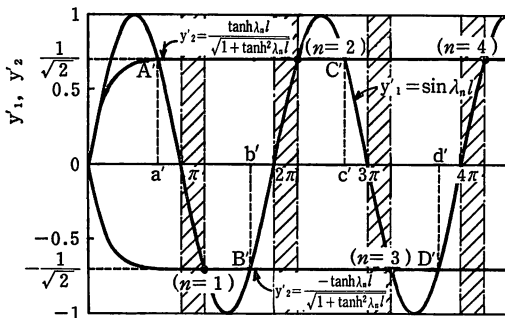


図3 $\sin \lambda_n l = \pm \tanh \lambda_n l / \sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}$ の根の図式解法

この図3をみると、(36) 式の第1式は奇数次振動のときに、またその第2式は偶数次振動のときに、それぞれ振動固有数 $\lambda_n l$ の値が満足すべき関係式であることがわかる。ただし、この (36) 式においても (33) 式の場合と同様に、(30) 式の範囲外に存在する a' , b' , c' , d' などの $\lambda_n l$ の値を除外する必要がある、それらの適用に当たっては (30) 式の付帯条件を併用しなければならない。このために、図3でも斜線部内の $\lambda_n l$ の値のみが採用できる。

以上、まくら片持ばりに対する振動数方程式の在来形を変形すれば、(33) 式と (36) 式が得られることを述べたが、次の4章と5章においては、これらの式を使用して振動モードと端末条件との対応関係を明確に

してゆくことにする。

4 端末条件と振動次数の対応

いま述べたように、本報告書ではまくら片持ばりの自由横振動について、その振動モードとそのときの端末条件との対応を求めるわけであるが、この目的のためには (33) 式や (36) 式のように、振動次数を奇数次と偶数次に区別して、それぞれに対応する振動モードや端末条件を別々に考えてゆけばよい。すなわち、振動モードはそれぞれの振動数に対応するわけであるから、振動モードと端末条件との対応関係を考えるとときには、端末条件と振動次数との対応を、あらかじめ求めておく都合がよい。ただし、以下では混乱の生ずる恐れもないゆえ、 λ_n の記号を適宜 λ と簡略して使用してゆくことにする。

さて、まくら片持ばりの場合、(26) 式から得られるあらゆる振動数に対しては、(16) 式の端末条件が常に成立している。ところが、これら (16) 式と (26) 式の形のままで、端末条件と振動数の対応関係がいささか不明確である。したがってここでは、振動数と端末条件に対して、それらの間の対応関係を明確にすることについて考えてみる。

そのために、(16) 式の端末条件を

$$R_B = R_A \sqrt{1 + \frac{(EI\lambda^2)^2 \theta_A^2}{R_A^2}}, \text{あるいは}$$

$$R_B = -R_A \sqrt{1 + \frac{(EI\lambda^2)^2 \theta_A^2}{R_A^2}} \quad \dots\dots (37)$$

および

$$M_B = (EI\lambda) \theta_A \sqrt{2 \frac{R_A}{(EI\lambda^2) \theta_A}}, \text{あるいは}$$

$$M_B = -(EI\lambda) \theta_A \sqrt{2 \frac{R_A}{(EI\lambda^2) \theta_A}} \quad \dots\dots (38)$$

のように区分しておき、それぞれの端末条件に対応する振動次数を、(21) 式と (23) 式の振動次数方程式によって求める方針をとる。その際、(37) 式と (38) 式の端末条件式に含まれている $R_A / (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値も、振動固有数 λl で表わしておく必要がある。

よってここで、(37) 式中の $R_A / (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値として (19) 式を使用すると、(37) 式の端末条件は

$$R_B = R_A \frac{\sqrt{2(\cosh^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l)}}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}$$

$$\text{あるいは}$$

$$R_B = -R_A \frac{\sqrt{2(\cosh^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l)}}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \quad \dots\dots (39)$$

と与えられ、本式の第1式、第2式はそれぞれ、(37)式の第1式、第2式と等価なものとなる。全く同様にして、(38)式の端末条件は、(18)式の $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値を採用すれば

$$\left. \begin{aligned} M_B &= (EI\lambda^2)\theta_A \sqrt{2} \frac{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}{\sinh \lambda l - \sin \lambda l} \\ \text{あるいは} \\ M_B &= -(EI\lambda^2)\theta_A \sqrt{2} \frac{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}{\sinh \lambda l - \sin \lambda l} \end{aligned} \right\} \dots\dots (40)$$

となるが、本式では第1式が(38)式の第1式と等価であり、また第2式は(38)式の第2式と等価な式となる。

このように(16)式の端末条件を(37)式と(38)式とに区分し、さらにこれら(37)式と(38)式をそれぞれ(39)式と(40)式の形に変形しておけば、これらの端末条件と振動次数の対応関係は、(21)式と(23)式の振動次数方程式を利用して求めることができる。しかし、そのためには(21)式と(23)式の振動次数方程式の形も、それらを次のように変形しておくほうがよい。すなわち、まくら片持ばりの場合には、(22)式より $\cos \lambda l \neq 0$ 、かつ $\sin \lambda l \neq 0$ の関係が存在し、これらの関数は乗法計算のときの乗数として、それらを利用することが許容される。よって、(21)式の第1式に $\cosh \lambda l (>0)$ を乗じたものから、(23)式の第1式に $\cos \lambda l (\neq 0)$ を乗じたものを辺々引けば

$$2R_A \cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l = -R_B (\cosh \lambda l + \cos \lambda l) \dots\dots (41)$$

が得られる。次にまた(21)式の第2式に $\sinh \lambda l (>0)$ を乗じた式と、(23)式の第2式に $\sin \lambda l (\neq 0)$ を乗じた式とを辺々加え合わせると

$$\begin{aligned} 2(EI\lambda^2)\theta_A \sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l \\ = -\lambda M_B (\sinh \lambda l - \sin \lambda l) \dots\dots (42) \end{aligned}$$

を得る。したがって、(41)式は(21)式と(23)式のそれぞれ第1式の2個の式のいずれか1個の式の、また(42)式は(21)式の第2式と(23)式の第2式の2個の式のうちのいずれか1個の式の、それぞれ代用をすることになる。このように、(21)式と(23)式を(41)式と(42)式のように変形しておけば、これら(41)式と(42)式を使用して端末条件と振動次数との対応関係が以下のように明確にできる。

[i] 条件 $R_B = R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ のとき

(37)式の第1式を表わすこの条件は、それと等価な(39)式の第1式で置き換えられる。よって、この(39)式の第1式の関係を(41)式に代入すれば

$$2 \cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l = -\sqrt{2(\cosh^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l)} \dots\dots (43)$$

となるが、この(43)式の両辺を2乗して $\cos^2 \lambda l$ を求めると

$$\cos^2 \lambda l = \frac{\cosh^2 \lambda l}{2 \cosh^2 \lambda l - 1} \dots\dots (44)$$

となる。さらにいま、この(44)式へ

$$\cosh \lambda l = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \lambda l}} (>0) \dots\dots (45)$$

の公式を代入すれば

$$\cos^2 \lambda l = \frac{1}{1 + \tanh^2 \lambda l} \dots\dots (46)$$

となる。これから $\cos \lambda l$ の値としては正負2個のものが得られる。しかしながら、この $\cos \lambda l$ を含む前記の(43)式の視察によれば、その左辺の中では $\cosh \lambda l > 0$ であり、しかも右辺の平方根の中が正の値をとるので、この場合は $\cos \lambda l < 0$ とすべきことがわかる。このため、 $\cos \lambda l$ としては負の値を採用して、それが

$$\cos \lambda l = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda l}} (<0) \dots\dots (47)$$

