$\sigma>1$ に於る $1/\zeta(s)$ 非有界性の別証

柊　原　健　明

（受理　昭和55年5月31日）

ALTERNATIVE PROOF OF UNBOUNDNESS OF THE FUNCTION $1/\zeta(s)$ IN THE REGION $\sigma>1$

Kenmei KUKIHARA

Direct application of the Kronecker's theorem to the Dirichret series of $1/\zeta$ is shown to be possible.

1. 序

ゼーター関数 $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$ は $\sigma>1$ でいくらでも大きな，ある t の値に対して，いくらでも大きな値をとり得る．この定理の証明は，$\zeta(s)$ の Dirichret 級数に Diophantus 近似に於る Dirichret の定理を適用してなされる[1)2)]．

一方，逆数 $1/\zeta$ についても，同じ定理があり，ζ は $\sigma>1$ に於て，いくらでもゼロに近付くことを示している．

定理．関数 $1/\zeta$ は領域 $\sigma>1$, $t>\delta>0$ に於て非有界である．

この定理の証明には，しかしながら，ζ についてと同様の証明法はとれないことが言われている[1)2)]．

Dirichret 級数，

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \cdots\cdots(1)$$

の係数 Möbius の関数 $\mu(n)$, 即ち，

$\mu(1)=1$, もし n が k 個の異る素数より成るときは $\mu(n)=(-1)^k$, その他はゼロ，が定符号でないことによる．又，更に Dirichret の定理の代りに Kronecker の定理を適用しようとしても，$l_n n$ が1次独立でない為に，これも不可能とされている．これまでの証明は，対数 $l_n\zeta$ についてなされていて，間接的である．別の型の証明は Bohr によって与えられており，これは，Euler 積を利用するものである．[1)]

本報告では，級数 (1) に直接 Kronecker の定理を適用する証明が上記[1)2)]に反して可能であることを示す．

2. 証　明

自然数 n の素因数分解を

$$n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots\cdots p_r^{m_r}, \qquad \cdots\cdots(2)$$

として，重複を許したときの素因数の個数の和を $\beta(n)$ と記す．$\beta(n)=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$

先ず次のことを示す．

ゼロでない限り，$\mu(n)$ は

$$\mu(n)=(-1)^{\beta(n)} \qquad \cdots\cdots(3)$$

なぜなら，もし n が k 個の異る素因数よりなるときは β の定義より，$\beta(n)=k$ は明らかである．よって，このときに限り (3) は正しい．

任意の正整数 N に対して，

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n^\sigma}e^{-itl_n n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \cdots\cdots(4)$$

右辺第一の和について，絶対値は実部より大きいので，

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|\geqq\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n^\sigma}\cos(tl_n n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma}\cdots(5)$$

Kronecker の定理[2)]と，$l_n p_r$, $(r=1,2,\cdots)$ の1次独立性から，直ちに次のことがいえる．

与えられた任意に小さい正数 ε と，k 個の1次独立な無理数 $(l_n p_r)/2\pi$ に対して，

$$\left|\frac{tl_n p_r}{2\pi}-n_r+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \qquad \cdots\cdots(6)$$

となるような，k 個の整数 n_r といくらでも大きな実数 $t>1$ が存在する．これより，

$$-2\pi\varepsilon<t\,l_n p_r-\pi(2n_r-1)<2\pi\varepsilon$$

辺々を $r=1$ から k まで加えると

$$|tl_n n-\pi M_k|<2\pi k\varepsilon \quad \cdots\cdots(7)$$

の形となり，$2n_r-1$ が奇数であることから，整数 M_k の偶奇性は k のそれと一致する．なぜなら奇数を奇（偶）数個加えたものは奇（偶）数である．

それ故，(7) によって，$n\leqq N$ なる全ての n に対して，N に応じて ε を小さくとっておけば，任意に小さな正数 δ に対して，

$$\mu(n)\cos(tl_n n)>|\mu(n)|\cos\delta$$

が成り立つ．よって，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n^\sigma}\cos(tl_n n)>\cos\delta\sum_{n=1}^{N}\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma}$$

$$=\cos\delta\left(\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma}\right)$$

$$>\cos\delta\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma} \quad \cdots\cdots(8)$$

また

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\mu|}{n^\sigma}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\int_N^\infty\frac{du}{u^\sigma}$$

$$=\frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1}=N^{1-\sigma}\int_1^\infty\frac{du}{u^\sigma}$$

$$<N^{1-\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}=N^{1-\sigma}\zeta(\sigma) \quad \cdots\cdots(9)$$

(5), (8), (9) から，

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|>\left(\cos\delta-\frac{2}{N^{\sigma-1}}\zeta(2\sigma)\right)\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}$$

ここで，任意に小さい正数を新たに ε と記して，N を充分大きく，δ を充分小さくとっておけば，

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|>(1-\varepsilon)\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}$$

がいえる．$\zeta(\sigma)$ は $\sigma\to1$ で発散するから，$|1/\zeta|$ の非有界が証明された．

本証明を含めた三つの証明は，形式はそれぞれ異るのであるが，三者共に素因数分解の一意性に基いているように思われる．本証明の場合は，素数の対数同志の一次独立性が素因数分解の一意性に依っている．

文　　献

1) E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, 1951, Oxford, p157

2) 鹿野健，解析数論，1978，教育出版，p. 93