概周期関数の平均値の評価

柊　原　健　明

（受理　昭和55年5月31日）

EVALUATION OF MEAN VALUE OF THE ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Kenmei KUKIHARA

Expressions for mean values of the almost periodic functions by finite range integlations are given with smaller errors than those given ever. Derivation is based doubly on the almost periodicity.

1. 序

概周期関数の平均値を有限積分によって高精度で表現する式を与える．

純粋な周期関数は Fourier 級数論によって，調べ尽くされていて，応用も広い．一方，H. Bohr により建設された概周期関数論は，Dirichret 級数の為の理論であり，三角級数の拡張を与えているが，純周期関数にくらべ複雑で，解明は不充分である．

概周期関数の定義は次の様なものである．全実軸上の（連続）複素関数 $f(x)$ について，任意の正数 ε に応じて概周期 $\tau(\varepsilon)$ があって，x の値に依らず，

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqq\varepsilon \qquad \cdots\cdots(1)$$

となるような τ の集合 $E\{\varepsilon,\ f(x)\}$ が相対的稠密なること，即ち，ある正数 l（含有区間という）が存在して，長さ l の区間は少くとも1つの τ を含むことである．

平均値 $M\{f(x)\}$ の定義は

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる．

概周期関数は，その定義からわかるように，概ね，周期性を持つのであるから，平均値 (2) は，あまり大きくない有限区間の積分値で評価できる．そのような評価式は，平均値の存在定理の中で与えられている．詳細は文献[1)2)]によるとして，表式は概周期性から導かれていて，

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-M\{f(x)\}\right|\leqq\varepsilon+\frac{2lA}{T} \qquad \cdots\cdots(3)$$

T は有限な正数（積分区間），l は ε に対する含有区間，A は $|f(x)|$ の上限である．

表式 (3) は，周期関数との相違が大きすぎるのではないだろうか，という不審が，より高精度の評価を探し求めた動機である．期本周期にわたる積分値によって，厳密な値の得られる周期関数にくらべて，上の評価 (3) は荒くみえる．

次節で，新表式を与える．それは周期関数との類似性が高い．概周期性を二重に考慮することからくる．

周期関数の基本周期に対応するようなある長さが見出される．それは，予想されるような2つ，1つは，ゼロを含む区間をなしてはいない最小の τ，もう1つは含有区間 l，それらのどちらにも近いが異っている．両者の中間的な存在である．

2. 新しい評価式

表式 (3) の Besicovitch による表記

$$M\{f(x)\}=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx+\left(\varepsilon+\frac{2lA}{T}\right)\theta \qquad \cdots\cdots(4)$$

に従って，以下，θ は $|\theta|\leqq1$ をみたす色々な異る数値を表わすものとする[2)]．

長さ L を，$l\leqq\tau\leqq2l$ なる概周期の中で最小のものと定義しておく．

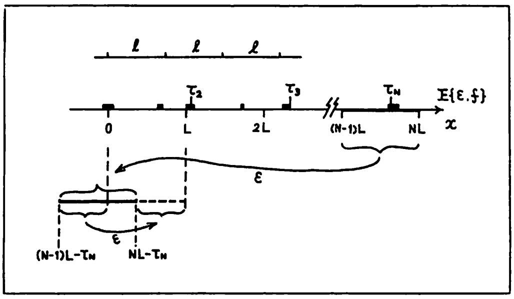
定理

$$M\{f(x)\}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx+2\varepsilon\,\theta \qquad \cdots\cdots(5)$$

が新評価である．これは，純周期関数の場合とくらべて，ε 程度の誤差が付くのみである．ε は概周期関数を特徴付ける量であるから，(5) 以上に高精度のものはないことを思わせる．$T=L$ の場合の (4) の誤差項 $\varepsilon\theta+2lA\theta/L$ は，$L\leqq 2l$ ということから $(\varepsilon+A)\theta$ より大きい．そして ε の小ささは任意という無制約さが概周期性の本質ともいえる．又，A にくらべていくらでも小さい．A と同程度になると E は実数全体に広がり，概周期性は意義を失う．よって新しい表式の誤差項はこれまでのものよりはるかに小さい．

3. 証 明

図の様に，実軸 x を長さ L の等長区間に分割する．$(N-1)L\leq x<NL$, $(N=0,1,2,\cdots)$ を第 N 区間とする．$L\geq l$ であるから，各区間に必ず存在する概周期の中から，任意の１つを代表に選び，これを τ_N と記しておく．



第 N 区間から平均値への寄与 I_N は，

$$I_N=\frac{1}{L}\int_{(N-1)L}^{NL} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(6)$$

概周期性 (1) により

$$f(x)=f(x-\tau_N)+\varepsilon\theta$$

であるから，(6) に用いて，

$$I_N=\varepsilon\theta+\frac{1}{L}\int_0^{NL-\tau N} f(x)\,dx+\frac{1}{L}\int_{(N-1)L-\tau N}^{0} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで再び概周期性を考慮する．L は E に含まれるので，$f(x)=f(x+L)+\varepsilon\theta$ となり，第３項の積分は，

$$\frac{1}{L}\int_{NL-\tau N}^{L} f(x)\,dx+\frac{(N-1)L-\tau_N}{L}\varepsilon\theta \qquad \cdots\cdots(8)$$

$|(N-1)L-\tau_N|\leq L$ であるから，(8) の第２項も単に $\varepsilon\theta$ と記すことができる．結局，

$$I_N=2\varepsilon\,\theta+\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(9)$$

となって，N に存在しない形となる．平均値は，(2), (9) から

$$M\{f(x)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_N$$

を経て，(5) が証明される．

4. あとがき

得られた表式は実用的な価値は薄いが，概周期性は広く拡張されているので有用となることもあろう．

解析概周期関数には当然そのまま適用できる．多変数概周期関数への拡張は直接的であろう．一般化された概周期関数として，Stepanoff と Wiener による拡張，Weyl によるもの，Besicovitch によるもの，von Neumann による群への拡張がある．これらについても同様の考え方に基く平均値評価が可能であろう．式 (8) でわかるように，特別の場合，代表 τ_N の選定が完全に random にできて，τ_N が mode L で一様分布なら，(5) の誤差項の数係数２は 3/2 まで小さくできるだろう．

文 献

1) H. Bohr, Almost periodic functious, translated by H. Corn and F. Steinhardt, Chelsea pub. Comp., New York, p. 42
2) A.S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge, 1932, pp. 13-14