で表わされることになる。したがって、(39)式の第1式で表わされる端末条件、つまり(37)式の第1式が表わす端末条件に対しては(47)式が成立し、この(47)式は(33)式の第1式と一致する。ところが、(33)式の第1式は奇数次振動に対して成立していたわけであるから、(37)式の第1式が表わす端末条件 $R_B = R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ は、奇数次振動のときに成立する関係式であるとの結論を得る。

次に、本報告書では端末条件と振動モードとの対応を求めることも必要である。それゆえ、いま考えている奇数次振動に対応する振動モードについて、あらかじめここでは述べておく。(14)式によると、ある振動固有数 λl に対応する振動モードは、 $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値で決まることがわかる。そのとき、 $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値は(18)式および(19)式で与えられるが、これらは振動次数の奇数値、偶数値を問わず成立する値であった。よって、奇数次振動に対する振動モードを考えるためには、奇数次振動を表わす(47)式を(19)式へ適用して、 $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値を求めておくこととよい。振動モード曲線の具体式は次の5章で述べることにして、いまのところは $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の奇数次振動時の値を以下に示す。

まず(19)式の右辺へ、(45)式および(47)式の関係式を代入すれば、 $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値は

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l} - \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}}{\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l} + \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}} \quad \dots\dots (48)$$

となるが、ここで (27) 式によれば $0 < \tanh \lambda l < 1$ の制限があり、(48) 式ではその右辺の分子が

$$\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l} - \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l} \approx 0 \quad \dots\dots (49)$$

となる。したがって、(48) 式の右辺の分母と分子に $(\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l} + \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l})$ を乗ずると、(48) 式は

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{1 - \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}}{\tanh^2 \lambda l} \quad \dots\dots (50)$$

のように表わすことができる。この結果、振動次数が奇数値をとる場合には、 $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値は (50) 式で与えられることを知る。

[ii] 条件 $R_B = -R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ のとき

この (37) 式の第2式で表わされる条件は、(39) 式の第2式で置き換えられる。よって、この (39) 式の第2式の関係を (41) 式に代入すると

$$2 \cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l = \sqrt{2(\cosh^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l)} \quad (>0) \quad \dots\dots (51)$$

となり、この場合は $\cos \lambda l > 0$ でなければならないことがわかる。ここで、上式と (43) 式とを比較すると、それらの右辺の符号のみが異なるだけであるから、(51) 式の両辺を2乗すれば (43) 式の両辺を2乗して得られた (44) 式と全く同じ結果となる。したがって、前に (44) 式から (47) 式を求めたときと同様にして、この場合は $\cos \lambda l > 0$ であることを考慮すれば

$$\cos \lambda l = \frac{1}{\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l}} \quad (>0) \quad \dots\dots (52)$$

となり、本式は (39) 式の第2式の端末条件、つまり (37) 式の第2式に対して成立する関係式である。ところが、この (52) 式は偶数次の振動数方程式である (33) 式の第2式と一致し、この結果 (37) 式の第2式で表わされる $R_B = -R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ の端末条件は、偶数次振動のときに成立することがわかる。

次にここでもまた、あとで述べる振動モードとの対応を考える便宜上、この偶数次振動に対する $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値を求めておく。そのために、(52) 式と (45) 式の関係を (19) 式に代入すれば、それは

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{1 + \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}}{\tanh^2 \lambda l} \quad \dots\dots (53)$$

の形で与えられることになる。

[iii] 条件 $M_B = (EI\lambda) \theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ のとき

前に述べた $R_B = R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ を表わす (37) 式の第1式の端末条件は、奇数次振動のときに

成立するものであった。ここでは、(38) 式の第1式で示した $M_B = (EI\lambda) \theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ の端末条件について考えてみる。そのために、(42) 式へ (38) 式の第1式と等価な (40) 式の第1式の関係を代入すると

$$2 \sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l = -\sqrt{2(\sinh^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l)} \quad (<0) \quad \dots\dots (54)$$

となり、このとき $\sin \lambda l < 0$ でなければならないことがわかる。ここでさらに、この (54) 式を2乗して $\sin^2 \lambda l$ を求めると

$$\sin^2 \lambda l = \frac{\sinh^2 \lambda l}{2 \sinh^2 \lambda l + 1} \quad \dots\dots (55)$$

を得るが、本式の右辺 $\sinh \lambda l$ に

$$\sinh \lambda l = \frac{\tanh \lambda l}{\sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}} \quad \dots\dots (56)$$

の公式を使用すれば、(55) 式は

$$\sin^2 \lambda l = \frac{\tanh^2 \lambda l}{1 + \tanh^2 \lambda l} \quad \dots\dots (57)$$

となり、この (57) 式からは正負2個の $\sin \lambda l$ の値が得られる。ところが、この場合 $\lambda l > 0$, $\tanh \lambda l > 0$ であり、かつ $\sin \lambda l < 0$ であることを考慮すれば、 $\sin \lambda l$ の値は

$$\sin \lambda l = -\frac{\tanh \lambda l}{\sqrt{1+\tanh^2 \lambda l}} \quad (<0) \quad \dots\dots (58)$$

で表わされることになる。本式は (36) 式の第1式と一致しており、この (36) 式の第1式は奇数次振動に対応する関係式であった。この結果、(38) 式の第1式で示した $M_B = (EI\lambda) \theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ の条件は奇数次振動のときに成立すべき端末条件であるといえる。このとき $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値は、(58) 式と (56) 式の関係を (18) 式に代入することにより

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{1 - \sqrt{1-\tanh^2 \lambda l}}{\tanh^2 \lambda l} \quad \dots\dots (59)$$

の形で与えられ、これは (50) 式と一致している。

以上のことより、次の結論が得られる。すなわち、振動次数 n が奇数値をとる場合には、端末条件として

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= R_{A(n)} \sqrt{1 + (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})^2 / R_{A(n)}^2} \\ M_{B(n)} &= (EI\lambda_n) \theta_{A(n)} \sqrt{2R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 3, 5, \dots\dots) \quad \dots\dots (60)$$

が同時に成立しており、かつそのときの $R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ は (50) 式あるいは (59) 式により

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{A(n)}}{(EI\lambda_n^2)\theta_{A(n)}} &= \frac{1 - \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda l} \\ (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (61)$$

を満足する値でなくてはならない。そこでこの (61) 式を (60) 式に適用すると、端末条件は振動固有数 $\lambda_n l$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= R_{A(n)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}} \\ M_{B(n)} &= (EI\lambda_n)\theta_{A(n)} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}}{\tanh \lambda_n l} \\ (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (62)$$

のような形で表わすことができる。

なお (60) 式以降では、奇数次振動を明示するために、振動次数を n として端末抗力および端末変位を $R_{A(n)}$, $\theta_{A(n)}$ などと表わし、また振動固有数を $\lambda_n l$ の形であらかじめ表現しておいた。

[iv] 条件 $M_B = -(EI\lambda)\theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ のとき前記の (52) 式のすぐ下で述べたように、(37) 式の第2式で表わされる $R_B = -R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ の端末条件は、偶数次振動のときに成立するものであったが、ここでは (38) 式の第2式で示しておいた $M_B = -(EI\lambda)\theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ の端末条件について考えてみる。そのためにいま、(38) 式の第2式と等価な (40) 式の第2式を (42) 式に代入すると

$$2 \sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l = \sqrt{2} (\sinh^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l) \dots\dots (63)$$

