

RIEMANN の ZETA 関数について

柊 原 健 明

(受理 昭和52年5月31日)

ON THE RIEMANN ZETA FUNCTION

Kenmei KUKIHARA

Several identities for the Riemann zeta function are given.

1. ま え が き

Riemann の ζ 関数に関連する等式その他を報告する。

2. 無限乗積表示について

乗積

$$\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-z}}, \quad (1)$$

但し, p は全ての素数をわたる. $z = \sigma + it$ として, (1) は $\sigma > 1$, $t \neq 0$ なら $\sigma \geq 1$ で成立する.

一方, $(z-1)\zeta(z)$ についての標準積¹⁾からの無限乗積表示との関連を考えると, これは, (1) の各因数を更に因数分解したものを, 別な組合せと配列の下に並べかえたものであろう. このこと以上のことは知ることはできないが, 無用とも言いきれないので, ここでは因数分解の1つを導いておく.

次の無限乗積の公式を先ずつくる.

$$\prod_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} x^r m^n = \frac{1}{1-x}, \quad (2)$$

$$m=2, 3, 4, \dots, |x| < 1$$

ここで $m=2$ とした場合の式

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (3)$$

は公式集²⁾にある. $m=3, 4$ 位までなら, x で展開することにより確かめることができる. そして $m=\infty$ の場合は $n \geq 1$ の因子が1になるので, (2) は

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}$$

という通常の公式に帰着するから, 全ての m についても容易に証明できるだろう.

$x=p^{-z}$ とすることにより (1), (2) から,

$$\zeta(z) = \prod_p \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} p^{-zrm^n}, \quad (4)$$

$$m=2, 3, 4, \dots$$

という無数の等式を得る.

3. 積分形の等式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\zeta^2(z) - 2\zeta(z)) \sum_p \frac{1}{p^z} dt = 0 \quad (5)$$

$\sum p^{-z}$ は ζ 関数の零点の位置に特異点を持つ関数である¹⁾. $\zeta^2 - 2\zeta$ を Dirichlet 級数で表すとき第 n 項の係数は, n の約数の個数を $d(n)$ として $d(n)-2$ である. $d(p)-2=0$ であることから (5) の積分は 0 に収束する¹⁾.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-2i \arg \zeta(z)} dt = \frac{1}{\zeta(2\sigma)} \quad (6)$$

これは

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\zeta(\bar{z})}{\zeta(z)} dt$$

を変形して左辺を, また Dirichlet 級数で表示してから積分を実行して右辺を得る.

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \delta(x-p^m) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T x^{z-1} \ln \zeta(z) dt \quad (7)$$

左辺はその Fourier 変換が $\zeta(z)$ の零点の位置と直接関連づけられるであろうとされている量である. これも $\ln \zeta$ を Dirichlet 級数で表示してから積分を行う.

4. $\zeta^{-1}(z)$ について

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}, \quad (8)$$

$\mu(n)$ は Möbius の関数²⁾.

右辺の収束座標の問題は Riemann 仮説³⁾ そのもので、全ゆる方法が役に立たないとされている。ここでは、次の等角写像についてはどう駄目かを調べてみる。

$z=1/w$ によって、半平面 $\sigma > 1/2$ は、半径1の円 $|w-1| < 1$ に写像される。この変換で Dirichlet 級数から Taylor 級数の取扱いにかえてみる。

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \frac{1}{\zeta(1/w)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-w_0)^n \quad (9)$$

$w=1$ のまわりの展開にすると、後で $w_0=1$ とおくことにする。

$$\begin{aligned} a_n &= \left(-\frac{d}{dw_0} \right)^n [\zeta(w_0^{-1})]^{-1}/n! \\ &= \frac{(-1)^n}{w_0^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} \\ &\quad \left(\left(\frac{d}{dw_0^{-1}} \right)^{n-r} [\zeta(w_0^{-1})]^{-1} \right) w_0^r \\ &= \frac{(-1)^n}{w_0^n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k w_0} (-lnk)^{n-r} \end{aligned} \quad (10)$$

