ζ関数についての近似的な概周期性について

柊　原　健　明
（受理　昭和55年5月31日）

ON AN APPROXIMATE ALMOST PERIODICITY OF ZETA FUNCTION

Kenmei KUKIHARA

An approximate almost periodicity of ζ function is proposed, which leads that the numbers of values taken by the function are $O(T)$ in $|t|<T$.
However the proof is given only on the line $\sigma=1$.

1. 序　論

$1/2<\sigma$ に於て $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$ は Besicovitch の概周期性 (B.a.p.) を持つ[1], 即ち

$$\overline{M}_x \overline{M}_i \int_x^{x+1} |f(t+\tau_i)-f(t)|dt<\varepsilon \qquad \cdots\cdots(1)$$

を任意の ε に対してみたす充分一様な集合 $\{\tau_i\}$ が存在する．

平均操作は二重で，

$$\overline{M}_i\{f(i)\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} f(i) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\overline{M}_x\{f(x)\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx \qquad \cdots\cdots(3)$$

値分布の情報はかなり失われてしまう．

$\sigma>1$ では Bohr による一様概周期性 (u.a.p.) が成立し，ζ のとる全ての値 a に対して a 点の個数は $|t|<T$ で $N_a(T)\sim O(T)$ が導かれる．

$1/2<\sigma\leq 1$ に於ても，やはり $O(T)$ がゼロ以外の全ての値についてわかっている[2]．これらは B.a.p. と関連はあると思われる．ところが人間には解けないかも知れないリーマンの予想によればゼロは存在しない．

この予想を正しいとすると，ζ のとり得る全ての値に対して $O(T)$ がいえることになる．

そこで，逆に，この結果を導く様な，近似的な概周期性を構成予測してみることにする．候補は u.a.p. と B.a.p. の中間的なもの，

$$M_i\int_x^{x+1} |f(t+\tau_i)-f(t)|dt<\varepsilon \qquad \cdots\cdots(4)$$

が，任意に与えられた x に対してみたされる様な，充分一様な集合 $\{\tau_i\}$ が存在する，というものである．x についての条件が for all x ではなくて，given any x であるところが，一般化概周期性と呼ぶにふさわしくないので近似的としておく．(4) は $N_a(T)\sim K_aT$ を導くべくつくられている．

$1/2<\sigma$ で証明できないのは当然であるが，$\sigma=1$ では可能である．そこでは素数定理の帰結として簡単にできるが，以下の形は $1/2<\sigma$ にして概略を示す．

2. 計算の概要

$$M_i\left\{\int_x^{x+1} |\tilde{\zeta}(t+\tau_i)-\tilde{\zeta}(t)|dt\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

のタイプの極限値の存在は全ての x，任意の a.p.Set $\{\tau_i\}$ について既に知られている．

$\tilde{\zeta}(t)=(1-2^{1-\sigma-it})\ \zeta(\sigma+it)$

である．(5) の評価を適当な $\{\tau_i\}$ について行う．求めるのは不等式であるから，要求される精度の下では，極限値の存在から，M_i の無限和は有限和で近似できるから M_i と t 積分の順序は余り気にしないでおく．

(5) は (6) より小さい，(t 積分をしばらくはずしておく)

$$[M_i\{|\tilde{\zeta}(t+\tau_i)-\tilde{\zeta}(t)|^2\}]^{1/2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

Minkowski の不等式により

$$\begin{aligned}&\leq[M_i|\tilde{\zeta}_N(t+\tau_i)-\tilde{\zeta}_N(t)|^2]^{1/2}\\&\quad+[M_i|\tilde{\zeta}(t+\tau_i)-\tilde{\zeta}_N(t+T_i)|^2]^{1/2}\\&\quad+[M_i|\tilde{\zeta}(t)-\tilde{\zeta}_N(t)|^2]^{1/2}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで

$$\tilde{\zeta}_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma+it}} \qquad \cdots\cdots(8)$$

である．

$\{\tau_i\}$ として u.a.p. 関数 $\tilde{\zeta}_N$ の概周期の内で整数と一致するもの $\bar{E}\{\varepsilon, \tilde{\zeta}_N\}$ をとると，(7) の第一項は ε より小さい．

(8) は $N\to\infty$ で広義の一様収束であるから，t に応じて充分大きな N をとれば (7) の第3項は ε より小さい．

$\{\tau_i\}$ は上記によって，次の形の連立不等式

$$|e^{i\tau l_n n}-1|<\delta,\ n=2,\ \cdots,\ N \qquad \cdots\cdots(9)$$

をみたす整数である（δ は N, ε に応じて小さな数である），かつ n の素因数について $|\tau l_n p|<\gamma$ (mode 2π) なるものとする．

(7) の第2項の評価には工夫が要る．自然数 $n=0, 1, \cdots, \infty$ は素数 $p_1=2$, $p_2=3$, ……に因数分解して考える．

$$M_i=\int_{-r}^{r}d(\tau l_n 2)\cdots\int_{-r}^{r}d(\tau l_j p_\pi)$$
$$\times\int_{-1}^{1}d(\tau l_n p_{\pi+1})\int_{-1}^{1}d(\tau l_n p_{\pi+2})\cdots \qquad \cdots\cdots(10)$$

に注意する．但し被積分関数の τ_i を τ とし，$\tau l_n n$ の n は素因数に分解，そして各々の $\tau l_n p_r$ を独立変数とみなす．p_π は N より大きくない最大の素数である．積分 (10) を Monte Carlo 法で計算したのが Mi であると考えればよい．1つの整数及び $l_n p_r$, $r=1, 2, \cdots\infty$ の組が互に一次独立であることによる．

(7) の第2項の中味は，積分を $\int_{-1}^{1}$ の部分のみ行って，

$$M_i|\tilde{\zeta}(t+\tau_i)-\tilde{\zeta}_N(t+\tau_i)|^2$$
$$=M_i\left\{\left|(1-2^{1-s-i\tau_i})\prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s-i\tau_i}}\right|^2\right.$$
$$\left(\prod_{p>N}\frac{1}{1-p^{-2\sigma}}-1\right)+\left|(1-2^{1-s-i\tau_i})\prod_{p\le N}\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{1-p^{-s-i\tau_i}}-\tilde{\zeta}_N(s+i\tau_i)\right|^2\right\} \qquad \cdots\cdots(11)$$

又 $$\left|(1-2^{1-s})\prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s}}\right|^2\le2\left\{\left|(1-2^{1-s})\prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tilde{\zeta}_N\right|^2+|\tilde{\zeta}_N|^2\right\}$$

であるから，(7) の第2項が小さくなるかどうかは，

$$M_i\left|(1-2^{1-s-i\tau_i})\prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s-i\tau_i}}-\zeta_N(s+i\tau_i)\right|^2$$

にかかっている．素数定理からは，オイラー積が $\sigma=1$, $t\neq0$ で成立が導れているので，$\sigma=1$ の線上では，証明は可能である．$\sigma<1$ については何もわからない．オイラー積が実軸以外の $\sigma>1/2$ で成立していることも感じさせる．$l_n\zeta$ の特異点について，連分数の収束域に似た形式をとることもあり得よう．

文　献

1) A,S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge, 1932. p. 104
2) E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951. pp. 259-261
3) 文献1) pp. 94-95