となる。本式の右辺は常に正の値をとるので、この場合には $\sin \lambda l > 0$ の関係が存在することになる。ここでいま、(63) 式の両辺を2乗して $\sin^2 \lambda l$ について解いてみると、その結果は (55) 式と全く同じ式になる。よって、この (55) 式から $\sin \lambda l$ の値としては、この場合 $\sin \lambda l > 0$ であることを考慮して

$$\sin \lambda l = \frac{\tanh \lambda l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda l}} (>0) \dots\dots (64)$$

が得られ、これは (36) 式の第2式と一致する。この (36) 式の第2式は偶数次振動に対する振動数方程式であったから、結論として (38) 式の第2式の端末条件 $M_B = -(EI\lambda)\theta_A \sqrt{2R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)}$ は、偶数次振動のときに成立することを知る。次に、このとき $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の値は、上式および (56) 式の関係を (18) 式に代入することにより

$$\frac{R_A}{(EI\lambda^2)\theta_A} = \frac{1 + \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda l}}{\tanh^2 \lambda l} \dots\dots (65)$$

の形で与えられるのが、この (65) 式を前記の (53) 式と比較してみると、両者は完全に一致していることがわかる。

ところが、(53) 式は $R_B = -R_A \sqrt{1 + (EI\lambda^2 \cdot \theta_A)^2 / R_A^2}$ の端末条件、つまり (37) 式の第2式から得られたものであり、かつこの (37) 式の第2式の条件は偶数次振動のときに成立する値であった。したがってここで、次の結論が得られる。すなわち、振動次数を再度 n で表わせば、偶数次振動に対する端末条件としては

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= -R_{A(n)} \sqrt{1 + (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})^2 / R_{A(n)}^2} \\ M_{B(n)} &= -(EI\lambda_n)\theta_{A(n)} \sqrt{2R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})} \\ (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (66)$$

が成立し、かつこの偶数次振動のとき、 $R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ は (53) 式あるいは (65) 式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{A(n)}}{(EI\lambda_n^2)\theta_{A(n)}} &= \frac{1 + \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \\ (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (67)$$

と与えられる。さらに、(66) 式の端末条件は、その中の $R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ のところへ (67) 式の右辺の値を使用することにより

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= -R_{A(n)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}} \\ M_{B(n)} &= -(EI\lambda_n)\theta_{A(n)} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}}{\tanh \lambda_n l} \\ (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (68)$$

のような形で表わすこともできる。

以上、端末条件と振動数方程式および $R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値の三者に対し、それらの間の対応関係を明示する目的で、奇数次振動と偶数次振動を区別して考えてきたが、最後に $n=1, 2, 3, \dots$ として、(60) 式と (66) 式をまとめると、まくら片持ばりの端末条件は (16) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= (-1)^{n+1} R_{A(n)} \sqrt{1 + (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})^2 / R_{A(n)}^2} \\ M_{B(n)} &= (-1)^{n+1} (EI\lambda_n)\theta_{A(n)} \sqrt{2R_{A(n)} / (EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})} \\ (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (69)$$

のように表わすことができる。この (69) 式の端末条件はまた、(62) 式と (68) 式をまとめることにより

$$\left. \begin{aligned} R_{B(n)} &= (-1)^{n+1} R_{A(n)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(-1)^n \sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}}} \\ M_{B(n)} &= (-1)^{n+1} (EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1+(-1)^n \sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}}}{\tanh \lambda_n l} \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (70)$$

のような振動固有数 $\lambda_n l$ を含んだ表現形で与えることもできる。

なお、上記の (70) 式で、その第 1 式を第 2 式で割って固着端の端末抗力の比を求めると、その値は

$$\left. \frac{R_{B(n)}}{\lambda_n M_{B(n)}} = \frac{\tanh \lambda_n l}{1+(-1)^n \sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}} \cdot \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} \right\} \dots (71)$$

と表わされるが、本式の右辺の $R_{A(n)}/(EI \lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値として、(61) 式と (67) 式をまとめた

$$\left. \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} = \frac{1+(-1)^n \sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \right\} \dots (72)$$

の関係を使用すれば、 $R_{B(n)}/(\lambda_n M_{B(n)})$ の値は

$$\frac{R_{B(n)}}{\lambda_n M_{B(n)}} = \frac{1}{\tanh \lambda_n l}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots (73)$$

と与えられることになる。以上得られた結果の妥当性は、(73) 式が (25) 式と一致する、ということにより容易に確認することができる。

さて、これまでは本報告書で主題材として取り上げた A 端支持、 B 固着のまくら片持ばりについて述べてきたが、ここでいま A 端を固着に変更し、 B 端を支持に変更した場合についてふれておく。その場合は、(13) 式のかわりに

$$\delta_A=0, \theta_A=0, \delta_B=0, M_B=0 \dots (74)$$

の境界条件が存在し、この条件を (11) 式と (12) 式に適用すれば、振動端末条件は (16) 式と類似した

$$\left. \begin{aligned} R_A^2 &= R_B^2 + (EI \lambda^2)^2 \theta_B^2 \\ M_A^2 &= -2(EI) \theta_B R_B \end{aligned} \right\} \dots (75)$$

で与えられる。ただし、(75) 式は振動次数 n のあらゆる値に対して成立するものであり、その中では λ_n , $R_{A(n)}$, $R_{B(n)}$, $M_{A(n)}$, $\theta_{A(n)}$ と記すべきであるが、ここでは n を省略した形にしておいた。この (75) 式は (16) 式の下付添字 A を B に、また B を A へそれぞれ変更するだけでただちに得られるものであって、それは第 1 報の (66) 式と (67) 式にほかならない¹⁾。このように、 A 端固着、 B 端支持のまくら片持ばりに

対する端末条件は、(16) 式における添字 A と B を交換し、かつ (16) 式の第 2 式の符号を負に変更すれば得られる。したがって、本報告書では A 端支持、 B 端固着のまくら片持ばりを主題材として取り扱ってきたとはいえ、これまでに述べた理論の展開は、 A 端を固着へ、 B 端を支持へ変更した場合のはりに対しても、適用できることになる。

5 振動モード曲線

まくら片持ばりの振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ は (14) 式で表わされる。いま、それを再記すると

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\} \dots (76) \end{aligned}$$

となり、ある振動固有数 $\lambda_n l$ に対応する振動モードは、 $R_{A(n)}/(EI \lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値で決まる。ところが、 $R_{A(n)}/(EI \lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値に対しては、多様な表現が存在し、それは (18) 式、(19) 式および (72) 式のように表わされるので、これらの式をまとめると

$$\begin{aligned} \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} &= \frac{1+(-1)^n \sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \\ &= \frac{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l} = \frac{\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l}{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l} \dots (77) \end{aligned}$$

が得られる。よって、 $\varphi_n(x)$ としては様々な表現が可能であることを知る。

さて、ここでは端末条件と振動モード曲線との対応を明らかにする目的で、端末条件との対応関係が明確になっている (61) 式と (67) 式を (76) 式に適用して、それらに対応する振動モード曲線を求めることにする。まず、振動次数が奇数値をとる場合、まくら片持ばりの振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ は、(76) 式の $R_{A(n)}/(EI \lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ のところへ、(61) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\sqrt{1-\tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\} \\ &\quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots (78) \end{aligned}$$