収束半径 ρ についての Cauchy-Hadamard の公式

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \quad (11)$$

の評価の為に、先ず次のことを試みる。(10) の k と r 和の交換が許されると仮定してみると、

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{w_0^n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k w_0} \sum_{q=1}^n \binom{n-1}{q-1} \frac{1}{q!} (-lnk)^q \right| \\ &= \frac{1}{w_0^n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k w_0} \frac{lnk}{n} L_{n-1}^1(lnk) \right| \\ &= \frac{1}{w_0^n} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k w_0^{-1/2}} (lnk)^{1/4} \right. \\ &\quad \left. \cos \left[2\sqrt{n \ln k} - \frac{3}{4}\pi \right] + O(n^{-\frac{5}{4}}) \right| \end{aligned} \quad (12)$$

但し、 L は Laguerre の多項式である³⁾。(12)は元の問題と質が異ったとはみえないので、次に別の形の評価を進める。

$1/\zeta(z)$ の $z=1$ のまわりの展開係数 (b_q と記す) についての知識から $1/\zeta(1/w)$ の $w=1$ のまわりの収束半径について、どの程度のことを知り得るかを調べてみる。計算によって $1/\zeta(z)$ の極の位置は、 $z=1$ からみて近いものはわかっていて、遠方のものがわかっていない。等角写像による以下の扱いで解析接続の様な効果が出て来て、他の極についても少しは知り得

ないかという大まかな期待について試す。

式 (10) の2行目において、 $w_0=1$ とおき、

$$b_q = \frac{1}{q!} \left\{ \frac{1}{\zeta(z)} \right\}^{(q)} \Big|_{z=1}$$

ということから、

$$|a_n| = \left| \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} b_{q+1} \right| \quad (13)$$

$1/\zeta$ の極は $z=1$ に近いものから、 $z=-2, -4, -6$ などがあるので、 b_q は

$$b_q = R_{-2} \left(-\frac{1}{3} \right)^q + R_{-4} \left(-\frac{1}{5} \right)^q + \tilde{b}_q \quad (14)$$

の形になろう。但し R は Residue に関する定数、 \tilde{b}_q は

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} q \sqrt{|\tilde{b}_q|} = \frac{1}{7}$$

である。よって (13) は、

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |R_{-2}| \left(1 - \frac{1}{3} \right)^{n-1} + |R_{-4}| \left(1 - \frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ &\quad + \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} |\tilde{b}_q| \\ &\leq |R_{-2}| \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + |R_{-4}| \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \\ &\quad + C \left(\frac{8}{7} \right)^n, \quad C \text{ は正定数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \sqrt{|a_n|} &\leq \frac{8}{7} n \sqrt{C} + \left(\frac{7}{8} \right)^n \left(|R_{-2}| \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + |R_{-4}| \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right) \rightarrow \frac{8}{7} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|a_n|} \leq \frac{8}{7}$$

$$\therefore \rho \geq 7/8$$

さらに $z=-8, -10, -12, -14$ が極であるから

$$\rho \geq \frac{9}{10}, \rho \geq \frac{11}{12}, \rho \geq \frac{13}{14}, \rho \geq \frac{15}{16}$$

と、次第に $\rho=1$ に近付いてはくれる。しかしながら w 面上での $\rho=1$ と $\rho=15/16$ とは z 平面に戻してみると大きく異なる。結局役に立たない。

5. む す び

正則関数はある小領域の値から他の領域での関数値も与える筈である。ここでの問題にも、その他応用数学上極めて重要である。しかし、その手段となると、多種にはわたるけれども、周回積分の形は計算が必ずしも可能でないとして除くと、あとは展開法で、要す

るに関数近似になってしまう様である。関数値までは要らない、極の位置などの限られた情報のみ欲しい場合、鏡像の原理による解析接続が適しているようにみえるが、これも特殊な場合に限られる。関数の実部、虚部は各々楕円型偏微分方程式をみたす。これを考えると、結局、不適切な境界値の問題になっているところに困難の原因がある様である。そこで近似をある程度我慢して、展開を取入れた形の鏡像法をみつけるのも1つの方向であろう。しかし、例えば複素面上の曲

線の一部を円で近似した程度のもものでは、Taylor 展開の2次までと同程度であるに過ぎない。

文 献

- 1) E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann Zetafunction, Oxford, 1951.
- 2) 森口繁一・宇田川銑久・一松信: 数学公式II, 岩波.
- 3) A. Erdélyi 他: Higher transcendental functions, McGraw-Hill, New York, 1964.