の形でわされる。上式によれば、 $\varphi_n(x)$ は支持端の傾斜角で決まることがわかる。この振動モード曲線に対応しては、(60) 式の端末条件が成立し、かつこのときの $\lambda_n l$ の値は (33) 式の第 1 式もしくは (36) 式の第 1 式によって表わされる振動数方程式から得られる。しかしながら、そのときは (30) 式の付帯条件を併用

する必要があるので、図2と図3を使用して $\lambda_n l$ の値を求めなければならない。

次に振動次数が偶数値をとるときのモード曲線 $\varphi_n(x)$ は、(76)式の $R_{A(n)}/(EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ のところに、(67)式を代入すると

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x - \frac{1 + \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad (79)$$

となる。この式の $\lambda_n l$ の値は(33)式の第2式もしくは(36)式の第2式で表わされている振動数方程式から得られるが、具体的には図2と図3を使用して求められる。また、そのときの端末条件は(66)式で与えられる。

以上、まくら片持ばりに対する振動モード曲線と、それに対応する端末条件を明確にする意味で、振動次数が奇数値をとる場合と偶数値をとる場合について、別々に考察してきた。よってここでは、振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ が n の値のすべての整数値に対して成立するように、(78)式と(79)式をまとめて総括した表現にしてみると

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x - \frac{1 + (-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (80)$$

が得られる。このようにして、まくら片持ばりにおいては、振動モード曲線が(80)式で表わされるが、ここで(76)式の $R_{A(n)}/(EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値として、(18)式の右边を使用すると

$$\varphi(x) = \frac{\theta_A}{2\lambda} \left\{ \sinh \lambda x + \sin \lambda x - \frac{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}{\sinh \lambda l - \sin \lambda l} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right\} \quad (81)$$

が求まる。ただし、本式は振動次数 n が奇数次、偶数次を問わず、すべての整数値 n に対して成立するので、この(81)式では λ_n を λ と簡略化しておいた。そこで、以下当分の間はこの略記号 λ を使用してゆくことにして、次に(76)式でその中の $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ のところへ、(19)式の右边を代入すれば

$$\varphi(x) = \frac{\theta_A}{2\lambda} \left\{ \sinh \lambda x + \sin \lambda x \right.$$

$$\left. - \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\cosh \lambda l - \cos \lambda l} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right\} \quad (82)$$

を得る。

これら(81)式と(82)式は、従来からも類似表現式が採用されている^{5), 7)}。しかし、ここで示した(80)式、(81)式および(82)式の3個の式は、いずれも支持端の傾斜角 θ_A で表現されており、この点が従来とは幾分異なった表現法であると考えられる。このように、振動のたわみ形を支持端の傾斜角 θ_A で表現しておけば、固有振動数の値と支持端の傾斜角の値とを計測することにより、振動中のたわみを実験的に検定しようとするときには便利である。

なおこの場合、(76)式を

$$\varphi(x) = \frac{R_A}{2EI\lambda^3} \left\{ \frac{(EI\lambda^2)\theta_A}{R_A} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) - \sinh \lambda x + \sin \lambda x \right\} \quad (83)$$

と書いてみてもわかるように、これまでの $R_A/(EI\lambda^2 \cdot \theta_A)$ の逆数値を採用すれば、 $\varphi(x)$ はいずれも R_A で置き換えて表現できること、もちろんである。

次に、この場合の主題材ばりで設定してきた A 端支持、 B 端固着の条件をここで変更して、 A 端固着、 B 端支持のまくら片持ばりについて考えてみると、このはりに対しては(74)式の境界条件が存在するわけである。よって、そのときの振動モード曲線は、(74)式の条件を(4)式に適用して

$$\varphi(x) = \frac{M_A}{2EI\lambda^2} \left\{ \cosh \lambda x - \cos \lambda x - \frac{R_A}{\lambda M_A} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right\} \quad (84)$$

と表わされ、本式はまた

$$\varphi(x) = \frac{R_A}{2EI\lambda^3} \left\{ \frac{\lambda M_A}{R_A} (\cosh \lambda x - \cos \lambda x) - \sinh \lambda x + \sin \lambda x \right\} \quad (85)$$

とも表わされる。いま(84)式を例にとれば、その式中の端末抗力比 $R_A/(\lambda M_A)$ の値が、第1報の(60)式と(61)式¹⁾、および本報告書の(24)式と(25)式などで与えられているので、それらをまとめてみると

$$\frac{R_A}{\lambda M_A} = \frac{\cosh \lambda l - \cos \lambda l}{\sinh \lambda l - \sin \lambda l} = \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} = \frac{1}{\tan \lambda l} = \frac{1}{\tanh \lambda l} \quad (86)$$

となり、(77)式と同様にこの場合も $R_A/(\lambda M_A)$ の値は多様な形で表現できる。この結果、(84)式もしくは

(85) 式の振動モード曲線に対しても多様な表現形が存在する。

ところで第3報において、長さ l の両端固着ばりが偶数次振動を行う場合には、その振動たわみ形が、径間の中央点に対して左右逆対称となり、しかもそのたわみ形は中央点を支持された長さ $l/2$ のまくら片持ばりのたわみと同じ形になる、ということを書いておいた。つまり、長さ l の両端固着ばりの偶数次振動に対する振動モード曲線は、座標原点を径間の中央にとれば、第3報の (87) 式すなわち

$$\varphi(\xi) = \frac{M_{B(n)}}{2EI\lambda_n^2} \left\{ \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh(\lambda_n l/2)} - \frac{\sin \lambda_n \xi}{\sin(\lambda_n l/2)} \right\} \quad \dots\dots (87)$$

で表わされる³⁾。ただし、 λ は振動次数 n を用いて、 λ_n の記号で書いておいた。ここでは、本報告書で得られた理論結果を用いて、まくら片持ばりの振動モード曲線が上の (87) 式の形で表現できることを示すことにする。

そのためにまず、(81) 式を

$$\varphi_n(x) = -\frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \frac{\sinh \lambda_n l \cdot \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l} \cdot \left(\frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n l} - \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n l} \right) \quad \dots\dots (88)$$

と変形しておく。この (88) 式は $\theta_{A(n)}$ で表わされているのに対し、前記の (87) 式は $M_{B(n)}$ で表わされている。そこで、(88) 式の $\theta_{A(n)}$ を $M_{B(n)}$ で表わす手段を考えるわけであるが、いま (18) 式の $R_{A(n)}/(EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)})$ の値を (69) 式の第2式に代入してみると

$$\theta_{A(n)} = \frac{(-1)^{n+1} M_{B(n)}}{\sqrt{2} EI \lambda_n} \sqrt{\frac{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l}} \quad \dots\dots (89)$$

が得られ、これを (88) 式の $\theta_{A(n)}$ のところに使用すれば、 $\varphi_n(x)$ が

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n M_{B(n)}}{\sqrt{2} EI \lambda_n^2} \left[\frac{\sinh \lambda_n l \cdot \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l} \right] \cdot \left(\frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n l} - \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n l} \right) \quad \dots\dots (90)$$

のように $M_{B(n)}$ で表わされる。

ところが、まくら片持ばりにおいては、その振動固有数 $\lambda_n l$ が (36) 式の関係を満足しているので、この (36) 式をここでまとめて表現してみると、それは

$$\sin \lambda_n l = (-1)^n \frac{\tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \quad \dots\dots (91)$$

の形となる。よって、この (91) 式と前記の (56) 式の

公式とを使用して、(90) 式の右辺大カッコの中の項を計算してみると、その値が

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh \lambda_n l \cdot \sin \lambda_n l}{\sqrt{\sinh^2 \lambda_n l - \sin^2 \lambda_n l}} \\ &= \frac{(-1)^n \tanh^2 \lambda_n l / \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\sqrt{2} \tanh^2 \lambda_n l / \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \dots\dots (92)$$

のように得られる。

いま得られた (92) 式の値を (90) 式に代入すれば、この (90) 式の $\varphi_n(x)$ が

$$\varphi_n(x) = \frac{M_{B(n)}}{2EI\lambda_n^2} \left(\frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n l} - \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n l} \right) \quad \dots\dots (93)$$

と簡素化され、これでまくら片持ばりの振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ は固着端の反力モーメント $M_{B(n)}$ で表現できた。本式で l のところを $l/2$ に置き換えると、それは (87) 式と一致する。したがって、第3報で提示した長さ l の両端固着ばりの偶数次振動に対する振動モード曲線 (87) 式、つまり第3報の (87) 式は、長さが $l/2$ のまくら片持ばりの振動モード曲線であるとの確認ができたことになる。

6 改修形振動数方程式とその略算式

第3章においては、振動数方程式の在来形 $\tanh \lambda_n l = \tan \lambda_n l$ を変形して、奇数次振動と偶数次振動との区別ができる (33) 式と (36) 式を求めておいた。しかしながら、これら (33) 式と (36) 式を使用して実際に振動数を求めるためには、(30) 式の付帯条件を考慮する必要がある。よってこの場合、図2と図3でもわかるように、その中で斜線部に含まれる $\lambda_n l$ の値だけを採用しなければならない。これは非常に不都合なことである。

そこで本章では、(30) 式の付帯条件なしでも使用できるように、改修形としての振動数方程式を (33) 式と (36) 式により、求めることについて述べる。そしてさらにここでは、この改修形振動数方程式の近似解法を示し、あわせて端末抗力比の近似値についても述べることにする。

6.1 振動数方程式の改修形

まず、(30) 式の付帯条件を併用したとき、奇数次振動に該当すると考えられる (33) 式の第1式と、同じく (30) 式と併用して奇数次振動のとき成立すると考えられる (36) 式の第1式について、それらを辺々加

え合わせてみると

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_n l + \sin \lambda_n l &= -\frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \\ (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (94)$$

が得られる。同様にまた、(30)式と併用した場合、偶数次振動のときに成立すると考えられる(33)式の第2式と(36)式の第2式とを、辺々加え合わせると

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_n l + \sin \lambda_n l &= \frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \\ (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (95)$$

が求まる。

ところが(94)式と(95)式の右辺($\cos \lambda_n l + \sin \lambda_n l$)は

$$\cos \lambda_n l + \sin \lambda_n l = \sqrt{2} \cos \left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4} \right)$$

の形で表わされるので、これを(94)式と(95)式の左辺に使用すれば、(94)式は

$$\left. \begin{aligned} \cos \left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4} \right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \\ (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (96)$$

となり、次に(95)式はその表現形が

$$\left. \begin{aligned} \cos \left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \\ (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (97)$$

となる。ただし、これら両式では、いずれの式が奇数次か偶数次か、それぞれの対応を判定するために、(30)式の付帯条件が利用されている。

さてここで、 $\lambda_n l$ を横軸にとり、 $y_1'' = \cos(\lambda_n l - \pi/4)$ と $y_2'' = \pm(1 + \tanh \lambda_n l) / \sqrt{2(1 + \tanh^2 \lambda_n l)}$ を縦軸にとって図示してみた。図4はその結果であるが、この図の y_1'' 曲線と y_2'' 曲線の交点が、求める $\lambda_n l$ の値を示す。本図で y_1'' 曲線と y_2'' 曲線との最初の交点P

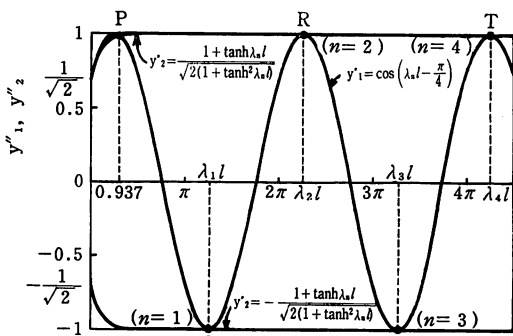


図4 $\cos(\lambda_n l - \pi/4) = \pm(1 + \tanh \lambda_n l) / \sqrt{2(1 + \tanh^2 \lambda_n l)}$ の根の図式解法

から得られる $\lambda_0 l = 0.937$ の値のみを除外すれば、その他のすべての交点による $\lambda_n l$ の値は、(30)式の付帯条件と併用して得られる図2と図3による結果と一致する。しかも奇数次振動、偶数次振動への対応も、(30)式の付帯条件なしに、自動的に区別されていることがわかる。したがって、(96)式と(97)式は振動数方程式の改修形として、それらが採用できるのではないかとの期待がもてる。ただしその場合は、(97)式から得られた y_1'' 曲線と y_2'' 曲線との最初の交点Pに該当する $\lambda_0 l = 0.937$ の値だけが、除外できるものでなくてはならない。

そこでさらに、(96)式と(97)式の2個の関係式を、振動次数 n を使用して1個の式にまとめ、それを

$$\left. \begin{aligned} \cos \left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}} \\ (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (98)$$

の形に表現してみる。前述のように、本式を図式的に解くため、その左辺を y_1'' とおき、また右辺を y_2'' とおいて、それらを図示したものが図4であったが、ここでいま、(98)式で $n=1$ において $\lambda_1 l$ の値を図4によって求めると、 y_1'' 曲線と y_2'' 曲線との最初の交点Pは得られず、このP点を飛び越えて、いきなりそれはQ点として得られる。次にまた、(98)式で $n=2$ において $\lambda_2 l$ の値を求めると、それが図4ではR点として得られる。以下同様にして、(98)式で $n=3, n=4, \dots$ とおいたときの $\lambda_3 l, \lambda_4 l, \dots$ の値は、図4でS点、T点、……で表わされる。このように、(98)式の図式解法を示す図4によれば、1次振動の $n=1$ に対する振動固有数が y_1'' 曲線と y_2'' 曲線の交点Qから得られる $\lambda_1 l = 3.927 (\approx 5\pi/4)$ の値として求められるので、必然的に(97)式の中に含まれる $\lambda_0 l = 0.937$ の交点Pの値だけは除外されてしまう。すなわち、(98)式を振動数方程式として採用すれば、(30)式の付帯条件は必要でなくなっており、ここで取り扱っているまぐろ片持ばりに対する振動数方程式の改修形としては、期待通り、(98)式が採用できることを知る。

6.2 振動数の近似値

いま述べたように、(98)式の振動数方程式を満足する振動固有数 $\lambda_n l$ の値は、図4で y_1'' 曲線と y_2'' 曲線の交点として求めることができる。ところが、この図4によれば、 $\lambda_n l$ の値がわずかに増加しただけで、関数 $y_2'' = \pm(1 + \tanh \lambda_n l) / \sqrt{2(1 + \tanh^2 \lambda_n l)}$ の絶対値は急激に1に漸近していることがわかる。すなわち、

$\lambda_n l$ の値が増大してその実用範囲 $n=1$ に到達した時点においては, (98) 式の右辺に含まれる $(1+\tanh \lambda_n l) / \sqrt{2(1+\tanh^2 \lambda_n l)}$ の項は確実に 1 の値に到達している。このため, (98) 式の振動数方程式は, その右辺を $(-1)^n$ で置き換えてもよい。したがって, (98) 式は十分な精度をもって

$$\cos \left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4} \right) \doteq (-1)^n, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots (99)$$

で近似できる。

この (99) 式で $n=1$ とおいた場合の根 $\lambda_1 l$ は, $\cos(\lambda_1 l - \pi/4) = -1$ を満足する $\lambda_1 l > 0$ の範囲の最初の値, つまり $\lambda_1 l = 5\pi/4$ である。そして, この $\lambda_1 l = 5\pi/4$ に続く $n=2$ の場合の振動固有数 $\lambda_2 l$ は, $\lambda_2 l > 5\pi/4$ の範囲において, $\cos(\lambda_2 l - \pi/4) = 1$ を満足する最小の値であるから, それは $\lambda_2 l = 9\pi/4$ となる。

このようにして, (99) 式より得られるまくら片持ばりに対する振動固有数 $\lambda_n l$ は

$$\lambda_n l \doteq \frac{4n+1}{4\pi}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots (100)$$

となり, これは従来から (26) 式の根の近似値として採用されている式と一致する⁶⁾。

なお, 上の (100) 式の $\lambda_n l$ の値に対しては, $\tanh \lambda_n l \doteq 1$, $\tan \lambda_n l \doteq 1$ となる。よって, (26) 式の在来形振動数方程式 $\tanh \lambda_n l = \tan \lambda_n l$ は

$$\tanh \lambda_n l \doteq 1, \quad \text{および} \quad \tan \lambda_n l \doteq 1 \quad \dots\dots (101)$$

で表わされるが, いま, 本式の第 1 式 $\tanh \lambda_n l \doteq 1$ を (72) 式に代入すると, (72) 式は

$$\frac{R_{A(n)}}{(EI\lambda_n^2)\theta_{A(n)}} \doteq 1 \quad \dots\dots (102)$$

のように簡単な表現に変化できる。そして, このとき (101) 式の第 2 式の $\tan \lambda_n l \doteq 1$ は (100) 式の $\lambda_n l$ の値を, 別な形で表現したことに当たる。

6.3 振動モード曲線の簡略式と端末抗力比の近似値

まくら片持ばりに対する振動数は, 十分な精度をもって (100) 式で近似できることがわかった。そこでここでは, 振動固有数の値として (100) 式を使用した場合, そのときの振動モード曲線の形を求め, さらに引き続き支持端に生ずる支持反力と固着端に生ずる抗力との比について述べることにする。

まず (80) 式を

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \right) \cdot \sinh \lambda_n x \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{(-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \right) \sinh \lambda_n x \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots (103)$$

と書き換えたのち, 上式の $\sin \lambda_n x$ と $\sinh \lambda_n x$ の係数へ (101) 式の第 1 式を代入すると, それらの係数はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{(-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} &\doteq 2 \\ 1 - \frac{(-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (104)$$

と与えられる。これらの関係を (103) 式に使用して, 振動固有数が (100) 式で表わされる場合の振動モード曲線を求めると, それは

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x) &\doteq \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \\ &= \frac{4l}{(4n+1)\pi} \theta_{A(n)} \sin \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{4l} x \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots (105)$$

のように簡略化された形で表現できる。本式はまた (76) 式の $\varphi_n(x)$ に (102) 式の関係を代入しても, それを求めることができる。

このようにして得られた (105) 式がどのようなモード曲線を与えるのか, それを具体的に図示して検討してみる。図 5 は, (105) 式により得られるまくら片持ばりの近似モード曲線と, (103) 式による同じまくら片持ばりの厳密なモード曲線とを比較して描いたものである。この図によると, 破線で示した (105) 式の近似モード曲線は, 固着端に近づくにつれて, 実線で表

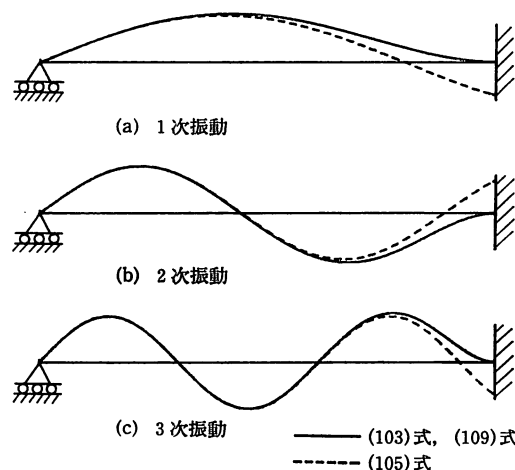


図 5 振動モード曲線

わした (103) 式のモード曲線とはかなり異なった形を示している。しかも、まくら片持ばりのモード曲線として (105) 式を採用すると、固着端におけるたわみ δ_B と傾斜角 θ_B はともに 0 とはならず、 $\delta_B = \delta_{\max}/\sqrt{2}$ 、 $\theta_B = \theta_{\max}/\sqrt{2}$ の値をとり不都合をきたす。

そこでここでは、(105) 式が (103) 式の厳密なモード曲線とは異なる形を示す原因を考え、さらに (105) 式に比べて近似度が高いモード曲線を求める。

ところで、(105) 式の近似モード曲線は、(104) 式の関係を使用して

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{1 + (-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l}\right) \sin \lambda_n x &\doteq 2 \sin \lambda_n x \\ \left(1 - \frac{1 + (-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l}\right) \sinh \lambda_n x &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (106)$$

が成立するとして、(103) 式を変形したものであった。しかしながら、 $\sinh \lambda_n x$ の値は x の値が l に近づくにつれて、すなわち固着端に近づくにつれて非常に大きな値となる。たとえば、 $x=l$ における 1 次、2 次および 3 次振動の $\sinh \lambda_n x$ の値は、 $\sinh \lambda_1 l = 25.3674$ 、 $\sinh \lambda_2 l = 587.486$ 、 $\sinh \lambda_3 l = 13586.8$ と大きな値をとる。したがって、(104) 式の第 2 式の関係が成立するからといって、必ずしも (106) 式の第 2 式が成立するとは限らない。つまり、(106) 式の第 2 式は、その式中の $\sinh \lambda_n x$ の係数が 0 に近い値をとるとはいえ、 x の値が l に近づくに成立しなくなる関係式であるといえる。

以上のことを考慮して、さらに次のような近似を行う。つまり、 $\lambda_n l$ の値が十分大きい場合には、 $\tanh \lambda_n l$ の値は

$$\tanh \lambda_n l \doteq 1 - 2e^{-2\lambda_n l}, \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \cdots (107)$$

と表わされるので、(103) 式の $\sinh \lambda_n x$ の係数を、(104) 式の第 2 式の右辺とは異なり

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 + (-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} &\doteq 1 - \frac{1 + (-1)^n 2\sqrt{2}e^{-\lambda_n l}}{1 - 4e^{-2\lambda_n l}} \\ &\doteq (-1)^{n+1} 2\sqrt{2}e^{-\lambda_n l}, \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (108)$$

と近似することにする。そこでこの (108) 式と (106) 式の第 1 式の関係を (103) 式に代入すると、(105) 式を修正したさらに近似度が高い振動モード曲線が

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\doteq \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n x \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-\lambda_n l} \sinh \lambda_n x \right\} \\ &= \frac{4l}{(4n+1)\pi} \theta_{A(n)} \left[\sin \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{4l} x \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-(4n+1)\pi/4} \cdot \sinh \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{4l} x \right\} \right] \\ &\quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (109)$$

の形で与えられることになる。この (109) 式の計算結果は、(103) 式による結果とほとんど一致し、図 5 に示す両者のモード曲線は同一曲線に重なった。よって、(109) 式は十分な精度をもって、まくら片持ばりの振動モード曲線として採用できることがわかる。

なお、(102) 式を書き換えて

$$\theta_{A(n)} \doteq \frac{R_{A(n)}}{EI\lambda_n^3} = \frac{16l^2}{EI(4n+1)^2\pi^2} R_{A(n)} \quad \cdots \cdots (110)$$

と表わし、この $\theta_{A(n)}$ の値を (109) 式に代入すれば、振動モード曲線は

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\doteq \frac{R_{A(n)}}{EI\lambda_n^3} \left\{ \sin \lambda_n x + (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-\lambda_n l} \cdot \sinh \lambda_n x \right\} \\ &= \frac{64l^3}{EI(4n+1)^2\pi^3} R_{A(n)} \left[\sin \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{4l} x \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-(4n+1)\pi/4} \cdot \sinh \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{4l} x \right\} \right] \\ &\quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (111)$$

のように、 $R_{A(n)}$ によっても簡単に表わされる。

ところで、(105) 式の $\varphi_n(x)$ に対応する端末条件式は、(102) 式の $R_{A(n)}/(EI\lambda_n^2 \cdot \theta_{A(n)}) \doteq 1$ の値を (69) 式に代入することにより

$$\begin{aligned} R_{B(n)} &\doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} R_{A(n)} \\ \lambda_n M_{B(n)} &\doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} (EI\lambda_n^2) \theta_{A(n)} \doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} R_{A(n)} \\ &\quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (112)$$

と表わされる。本式を書き換えて、各端末抗力の比の形にしてみると、それらはそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{R_{B(n)}}{R_{A(n)}} &\doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} \doteq (-1)^{n+1} 1.41 \\ \frac{R_{B(n)}}{M_{B(n)}} &\doteq \lambda_n \doteq \frac{4n+1}{4l} \pi \\ \frac{R_{A(n)}}{M_{B(n)}} &\doteq (-1)^{n+1} \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \doteq (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)\pi}{4\sqrt{2}l} \\ &\quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (113)$$

で与えられる。

この (113) 式で $(-1)^{n+1}$ の項は正負の符号を決定するだけであるから、この点を考慮外におくと次のことがいえる。ただし以下の説明では、 $R_{A(n)}$ 、 $R_{B(n)}$ および $M_{B(n)}$ がそれらを R_A 、 R_B および M_B と書いてあ

る。まず第1式によれば、まくら片持ばりが自由横振動を行うときには、固着端に発生する反力 R_B の大きさは、振動次数とは無関係に、常に支持端に生ずる反力 R_A のほぼ $\sqrt{2}$ 倍の値を持つ。次に (113) 式でその第2式によれば、固着端に発生する固着反力 R_B と反力モーメント M_B との比は、はりの長さが短い程、そして高次の振動になる程、その値が大きな値を持つことになる。そして、同様なことは第3式の支持端反力 R_A と固着端モーメント M_B との比についてもいえる。

それからまた、(113) 式の第1式と第3式をまとめると

$$\frac{R_B(n)}{R_A(n)} \doteq \frac{\lambda_n M_B(n)}{R_A(n)} \doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} \quad \dots\dots (114)$$

で表わされ、各端末に生ずる振動中の抗力の比は、その絶対値が一定の値を保つ。このとき、(113) 式の第2式は $\lambda_n M_B(n)/R_B(n) \doteq 1$ で表わされるが、これは (24) 式もしくは (25) 式、あるいは (73) 式へ (101) 式の関係を活用したものにすぎない。

さてここでいま、静的な一様分布荷重を受けるまくら片持ばりについて考えてみると、そのはりの両端で発生する各種抗力の比は、それらの値が

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_B}{R_A} &= \frac{5}{3} \doteq 1.67 \\ \frac{R_B}{M_B} &= \frac{5}{l}, \frac{R_A}{M_B} = \frac{3}{l} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (115)$$

となる。本式の第1式の値は (113) 式の第1式で $n=1$ とおいて得られる $R_B/R_A \doteq 1.41$ にほぼ等しく、また (115) 式の第2式はそれぞれ、(113) 式の第2式と第3式で $n=1$ とおいた $R_B/M_B \doteq 3.93/l$ および $R_A/M_B \doteq 2.78/l$ の値に大体等しくなっている。よって、まくら片持ばりが1次の自由横振動を行う場合にその両端に生ずる抗力の比は、静的な一様分布荷重を受ける同じはりの抗力比にほぼ近い値を持つことがわかる。

最後に、振動固有数の値としては (100) 式の値を採用するとして、ここで再度はりの左端 A を固着へ、また右端 B を支持へと、両端での設定条件を変更した場合について、そのはりの振動モード曲線を考えてみる。このときの振動モード曲線は (84) 式もしくは (85) 式で表わされ、しかもこれらの式中に含まれる端末抗力 $R_{A(n)}$ と $\lambda_n M_{A(n)}$ の比の値は (86) 式で与えられた。そこで (86) 式中の逆数形 $\lambda_n M_{A(n)}/R_{A(n)} = \tan \lambda_n l$ なる関係式へ、(100) 式の振動固有数の値

を代入すると、 $\lambda_n M_{A(n)}/R_{A(n)}$ の値は

$$\frac{\lambda_n M_{A(n)}}{R_{A(n)}} \doteq 1 \quad \dots\dots (116)$$

となる。

したがって、左端 A が固着、右端 B が支持のまくら片持ばりで、その振動固有数として (100) 式の値 $\lambda_n l \doteq (n+1/4)\pi$ を使用した場合には、振動モード曲線が (116) 式の関係 (85) 式に使用することにより

$$\varphi_n(x) = \frac{R_{A(n)}}{2EI\lambda_n^3} (\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x - \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \quad \dots\dots (117)$$

のように簡素化された形で表わされることになる。この (117) 式の近似モード曲線を、先程の図5と同様に、(85) 式のまくら片持ばりの厳密なモード曲線と比較したものが図6である。この図6をみると、破線で示した (117) 式の近似モード曲線は、実線で表わした (85) 式のモード曲線と一致し、重なっている。このことより、左端 A が固着、右端 B が支持のまくら片持ばりの場合、そのモード曲線は近似式 (117) で十分表現可能である、といえる。

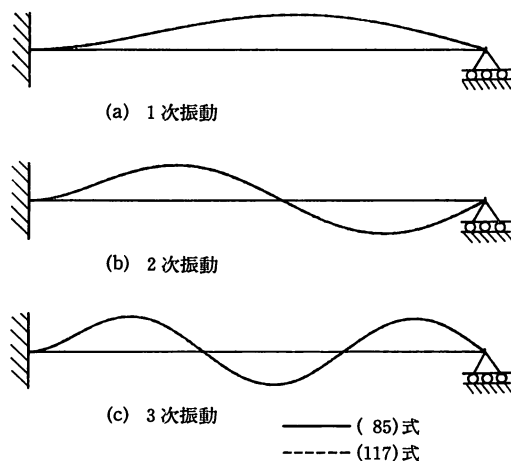


図6 振動モード曲線

7 結 言

本報告書は長さ l 、曲げ剛性 EI 、単位長さ当たり ρ_l の質量をもつ、一様なまくら片持ばりの横振動について述べたものであり、そこでは (9) 式と (10) 式を使用して、このまくら片持ばりに対する振動数方程式の在来形を、一般的に求める計算手順について説明してきた。そしてまた、この在来形の振動数方程式の表現

法を改訂して、別な形の表現式に変形した場合、振動モードと端末条件の対応関係が、より明確にできることを本報告書では述べた。また本報告書では(9)式と(10)式を利用すれば、振動のたわみ形を表わすモード曲線 $\varphi(x)$ に対しては、多様な表現の存在することを述べている。

いま、はりの左端を A 点とし、右端を B 点として、左端 A を座標原点に取り、 x 軸をはりの軸線方向に取る。次に w 軸を鉛直下方に取れば、はりのたわみ w は、そのたわみ形を表わす $\varphi(x)$ に比例することになる。このとき、 A 点のたわみと傾斜角を δ_A と θ_A で表わし、またその点の反力モーメントと支持反力を M_A と R_A で表わせば、まくら片持ばりの振動数方程式と、各振動次数に対応するたわみ形 $\varphi(x)$ は、次のようになる。ただし、 $n=1, 2, 3, \dots$ は振動モードを決定する振動次数として、また $\lambda_n = \sqrt{\rho_l \omega_n^2 / (EI)}$ とする。ここで ω_n は n 次の固有円振動数である。

(1) まくら片持ばりの振動数方程式としては、その在来形 $\tanh \lambda_n l = \tan \lambda_n l$ の代りに、(98) 式で表わされる

$$\cos\left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tanh \lambda_n l}{\sqrt{1 + \tanh^2 \lambda_n l}}$$

のような改修形が採用できるが、それはまた十分な精度でもって(99)式、すなわち

$$\cos\left(\lambda_n l - \frac{\pi}{4}\right) \doteq (-1)^n$$

で表わすことができる。

(2) 各振動次数 n に対応する 端末条件としては、 A 端支持、 B 端固着のまくら片持ばりの場合、(69) 式により

$$R_{B(n)} = (-1)^{n+1} R_{A(n)} \sqrt{1 + (EI \lambda_n^2 \theta_{A(n)})^2 / R_{A(n)}^2}$$

および

$$M_{B(n)} = (-1)^{n+1} (EI \lambda_n) \theta_{A(n)} \sqrt{2 R_{A(n)} / (EI \lambda_n^2 \theta_{A(n)})}$$

の関係が成立する。しかしながら、(112) 式によればこれらの関係はまた

$$R_{B(n)} \doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} R_{A(n)}, \quad \text{および}$$

$$\lambda_n M_{B(n)} \doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} (EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)} \doteq (-1)^{n+1} \sqrt{2} R_{A(n)}$$

のように簡単に表わすこともできる。したがって

$$|R_{B(n)} / R_{A(n)}| \doteq |\lambda_n M_{B(n)} / R_{A(n)}| \doteq \sqrt{2}$$

となり、各端末で振動中に発生する抗力の比は、絶対値で考えて一定の値を保つことになる。

(3) A 端支持、 B 端固着のまくら片持ばりに対する振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ は、(76) 式により

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2\lambda_n} \left\{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right.$$

$$\left. - \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\}$$

で表わされるが、上式中の $R_{A(n)} / (EI \lambda_n^2 \theta_{A(n)})$ の値として、(77) 式を使用すれば

$$\begin{aligned} \frac{R_{A(n)}}{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}} &= \frac{1 + (-1)^n \sqrt{1 - \tanh^4 \lambda_n l}}{\tanh^2 \lambda_n l} \\ &= \frac{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l} = \frac{\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l}{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l} \end{aligned}$$

のように表わされ、この場合 $\varphi_n(x)$ に対しては多様な表現が存在する。しかし、(100) 式によると振動固有数の値は $\lambda_n l \doteq (4n+1)\pi/4$ で与えられると考えてよいので、 $\varphi_n(x)$ は簡単な(109)式を使用して

$$\varphi_n(x) \doteq \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n x + (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-\lambda_n l} \cdot \sinh \lambda_n x \right.$$

で表わすこともできる。

次に、 $R_{A(n)} / (EI \lambda_n^2 \theta_{A(n)})$ の逆数値を採用すると、 $\varphi_n(x)$ は

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{R_{A(n)}}{2EI \lambda_n^3} \left\{ \frac{(EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}}{R_{A(n)}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right. \\ &\quad \left. - \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right\} \end{aligned}$$

のように、支持端の反力 $R_{A(n)}$ で表わされ、本式もまた(111)式によれば

$$\varphi_n(x) \doteq \frac{R_{A(n)}}{EI \lambda_n^3} \left\{ \sin \lambda_n x + (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{-\lambda_n l} \cdot \sinh \lambda_n x \right.$$

と簡単に表現できる。

(4) 次に A 端を固着へ、 B 端を支持へと、両端における設定条件を入れ換えた場合のまくら片持ばりに対しては、その振動モード曲線 $\varphi_n(x)$ が(84)式によって

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{M_{A(n)}}{2EI \lambda_n^2} \left\{ \cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{A(n)}}{\lambda_n M_{A(n)}} (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \right\} \end{aligned}$$

で表わされるが、ここで(86)によれば

$$\begin{aligned} \frac{R_{A(n)}}{\lambda_n M_{A(n)}} &= \frac{1}{\tan \lambda_n l} = \frac{1}{\tanh \lambda_n l} \\ &= \frac{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l} = \frac{\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l} \end{aligned}$$

のような関係があり、このはりの $\varphi_n(x)$ に対しても多様な表現が存在する。またこのとき、(116) 式によると $\lambda M_A / R_A \doteq 1$ の関係が成立するので、上式の $\varphi_n(x)$ は十分な精度をもって(117)式、つまり

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\doteq \frac{R_{A(n)}}{2EI \lambda_n^3} (\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x \\ &\quad - \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \end{aligned}$$

で表わすことができる。

最後に、本報告書作製にあたり種々御指導を頂いた
富 武満 元鹿児島大学教授に対し、心から感謝の意
を表します。

参 考 文 献

- 1) 富 武満：一様ばりの横振動時における端末条件
(第1報，端末条件について)，鹿児島大学工学部
研究報告，第20号（昭53-9），1～9.
- 2) 富 武満・有富正男：一様ばりの横振動時におけ
る端末条件（第2報，両端支持ばりと片持ばりに
対する振動数方程式と振動モード），鹿児島大学
工学部研究報告，第21号（昭54-9），21～35.
- 3) 有富正男・富 武満：一様ばりの横振動時におけ
る端末条件（第3報，両端固着ばりの振動数方程
式と振動モード），鹿児島大学工学部研究報告，
第22号（昭55-9），24～37.
- 4) S. Timoshenko: On the Correction for Shear
of the Differential Equation for Transverse
Vibrations of Prismatic Bars, Philosophical
Magazine, 6-41 (1921), 744～746.
- 5) 谷口 修：改訂 振動工学，（昭48），157～159，
コロナ社.
- 6) S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver,
JR.: Vibration Problems in Engineering, 4th
ed., (1974), 427, John Wiley & Sons, Inc..
- 7) 松平 精：基礎 振動学，（昭48），225～226，現
代工学社.